Advances in Education 教育进展, 2022, 12(5), 1645-1650
Published Online May 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/ae
https://doi.org/10.12677/ae.2022.125254

Hans汉斯

将概率论知识点与社会重大事件结合分析的教学研究

——以新冠肺炎病毒单检混检为例进行事件的独立性与互不相容性教学研究

程　风[1]**，陈　暄**[2]

[1]西南交通大学数学学院，四川 成都
[2]浙江工业职业技术学院设计与艺术分院，浙江 绍兴

收稿日期：2022年4月20日；录用日期：2022年5月18日；发布日期：2022年5月25日

摘　要

在概率论的学习中，随机事件的独立性和互不相容性占有十分重要的地位，它们是两个不同的概念，容易引起混淆并导致误解。但是，教师在教的过程中分析偏少，很少给出实际案例帮助学生理解；学生在学的过程中只记住了定义，在实际应用中容易混淆两者并导致错误计算。本文全面分析了两者之间的区别和联系，给出了若干命题，帮助学生多角度理解这些概念。最后以新型冠状病毒检测中的单检混检为例，说明在概率计算中运用加法公式和乘法公式时应该注意的问题，帮助学生更好地应用这些概念。

关键词

独立性，互不相容性，新冠检测

Teaching Research on Combining Probability Theory with Social Major Event Analysis

—Taking Single and Mixed Samples in COVID-19 Test as an Example to Conduct a Teaching Research on the Independence and Mutual Exclusive Events

Feng Cheng[1]**, Xuan Chen**[2]

[1]School of Mathematics, Southwest Jiaotong University, Chengdu Sichuan

文章引用: 程凤, 陈暄. 将概率论知识点与社会重大事件结合分析的教学研究[J]. 教育进展, 2022, 12(5): 1645-1650.
DOI: 10.12677/ae.2022.125254

[2]Design and Art Branch, Zhejiang Industry Polytechnic College, Shaoxing Zhejiang

Received: Apr. 20th, 2022; accepted: May 18th, 2022; published: May 25th, 2022

Abstract

The independence and exclusiveness of events plays an important role in probability theory, and they are two different concepts which are easy to cause confusion and misunderstanding. However, teachers have analyzed little and seldom give practical scenarios to help students understand in the teaching. Students only remember the definitions when learning, but confuse them and lead to wrong calculation in practical application. This literature comprehensively analyzes the differences and relations between them, and gives some propositions to help students understand these concepts from multiple perspectives. Finally, we take one sample and mixed samples test for COVID 19 as an example to explain the problems that should be paid attention to when applying addition formula and multiplication formula in probability calculation, which help students apply these concepts better.

Keywords

Independence, Exclusive Events, Test for COVID-19

1. 引言

“概率论与数理统计”是一门研究随机现象及其统计规律的数学学科，它是高等院校理工科各专业学生的必修课程，它就像高等数学、线性代数一样是一门工具学科，为学生学习其它专业课程做好基础准备。但是它又区别于其它数学类课程，它兼具理论性、应用性、实践性与综合性，对培养学生的理性精神、随机事件应对能力、数据处理与建模能力等方面起着十分重要的作用。

“概率论与数理统计”分为两部分学习，第一部分是概率论，第二部分是数理统计，概率论是数理统计的理论基础，数理统计是概率论的应用。本课程的一个重要目标是：培养学生用概率与数理统计的数学思想分析问题和解决实际问题的能力。作者多年从事高校“概率论与数理统计”课程教学，发现在教与学的过程中关于事件的独立性和互不相容性存在以下问题：教师教的过程中分析偏少，很少给出具体的实际案例帮助学生理解；学生学的过程中只记了定义，在实际应用中又容易出错。因此，本文以新型冠状病毒检测案例为例说明事件的独立性和互不相容性的差别与联系，帮助学生更好地理解和应用这些概念。

几乎所有的概率论与数理统计的教材都有事件的独立性和互不相容性的定义[1] [2] [3]。关于事件独立性的教学方法有不少作者研究。张杰和王文杰[4]运用“形式阶段”理论探索了关于事件独立性的教学。曹宏举等[5]为了改善课堂教学，讨论了谚语背后的事件独立性。罗羡华[6]讨论了随机事件独立性定义的方式选择问题，分析了由两个事件到三个事件、由有限个事件到无限个事件的独立性概念的递推过程。但是他们的讨论都集中在事件的独立性上。为了区分独立性和互不相同性，李超群和刘智慧[7]论述了事

