A Hybrid BEM and FEM Numerical Approach for the Optimization of Metallic Shield in a High Frequency Magnetic Induction Tomography

Wuliang Yin^{1,2}, Qian Zhao¹

¹School of Electrical Engineering and Automation, Tianjin University, Tianjin ²School of Electrical and Electronic Engineering, University of Manchester, Manchester, UK Email: <u>shmilyshenzhen@163.com</u>

Received: Mar. 1st, 2014; revised: Apr. 2nd, 2014; accepted: Apr. 12th, 2014

Copyright © 2014 by authors and Hans Publishers Inc. This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY). <u>http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/</u> Open Access

Abstract

Magnetic induction tomography (MIT) is an imaging technique based on the measurement of the magnetic field perturbation due to eddy currents induced in conducting objects exposed to an external magnetic excitation field. When the driving frequency is significantly high relative to the frequency range that MIT normally operates, a highly conducting and permeable metallic target between the coils can be treated as perfect electric conductors (PEC). In this scenario, the penetration depth of the magnetic field into the target is extremely small and Boundary Element Method (BEM) based on integral formulations becomes an effective way to analyze this kind of scattering problems. However, BEM is most efficient when the scatter object is small rather than distributed. This is not suitable for the case when a surrounding shield of significant size and surface area is incorporated in the BEM model, which negates any benefits due to the BEM formulation. For this reason, we proposed a hybrid method in this paper, which combines the BEM and the Finite Element Method (FEM). FEM is used to calculate the shield effect while BEM is used to calculate the perturbation due to a small PEC inside the sensing space. In this way, we are able to compute sensitivity maps for MIT due to the effect of different shield configurations. An appropriate index related to the sensitivity maps was proposed to obtain the optimal parameters of the shield.

Keywords

Magnetic Induction Tomography, Perfect Electric Conductor, BEM-FEM, Sensitivity Map, Shield

利用BEM-FEM混合法对高频电磁层析成像 系统中金属屏蔽层的优化分析

尹武良^{1,2},赵 倩¹

¹天津大学电气与自动化工程学院,天津 ²曼彻斯特大学电气与电子工程学院,曼彻斯特,英国 Email: <u>shmilyshenzhen@163.com</u>

收稿日期: 2014年3月1日; 修回日期: 2014年4月2日; 录用日期: 2014年4月12日

摘要

电磁层析成像技术是一种基于电磁感应原理的成像技术。外加激励电源在导电物体中产生涡流,进而生成二次磁场,该磁场反过来会影响到原有磁场的分布。当激励频率非常高时,导电物体可以看作是完美导体。此时,磁场对物体的渗透深度非常浅,从而基于边界积分方程的边界元法便成为一种有效的分析方法。但是如果电磁层析成像系统中存在一个无法忽略尺寸的屏蔽层时,边界元法就失去了它的优势。针对这种情况,我们提出了一种边界元 - 有限元混合法。其中,有限元法用于计算屏蔽层对主磁场的影响,边界元法用于计算完美导体在被测区域内移动时接收线圈上的感应电压。通过这种方法,可以计算出在不同参数的屏蔽层的影响下,电磁层析成像系统的灵敏度分布,进而通过合适的灵敏度评估参数对屏蔽层进行优化设置。

关键词

电磁层析成像,完美导体,边界元-有限元法,灵敏度,屏蔽层

1. 引言

电磁层析成像技术(Magnetic induction tomography,简称 MIT)是一种非侵入非接触的成像技术,在工业和医学上都有很广泛的应用前景[1]-[8]。MIT 通过构建被测物体的电学参数来得到其分布。MIT 的正问题对于重建图像有非常重要的作用,因此引起了相关研究学者的关注[9]。对于一般的工业 MIT 系统,激励频率通常在1 kHz~100 kHz 之间。然而在医学中,由于被测溶液的电导率往往比较低,所以为了得到更为精确的图像,设计出了高频 MIT 系统,即激励频率 > MHz [1] [8]。

对于金属物体而言,当激励频率很高时,它可以看作是完美导体(Perfect electric conductor,简称 PEC)。 此时,入射磁场基本上全部被反射,磁场的渗透深度非常浅。有限元法(Finite elements method,简称 FEM) 就不再适合求解这类物体的电磁问题,因为需要大量的网格以取得高精度的结果,造成很重的计算负担。 相较之下,基于边界积分方程的边界元法(Boundary element method,简称 BEM)只需要在物体表面进行网 格划分,所以求解起来更快速简单[10]-[12]。迄今为止,已有不少学者对利用积分方程求解 MIT 的正问 题进行了研究[13]-[15]。

