Creative Education Studies 创新教育研究, 2016, 4(2), 55-60
Published Online May 2016 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/ces
http://dx.doi.org/10.12677/ces.2016.42010

Cultivate Students' Innovation Ability by the Teaching of Complex Function

Shumei Guo, Ning Zhang, Jie Guo

Department of Science, The People's Liberation Army Information Engineering University, Zhengzhou Henan
Email: guoshumeixmu@163.com

Received: May. 4th, 2016; accepted: May. 18th, 2016; published: May. 24th, 2016

Abstract

The introduction of complex number for people to solve the problems in real number field and other disciplines offers many new methods, and provides a new way of thinking and convenience in the field of non-complex problem. In the complex teaching, we can develop the students' ability of divergent thinking, reverse thinking and analogy thinking, and all these abilities contribute to the formation of students' innovation ability.

Keywords

Complex Number, Algebra, Integration

利用复变函数教学，培养学生创新能力

郭淑妹，张　宁，郭　杰

中国人民解放军信息工程大学理学院，河南　郑州
Email: guoshumeixmu@163.com

收稿日期：2016年5月4日；录用日期：2016年5月18日；发布日期：2016年5月24日

摘　要

复数的引入为人们解决实数域和其他学科提供了许多新的途径，为解决非复领域上的问题提供了全新的思路与方便。在复变函数教学中，培养学生的发散性思维能力、逆向性思维能力、类比性思维能力有助

文章引用：郭淑妹，张宁，郭杰．利用复变函数教学，培养学生创新能力[J]．创新教育研究, 2016, 4(2): 55-60.
http://dx.doi.org/10.12677/ces.2016.42010

于学生创新能力的形成。

关键词

复数，代数运算，积分

1. 引言

复变函数经过长期的发展，已经形成完美的理论和精湛的技巧，已成为一门重要的学科。复数在很多运算中都有着不可思议的性质和规律，它在解决某些工程中的问题是很好的工具。比如：复数在场论获得了广泛的应用，主要是与时谐或正弦信号性关联。物理方面解析函数表示无源、无旋向量场。物理中的相位因子完全属于复数域，薛定谔提出的微观粒子波函数，就是复函数及波动方程，复函数的相位因子则表示粒子与粒子之间的波动性相互作用。复变函数在数学领域的许多分支也都得到应用，它已经深入到微分方程、概率论和数论等学科[1] [2]。创新能力在科技日新月异发展的今天，已成为核心竞争力，大学生创新能力的培养，更是在国家创新人才体系中占有重要地位。所以作为基础的大学数学类课程的教学中，更应该注重学生创新能力的培养。在复变函数的教学中，通过例题的讲解，可以培养学生的发散性思维、逆向思维和类比思维，从而达到培养学生的善于思考、善于发现的创新学习能力。

2. 利用复数的运算巧解题目，培养学生的发散思维能力

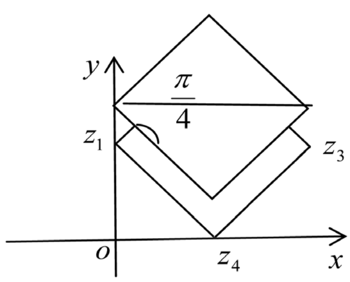
在复数域内，欧拉公式把指数和三角函数紧密相连，在数学方面打开了新的视野。复数具有模与幅角，复数的运算也是关于模与幅角的运算,有关模和角度的运算就很灵活，是很多代数运算所没有的[3] [4]。复数使原来很麻烦的三角证明，在引入复数证明以后很简单明了。一些有关角度变化的简单题目，引入复数进行运算，既可以帮助学生熟悉复数的运算，也可以引导学生进行一题多解，培养学生的发散性思维。发散思维也称为求异思维，它是一种重要的创造性思维，用“一题多解”，“一题多变”等方式，发散式地思考问题。现在我们看以下例题：