件的独立性和互不相容性的区别，并以掷骰子游戏为例说明事件的独立性和互不相容性。但是他们对独立性和互不相容性的区别和联系分析偏少。本文以命题的形式具体给出了独立性和互不相同性的不同及计算，且用学生更容易接受理解的实际案例说明事件的独立性和互不相容性。本文首先以命题形式介绍事件的独立性和互不相容性的区别和联系，然后给出具体的例子，最后给出本文的结论。

2. 事件的独立性和互不相容性

在概率论中事件的独立性和互不相容性占有十分重要的地位，它们是两个不同的概念。我们先对要教学的知识点进行数学分析，然后基于要讲解的事件独立性与互不相容性的特性，寻找当下学生们能感知到的社会事件。将数学知识代入社会事件进行综合分析，便于学生的理解。

定义 1 [1] [2] [3] (事件互不相容)设随机试验 E 的样本空间为 S，$A,B,A_k\left(k=1,2,\cdots,n\right)$ 是 S 的子集，即为 E 的随机事件。若 $A\bigcap B=\varnothing$，则称 A 与 B 是互不相容的，或称之为互斥的，即指事件 A 与事件 B 不能同时发生。

如果 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中任意两事件都是互不相容的，则称 n 个事件两两互不相容。

定义 2 [1] [2] [3] (两个事件相互独立)设随机试验 E 的样本空间为 S，A,B 是 S 的子集，即为 E 的随机事件。若 $P(AB)=P(A)P(B)$，则称 A 与 B 为相互独立的事件。

定义 3 [1] [2] [3] (多个事件相互独立)设随机试验 E 的样本空间为 S，$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 S 的子集，即为 E 的随机事件。如果对于任意 $k\left(1<k\le n\right)$，任意 $1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n$，具有等式 $P\left(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k}\right)=P\left(A_{i_1}\right)P\left(A_{i_2}\right)\cdots P\left(A_{i_k}\right)$，则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为相互独立的事件。

通过以上的定义可以得出以下命题。

命题 1 不可能事件 $\varnothing$ 与任意事件 A 互不相容；不可能事件 $\varnothing$ 与任意事件 A 相互独立；样本空间 S 与任意事件 $A\left(A\ne\varnothing\right)$ 相容；样本空间 S 与任意事件 A 相互独立。

证明：易知

$$\varnothing A=\varnothing\text{；}$$

$$P(\varnothing A)=P(\varnothing)=P(A)\cdot 0=P(A)P(\varnothing)\text{；}$$

若 $A\ne\varnothing$，则 $SA=A\ne\varnothing$；

$$P(SA)=P(A)=P(A)\cdot 1=P(A)P(S)$$

命题 2 如果两事件 A 与 B 相互独立，那么 A 与 $\bar{B}$，$\bar{A}$ 与 B，$\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 的每一对事件中的两个事件也是相互独立的。

证明：由概率的性质及 A 与 B 相互独立，得

$$\begin{aligned}P\left(A\bar{B}\right)&=P\left(A-AB\right)=P\left(A\right)-P\left(AB\right)=P\left(A\right)-P\left(A\right)P\left(B\right)\\&=P\left(A\right)\left(1-P\left(B\right)\right)=P\left(A\right)P\left(\bar{B}\right),\end{aligned}$$

所以，事件 A 与 $\bar{B}$ 相互独立。类似的可以证明 $\bar{A}$ 与 B 相互独立，$\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 相互独立。

对**命题 2** 进行推广，若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立，则事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，$\overline{A_1},\overline{A_2},\cdots,\overline{A_n}$ 中任意 $k\left(2\le k\le 2n\right)$ 个事件都相互独立。

根据定义 1 可以看出，两个事件互不相容强调在一次随机试验中这两个事件不会同时出现，即要么这两个事件都不出现，要么只出现其中一个事件。n 个事件两两互不相容强调在一次随机试验中这 n 个事件中任意两个或两个以上事件都不会同时出现，即要么这 n 个事件都不出现，要么只出现其中一个事件。

根据定义 2 看出，如果 A 与 B 为相互独立，若 $P(A)>0$，则 $P(B|A)=P(B)$，说明在给定信息 A 的情况下，B 的后验概率与其先验概率相同。进一步说明 A 与 B 可能出现在同一试验中，也可能不出现在同一试验中，即 A 与 B 可能相容，也可能不相容。同理若 $P(B)>0$，则 $P(A|B)=P(A)$，有与上面相同的结论。