因为高频 MIT 系统中激励线圈会与被测物体间产生电学耦合现象,给求解过程造成一定的困难。对此,一个最常用的解决方法就是在传感器阵列的外面放置一个导电却不导磁的金属屏蔽层,通常选用铝

或铜[16]。由于屏蔽层的加入导致 BEM 的计算优势丧失,为了解决此问题,我们提出了一种边界元-有限 元混合方法。

这种方法的原创之处在于,作者并非自行推导有限元法理论,而是使用了一款有限元商业软件 MAXWELL ANSOFT 作为有限元求解的工具,与自行推导的边界元软件进行了接口,使得既利用了商业 软件处理一些复杂形状的能力,又综合了边界元的一些特性。是一种快捷简单的混合方法。这种方法有 别于传统意义上的边界元 - 有限元混合法,但仍然可以称作边界元 - 有限元混合法。

首先,我们通过 MAXWELL ANSOFT 求得主磁场的分布及其相关的标量磁势。进而在被测区域中利用物体表面离散点处的标量磁势构建积分方程,根据一定的边界条件,可以求出物体表面的标量磁势, 在此基础上,被测物体外面的磁场分布以及接收线圈上的感应电压就可以求出。当 PEC 在被测区域内移动时,可以计算出不同参数的屏蔽层对系统灵敏度分布的影响。通过对评估参数的分析,可以对屏蔽层进行优化处理。

2. PEC 问题的 MIT 模型

2.1. 边界积分方程

总磁场包括两部分:由激励线圈产生的主磁场以及由涡流产生的二次磁场

$$\boldsymbol{H}^{e} = \boldsymbol{H}^{pr} + \boldsymbol{H}^{sc} \tag{1}$$

麦克斯韦 - 安培方程

$$\nabla \times \boldsymbol{H}^{e} = \sigma^{e} \boldsymbol{E}^{e} + i \boldsymbol{\omega} \boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{E}^{e} \tag{2}$$

这里 H 和 E 分别代表磁场强度和电场强度。上标 e、pr 和 sc 分别表示与外部空间、主磁场和二次磁场相关的量。

针对一般的 MIT 系统模型,我们有以下假设:

1) 外部磁场是似稳的,故而可以忽略位移电流。

2) 物体外部的空间具有绝缘性,并且被测区域不包含附加电源。

基于以上假设,由公式(2)可得,外部磁场的旋度为 0,可用标量磁势 *φ*^e 来表示[12]。同时由散度定 理

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\mu} \boldsymbol{H} = \nabla \cdot \boldsymbol{\mu}^{e} \boldsymbol{H}^{e} = 0 \tag{3}$$

可知 φ^e 满足 Laplace 方程,解式(3)可得边界积分方程为:

$$c\varphi^{e}(\mathbf{r}) + \int_{\Gamma} \left[\varphi^{e}(\mathbf{r}')\frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} + g\frac{\partial\varphi^{e}(\mathbf{r}')}{\partial \mathbf{n}}\right] d\Gamma = \varphi^{pr}(\mathbf{r})$$
(4)

其中 $g(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$ 是 Laplace 方程的格林函数, φ^{pr} 是主磁场的标量磁势。 矢径 r 和 r'分别表示场点 和源点的位置。 Γ 表示物体的表面,其单位法向量记为 n。参数 c 的值决定于场点的位置。当场点位于光 滑表面 Γ 上时, c = 1/2;位于 Γ 内时, c = 1;在其他位置时, c = 0[13]。

由于 PEC 内部不存在磁场, 故根据物体表面处的边界条件可将式(4)简化为关于 φ^e 的积分方程:

$$c\varphi^{e}(\mathbf{r}) + \int_{\Gamma} \left[\varphi^{e}(\mathbf{r}')\frac{\partial g(\mathbf{r},\mathbf{r}')}{\partial \mathbf{n}}\right] d\Gamma = \varphi^{pr}(\mathbf{r})$$
(5)