例 1、已知 $z_1 = i, z_3 = 2+i$ 为正四边形的两个顶点，求另两个顶点。

解：已知 $z_3 - z_1$ 与 $z_2 - z_1$ 夹角为 $\frac{\pi}{4}$，模为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 倍

根据复数的乘积运算可得：$z_3 - z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}} (z_3 - z_1)$

$$z_4 - z_1 = \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} (z_3 - z_1)$$



解得：$z_2 = 1+2i, z_4 = 1$

例 2、证明三角函数中的和角公式和差角公式

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

证明：由欧拉公式，
$$\begin{aligned}&\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)\\&=\mathrm{e}^{i(\alpha+\beta)}=\mathrm{e}^{i\alpha}\mathrm{e}^{i\beta}=(\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos\beta+i\sin\beta)\\&=(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)+i(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)\end{aligned}$$

等式两端实部与虚部相等，就可得到证明。

以上例题比较简单学生利用高中所学知识就可以求解，但是学习复数以后，引导学员利用复数求解，把以前的知识，转化成复数的形式可以简单求解。培养学生利用欧拉公式，使三角函数和指数函数之间自由转换，从而打开新的解题思路。并且复数的相等就是实部与虚部的分别相等，这也给出了证明等式一种新的方法。学习复数之后，让学生通过发散性思维，用最简洁和最美妙的方法解出以前学习过的题目，使学生有豁然开朗，眼前一亮的感觉，从而激发学生学习兴趣，以更高的积极性和热情投入到复变函数学习当中，才能够利用复变函数创造性地分析问题、解决问题。

3. 利用留数进行积分计算，培养学生的逆向思维能力

积分计算是在高等数学就已经学习过，求解积分的方法也有很多种。通常，一个积分题目学生会按照常规的方法进行求解，但是一些特殊的积分，常规方法并不能解出积分或者不能很简单明了地解出积分。用留数来计算定积分，是特别有效的措施，特别是被积函数的原函数不易求得时，更显得有用。即使寻常的方法可用，如果用留数，也常常感到很方便。在应用留数解积分题目，要求是沿封闭路线的积分，经常用到的方法是围道积分法。围道积分法是寻找合适的函数 $F(z)$ 和找出合适的函数来连接曲线的两端，从而构成一条封闭的积分路线。在寻找合适的函数 $F(z)$ 时，通常会有些困难，从而使围道积分法具有局限性，这时用逆向思维可使问题迎刃而解。逆向思维是相对于习惯性思维的另一种思维形式，它是在解决问题时“反其道而行之”，从反的方向让思维展开，从问题的另一面深入地进行思考与探索。逆向思维对开阔思路、解决难题、开创新的方向，往往能起到积极的作用。下面两例就是用逆向思维，寻找合适的函数 $F(z)$ [5] [6]。

例 3、求积分 $\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)\mathrm{d}\theta$

解：根据柯西积分公式知：$\oint_{|z|=1}\frac{\mathrm{e}^z}{z}\mathrm{d}z=2\pi i$，令 $z=r\mathrm{e}^{i\theta},-\pi<\theta<\pi$，这里 $|z|=r=1$，

就有：
$$\begin{aligned}\oint_{|z|=1}\frac{\mathrm{e}^z}{z}\mathrm{d}z&=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{e}^{r\mathrm{e}^{i\theta}}ir\mathrm{e}^{i\theta}}{r\mathrm{e}^{i\theta}}\mathrm{d}\theta=\int_{-\pi}^{\pi}i\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{i\theta}}\mathrm{d}\theta=\int_{-\pi}^{\pi}i\mathrm{e}^{\cos\theta+i\sin\theta}\mathrm{d}\theta\\&=2i\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)\mathrm{d}\theta-\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{\cos\theta}\sin(\sin\theta)\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

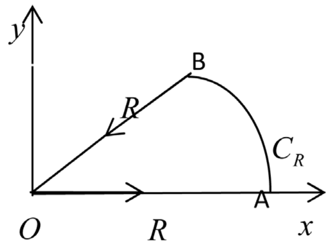
因为 $\oint_{|z|=1}\frac{\mathrm{e}^z}{z}\mathrm{d}z=2\pi i$ 比较两式得 $\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)\mathrm{d}\theta=2\pi$