从上面的分析可以看出，A 与 B 互不相容指的是 A 与 B 两个事件不能同时发生，即 A 与 B 没有公共的基本事件。A 与 B 相互独立，在 $P(A)>0$ 条件下指的是 B 的后验概率与其先验概率相同。

例如设随机试验 E 为“在 4 张标有数字 1，2，3，4 的卡片中等可能的任取一张”设取到数字 1 或 2 的事件为 A，取到数字 3 的事件为 B，取到数字是 1 或 3 的事件为 C，则易见

$$AB=\varnothing, AC\neq\varnothing,$$

$$P(A)=\frac{1}{2}, P(B)=\frac{1}{4}, P(AB)=0, P(B|A)=0,$$

$$P(A)=\frac{1}{2}, P(C)=\frac{1}{2}, P(AC)=\frac{1}{4}, P(C|A)=\frac{1}{2},$$

即 $P(AB)\neq P(A)P(B), P(B|A)\neq P(B)$，即 A 与 B 互不相容，但是 A 与 B 不独立；而 $P(AC)=P(A)P(C), P(C|A)=P(C)$ 成立，即 A 与 C 相容，A 与 C 独立。

通过上面的分析可以得出以下的命题。

命题 3 若 $P(A)>0$ 且 $P(B)>0$，则有

1) 当 A 与 B 相互独立时，则一定有 A 与 B 相容；

2) 当 A 与 B 互不相容时，则一定有 A 与 B 不独立。

证明：

1) 若 A 与 B 相互独立，则有 $P(AB)=P(A)P(B)$。又因为 $P(A)>0$ 且 $P(B)>0$，所以 $P(AB)>0$。

假设 A 与 B 互不相容，则有 $AB=\varnothing$，即得 $P(AB)=P(\varnothing)=0$。这与上面的结论矛盾，因此假设不成立，即 A 与 B 相容。

2) 若 A 与 B 互不相容，则有 $AB=\varnothing$，即得 $P(AB)=P(\varnothing)=0$。

假设 A 与 B 相互独立，则有 $P(AB)=P(A)P(B)$。又因为 $P(A)>0$ 且 $P(B)>0$，所以 $P(AB)>0$。这与上面的结论矛盾，因此假设不成立，即 A 与 B 不独立。

命题 4 若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 互不相容，则有

1) $P(A_1A_2\cdots A_n)=0$；

2) $P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$。

证明：略。

命题 5 若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立，则有

1) $P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)$；

2) $P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=1-\prod_{i=1}^{n}\left[1-P(A_i)\right]$。

证明：

1) 根据定义直接得出。

2) 由对立事件的概率性质得，$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=1-P\left(\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}\right)=1-P\left(\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i}\right)$，

因为 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立，所以 $\overline{A_1}, \overline{A_2}, \cdots, \overline{A_n}$ 也相互独立。则有

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i}\right)=P\left(\overline{A_1}\right)P\left(\overline{A_2}\right)\cdots P\left(\overline{A_n}\right)$$
$$=\left(1-P\left(A_1\right)\right)\left(1-P\left(A_2\right)\right)\cdots\left(1-P\left(A_n\right)\right)$$
$$=\coprod_{i=1}^{n}\left[1-P\left(A_i\right)\right]$$

所以，$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=1-\coprod_{i=1}^{n}\left[1-P\left(A_i\right)\right]$ 成立。

基于以上分析，我们选择以当下与所有人息息相关的新冠疫情为依托，寻找用到以上知识点的具体案例。我们研究后发现大面积核酸检测时的单检和混检就用到了上述知识点，接下来我们结合核酸检测的实际情况进行具体分析。

3. 新冠肺炎病毒单检混检的概率计算

自 2019 年底发现新冠肺炎病毒，到 2020 年 3 月新冠肺炎疫情全球爆发，到现在新冠肺炎病毒仍然在全世界范围内蔓延，这给人类生命安全带来了巨大威胁。疫情尚未结束，防控仍在进行，到目前为止，我国抗击疫情的政策和措施十分有效且高速，取得了疫情防控的初步成效。其中新冠病毒核酸筛查是确认新冠病毒的重要手段，也是患者确诊的重要流程之一。核酸检测分为单样检测(简称单检)和混样检测(简称混检)。根据国务院应对新型冠状病毒肺炎疫情联防联控机制医疗救治组给出的指导意见，在人群总体阳性率较低(低于 0.1%)时混检更为适宜。