在数值求解过程中,物体表面被划分为 NE 个三角形平面网格,第 e 个网格记为 Γ_e 。这时,式(5)便

可以转化为离散点处的积分方程组:

$$c\varphi^{e}\left(\boldsymbol{r}_{i}\right)+\sum_{e=1}^{NE}\int_{\Gamma_{e}}\left[\varphi^{e}\left(\boldsymbol{r}'\right)\frac{\partial g\left(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'\right)}{\partial\boldsymbol{n}}\right]\mathrm{d}\Gamma_{e}=\varphi^{pr}\left(\boldsymbol{r}_{i}\right)\quad i=1,2,\cdots,NP$$
(6)

其中 NP 为离散点的数目。对 $\varphi^{e}(\mathbf{r}')$ 进行线性插值得:

$$\varphi^{e}(\mathbf{r}') = \sum_{k=1}^{3} \varphi^{k} N_{k}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$$
(7)

其中N为插值函数, φ^k 为 Γ_e 上第k个点处的标量磁势。

为了将局部编号 k 转化为整体编号 j,我们引入了一个转换矩阵 $\beta = \left[\delta_{k_i}\right]_{\alpha \to \alpha}$:

$$\varphi^{k} = \sum_{j=1}^{NP} \delta_{kj} \varphi_{j} \tag{8}$$

其中 φ_i 是整体坐标系中第j个点处的标量磁势。故可得最终的积分方程为:

$$c\varphi^{e}\left(\boldsymbol{r}_{i}\right)+\sum_{j=1}^{NP}\left(\sum_{e=1}^{NE}\sum_{k=1}^{3}\left(\int_{\Gamma_{e}}\frac{\partial g\left(\boldsymbol{r}_{i},\boldsymbol{r}'\right)}{\partial n}N^{k}\mathrm{d}\Gamma_{e}\right)\delta_{kj}\right)\varphi_{j}=\varphi^{pr}\left(\boldsymbol{r}_{i}\right)$$
(9)

求解式(9)涉及到若干个复杂的积分,当网格数目很多时,会给计算机带来很大的负担。为了简化计算,我们在三角形网格中建立局部坐标系,将原有积分转换为新坐标系中的积分[17][18]。

2.2. ANSOFT 仿真

ANSOFT 是一个工程中用途较为广泛的电磁场仿真软件,通过使用精确的有限元法来求解电磁场分布。

2.2.1. 系统模型

图 1 描述了 MIT 的系统结构及金属屏蔽层的形状参数。激励线圈的半径为 0.1 m,中心位于点(0,0,0.6 m)处。系统中有 4 个接收线圈,半径均为 0.1 m,位置如图 1(c)所示。激励线圈和接收线圈组成传感器阵列。MIT 系统中激励电流的频率为 10 MHz,幅值为 1 A。保持金属屏蔽层和传感器的位置不变,在被测区域($Y \in [-0.3, 0.3], Z \in [-0.3, 0.3]$)内移动 PEC,可以得到物体表面离散点处的磁场分布。

屏蔽层的主要参数有:

- t: 厚度,变化范围是 0.05:0.05:0.25,其中中间的 0.05 表示变化间距,下同。
- h: 高度, 变化范围是 0.4:0.2:1.4。
- d: 内半径, 变化范围是 0.7:0.1:1.2。

对于每一种屏蔽层的参数配置,我们均会通过仿真计算出其对 MIT 系统灵敏度分布的影响。首先得 到 PEC 表面的离散点集,当 PEC 在被测区域内移动时,点集也会发生改变。将包含三个坐标值的点集输 入到 ANSOFT 软件中,利用场计算器可以求解出主磁场 *H*^{pr} 的分布。

2.2.2. 主磁场的标量磁势

一旦求出主磁场 H^{rr},则我们可以根据下面的步骤计算出标量磁势。

图 2 中的图形用来求解与主磁场相关的标量磁势,当激励线圈平行于 XY 平面时,选取球体表面的 一条曲线为例。在球面上共有 38 个离散点,除了上下顶点,还有 9×4 个点。其中 9 代表不同的 z 值,4 代表每个 z 值对应的四个点。图 2 中的曲线上共有 11 个点,从上到下依次排列。令 H_i^{pr} 和 φ_i^{pr} (*i* = 1,2,…,11) 分别代表第 *i* 点处的主磁场强度以及标量磁势。 利用 BEM-FEM 混合法对高频电磁层析成像系统中金属屏蔽层的优化分析