例 4、证明：Fresnel(菲涅尔)积分

$$\int_0^{\infty}\sin x^2\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}\cos x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

解：设 $f(z)=\mathrm{e}^{iz^2}$，$\mathrm{e}^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$，当 $z=x$ 时有 $\mathrm{e}^{ix^2}=\cos x^2+i\sin x^2$

取如下图所示的积分区域



$f(z)$ 在区域内解析，根据柯西古萨定理得：

$$\oint_C \mathrm{e}^{iz^2}\mathrm{d}z = 0\text{，具体是 } \int_{oA}\mathrm{e}^{ix^2}\mathrm{d}x + \int_{C_R}\mathrm{e}^{iz^2}\mathrm{d}z + \int_{Bo}\mathrm{e}^{iz^2}\mathrm{d}z = 0$$

1. 把积分分成三部分分别进行计算
2. $\int_{oA}\mathrm{e}^{ix^2}\mathrm{d}x = \int_0^R \mathrm{e}^{ix^2}\mathrm{d}x$

$$\int_{C_R}\mathrm{e}^{iz^2}\mathrm{d}z = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{e}^{iR^2\mathrm{e}^{i2\theta}}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{e}^{iR^2\sin 2\theta - R^2\sin 2\theta}\, iR\,\mathrm{e}^{i\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$\left|\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{e}^{iR^2\sin 2\theta - R^2\sin 2\theta}\, iR\,\mathrm{e}^{i\theta}\mathrm{d}\theta\right| \le \int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{e}^{-R^2\sin 2\theta}\mathrm{d}\theta \le R\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{e}^{-\frac{4}{\pi}R^2\theta}\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{4R}\left(1-\mathrm{e}^{-R^2}\right)$$

得 $\lim\limits_{R\to\infty}\int_{C_R}\mathrm{e}^{iz^2}\mathrm{d}z = 0$

3. $\int\limits_{Bo}\mathrm{e}^{iz^2}\mathrm{d}z$

令 $z = r\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}$，$\mathrm{d}z = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}r$

于是有

$$\int\limits_{Bo}\mathrm{e}^{iz^2}\mathrm{d}z = \int_R^0 \mathrm{e}^{iR^2}\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}r = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}\int_0^R -\mathrm{e}^{-r^2}\mathrm{d}r$$

$$= -\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} + i\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)$$

因为 $\int_{oA}\mathrm{e}^{ix^2}\mathrm{d}x = -\int_{Bo}\mathrm{e}^{iz^2}\mathrm{d}z$

既得：$\int_0^\infty \mathrm{e}^{ix^2}\mathrm{d}x = \int_0^\infty \cos x^2\mathrm{d}x + \int_0^\infty i\sin x^2\mathrm{d}x = \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} + i\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)$

由等式两边实部与虚部分别相等得：

$$\int_0^\infty \sin x^2\mathrm{d}x = \int_0^\infty \cos x^2\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

原题得证。

这两个积分用正常的积分方法进行计算比较麻烦，首先利用逆向思维，给出已知的积分公式的结果，然后进行转化，使实积分变为复积分，再构造封闭曲线，寻找合适的 $F(z)$，最后利用复数的相等，就可等到所求。在解题中，逆向思维有利于克服思维定势的保守性，它对找到解决问题的新方法、新思路具有很好的效果，这对培养学生的创造性思维具有很好的促进作用。