为此，给出一个实际的例子。在一个人数很多的团体中(例如某所大学、某个小区)检测新冠肺炎病毒感染情况，为此要检测 N 个人。可以用两种方法进行：1) 每个人分别取验咽拭子样本，这就需要检验 N 次；2) 按 k 个人一组进行分组，把 k 个人的咽拭子采样混合在一起进行检验，如果这混合样本呈阴性反应，就说明这 k 个人的咽拭子样本都呈阴性反应，这 k 个人就只需验一次。若呈阳性，再对这 k 个人分别进行化验。这样，k 个人总共需要化验 $k+1$ 次。

例 1 假设每个人化验呈阳性的概率为 $p=0.05\%$，且这些人的试验反应是相互独立的。假设按 $k=15$ 人一组进行检验，求一组中检测出新冠肺炎病毒的概率是多少？

错误解法：

令事件 $A_i=\{\text{第}\,i\,\text{个人感染}\},i=1,2,\cdots,N$，事件 $B=\{\text{一组中检测结果呈阳性}\}$。那么 $P\left(A_i\right)=p=0.05\%$，$B=\bigcup_{i=1}^{k}A_i$，则

$$P(B)=P\left(\bigcup_{i=1}^{k}A_i\right)=\sum_{i=1}^{k}P\left(A_i\right)=15\times 0.05\%=0.75\%.$$

学生在计算过程错误的原因有两种：1) 认为每个人的试验反应是相互独立，那么它们一定是互斥的，直接应用加法公式；2) 认为计算和事件的概率就直接等于概率之和，没有思考等式成立的条件。

事实上，虽然每个人的试验反应是相互独立的，但是可以出现两个或两个以上样本都是阳性的。因此，在计算过程中最好利用**命题5**解答。

正确解法：

$$P(B)=P\left(\bigcup_{i=1}^{k}A_i\right)=1-\coprod_{i=1}^{k}\left[1-P\left(A_i\right)\right]$$
$$=1-(1-0.05\%)^{k}=1-(1-0.05\%)^{15}$$
$$\approx 0.00747=0.747\%.$$

从上面的分可以看出，当 $k=1$ 时，$P(B)=0.05\%$，即单检虽然概率较低，但是检测效率不高；当 $k=N=50000$ 时，$P(B)$ 几乎就是 1，即将全体混检，检测结果为阳性的概率几乎为 1，这样的检测没有实际意义。因此，需要选取适当的 k，使得检测效率较高且保证检验的有效性。

经过上述分析，国家核酸检测和大面积筛查时，有效使用了数学工具，提高了工作效率。学生学习时更有画面感和思维代入感，可以提高知识传递的有效性。

4. 结论

在教学过程中，我们采用以下几步进行教学研究，即教学知识点的梳理、知识点与社会事件的关联分析、结合社会事件代入数学知识综合分析教学。本论文结合新冠疫情对概率论中事件的独立性和互不相容性知识点进行了讲解，经过教学实践，课堂效果良好，学生既掌握了数学知识，也对我国科学防疫有了更深层次的认知。

通过课程学习，学生深刻理解了两个事件 A 与 B 互不相容指的是 A 与 B 不能同时发生，即 A 与 B 没有公共的基本事件；A 与 B 相互独立，在 $P(A)>0$ 条件下指的是 B 的后验概率与其先验概率相同。因此，两个事件互不相容和相互独立是两个不同的概念，它们在概率的计算中有不同的作用。

致　谢

作者非常感谢相关文献对本文的启发以及审稿专家提出的宝贵意见。

基金项目

西南交通大学 2020 年本科教育教学研究与改革项目(20201035-07)；浙江省统计局统计重点研究项目(21TJZZ29)。

参考文献

[1] 李裕奇, 赵联文, 王沁, 等. 概率论与数理统计[M]. 第 3 版. 北京: 国防工业出版社, 2011.

[2] 西南交通大学数学学院统计系. 概率论与数理统计[M]. 第 2 版. 北京: 科学出版社, 2017.

[3] 盛骤, 谢式千, 潘承毅. 概率论与数理统计[M]. 第 4 版. 北京: 高等教育出版社, 2012.

[4] 张杰, 王文杰. 关于事件的独立性教学的探索与实践[J]. 东北电力大学学报, 2010, 30(5): 48-50.

[5] 曹宏举, 何素艳, 林彦含. 谚语背后的事件独立性[J]. 沈阳师范大学学报(自然科学版), 2011, 29(3): 259-361.

[6] 罗羡华. 关于随机事件独立性的教学探讨[J]. 教育教学论坛, 2017(14): 85-87.

[7] 李超群, 刘智慧. 概率论中几个易混淆概念的举例说明[J]. 高等数学研究, 2018, 21(4): 23-25.