4. 利用知识点的相同，培养学生的类比思维能力

复变函数在分析结构上几乎与微积分相同，复变函数中的函数的极限、函数的连续、对函数求导数、函数的微分、积分、级数等都是从高等数学实函数中模仿出来，逐渐发展的，所以概念具有很多的共性。在复变函数教学中将概念、定理、问题的处理同高等数学的概念、定理、处理问题方法进行类比，一方面可以帮助学生建构新的知识体系，另一方面也能使学生明白两者之间的不同，更为清晰的理解复变函数。比如复变初等函数是一元实变初等函数在复数范围内的推广，它既保持了后者的一些基本性质，又与后者有不同的特性。正是由于这些不同的特性，才使得复变函数在工程上有许多应用。复变函数的中数列和级数的收敛定义与实数域内数列和级数的收敛定义完全类似，幂级数的概念、运算和性质也与实数域内的类似。有些函数在实数域内进行泰勒级数展开时比较麻烦，但是在复数域内可以利用复数的性质，并运用一些技巧进行展开。比如：

例 5、将函数 $f(z)=\mathrm{e}^{z}\sin z$ 在 $z=0$ 处展开成幂级数

解：因为 $\mathrm{e}^{z}(\cos z+i\sin z)=\mathrm{e}^{z}\mathrm{e}^{iz}=\mathrm{e}^{(1+i)z}=\mathrm{e}^{\sqrt{2}z\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}i}}$ 展开成幂级数可得

$$1+\sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}i}z+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\left(\sqrt{2}\right)^{n}\mathrm{e}^{\frac{n\pi}{4}i}z^{n}}{n!},|z|<+\infty$$

同理，有 $\mathrm{e}^{z}(\cos z-i\sin z)=\mathrm{e}^{z}\mathrm{e}^{-iz}=\mathrm{e}^{(1-i)z}=\mathrm{e}^{\sqrt{2}z\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}i}}$

展开成幂级数可得

$$1+\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}i}z+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\left(\sqrt{2}\right)^{n}\mathrm{e}^{-\frac{n\pi}{4}i}z^{n}}{n!},|z|<+\infty$$

将上述两式相减除以 $2i$ 得，

$$f(z)=\mathrm{e}^{z}\sin z=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\sqrt{2}\right)^{n}\sin\frac{n\pi}{4}}{n!}z^{n},|z|<\infty$$

在解题中也可以直接展开再进行相乘，但是整理的时候比较麻烦，所以先把 $\mathrm{e}^{z}(\cos z+i\sin z)$ 化成 $\mathrm{e}^{\sqrt{2}z\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}i}}$ 再利用以前所学级数的展开对其进行类比展开，同样方法把 $\mathrm{e}^{z}(\cos z-i\sin z)$ 也进行展开，然后就可简单求得 $\mathrm{e}^{z}\sin z$ 的泰勒级数展开。著名日本物理学家、诺贝尔奖获得者汤川秀澍指出：“类比是一种创造性思维的形式”。在学习过程中，将复变函数新内容与学生已经熟悉的高等数学知识进行类比，不但易于接受、理解、掌握新知识，更重要的是：培养、锻炼了学生的类比思维能力，有利于开发学生的创造思维能力；并且学生们知识结构掌握的更加牢固，对两门课程的理解更加深入，有利于培养学生自主探索和创新的能力。

文章通过几个复变函数教学中的例子，说明复数的引入给解决数学问题提供了一种新的方式。复变函数的教学不应该只是知识的传授，还应该是数学思维的培养。在教学中通过恰当取例，对例题的讲解和分析，可培养学生发散性思维能力、逆向思维能力、类比思维能力。通过这三种思维能力的培养，让学生体会到复变函数的深刻思维和丰富的智慧，以培养学生的创新能力，从而达到素质教育的目的。

参考文献 (References)

[1] 丘维声. 数学的思维方式与创新[M]. 北京: 北京大学出版社, 2011.

[2] 西安交通大学高等数学教研室. 复变函数[M]. 北京: 高等教育出版社, 2012.
[3] 钟玉泉. 复变函数论[M]. 北京: 高等教育出版社, 2004.
[4] 梁昌洪. 复变函数札记[M]. 北京: 科学出版社, 2011.
[5] 郑建华. 复变函数论[M]. 北京: 清华大学出版社, 2005.
[6] 严镇军. 复变函数[M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2014.