Figure 1. Geometrical configuration of MIT system and the shield. (a) Top view of the MIT system; (b) Side view of the shield; (c) ANSOFT model

图 1. MIT 系统结构及屏蔽层的形状。(a) MIT 系统的俯视图; (b) 屏蔽层的侧视图; (c) ANSOFT 模型



Figure 2. Object model for calculating the scalar magnetic potential 图 2. 求解标量磁势的物体模型

在这里,我们假设点6处的标量磁势为0,即 $\varphi_6^{pr}=0$ 。由于 $H^{pr}=-\nabla \varphi^{pr}$,故

$$\varphi_a - \varphi_b = \int_a^b \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{l} \tag{10}$$

其中 *l* 是从点 *a* 到点 *b* 的积分路径,假设点 *a* 到点 *b* 间的磁场是恒定的,并定义为 *a*, *b* 两点处磁场强度 的平均值,则可以得到

$$\varphi_a - \varphi_b = \left(\frac{H_a + H_b}{2}\right) \cdot L \tag{11}$$

由式(11),可以求出所有离散点处的 φ^{pr} 。进而通过式(9)求得 φ^{e} 。

2.3. 计算灵敏度分布

分别对式(9)的两端求梯度,可以得到物体外部的磁场分布:

$$\boldsymbol{H}^{e}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{H}^{pr} + \boldsymbol{H}^{sc} = \boldsymbol{H}^{pr}(\boldsymbol{r}) + \sum_{e=1}^{NE} \sum_{k=1}^{3} \left(\int_{\Gamma_{e}} \frac{\partial (\nabla g(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}'))}{\partial \boldsymbol{n}} N^{k} d\Gamma_{e} \right) \varphi^{k}$$
(12)

其中 $H^{\prime\prime}$ 为主磁场, φ^k 为物体表面第k点处的标量磁势。接收线圈上的感应电压为:

$$U = \oint_{l'} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l}' = -j\omega \iint_{s'} \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{s}' = -j\omega \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{B}_{i} \cdot \boldsymbol{n}_{0}' \boldsymbol{s}_{i}' = -2j\pi f \,\mu_{0} \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{H}_{i} \cdot \boldsymbol{n}_{0}' \boldsymbol{s}_{i}'$$
(13)

其中 *U* 为接收线圈上的感应电压。 *s'* 为接收线圈 *l'* 围成的平面, *n*₀ 为其单位法向量。将 *s'* 划分为 *N* 个 小网格,并将第 *i* 个小网格记为 *s*_i 。

灵敏度分布可以通过下式来求[15]:

$$S_{en} = -\frac{U^{e} - U^{pr}}{U^{pr}} = -\frac{U^{sc}}{U^{pr}}$$
(14)

其中 *S_{en}*为被测区域的灵敏度, *U^e*, *U^{se}*和*U^{pr}*分别为总电压、由二次磁场产生的电压以及由主磁场产生的电压。在被测区域内移动 PEC 可以得到不同的接收电压,进而通过式(14)求得 MIT 系统的灵敏度分布。

3. 仿真及结果分析

3.1. 仿真方法及优化参数

在这里,我们采用正交阵列法[19]来推导 MIT 系统中金属屏蔽层的最优设计。三个评估参数分别为: 平均灵敏度:

$$S_{i,j}^{avg} = \frac{1}{n} \sum_{k}^{n} S_{i,j}\left(k\right)$$

灵敏度的标准差:

$$S_{i,j}^{dev} = \left\{ \frac{1}{n-1} \sum_{k}^{n} \left[S_{i,j}(k) - S_{i,j}^{avg} \right]^{2} \right\}^{1/2}$$

灵敏度的相对标准差:

$$K_{i,j} = S_{i,j}^{dev} / S_{i,j}^{avg}$$

其中 $S_{i,j}(k)$ 为第e个网格处的灵敏度值。下标i和j分别为激励线圈和接收线圈的编号。一般情况下,K越小则表示灵敏度分布越均匀。

如果将四类典型灵敏度的相对标准差分别记为 $K_{1,2}$ 、 $K_{1,3}$ 、 $K_{1,4}$ 和 $K_{1,5}$,它们的和记为K:

$$K = K_{1,2} + K_{1,3} + K_{1,4} + K_{1,5}$$
(15)

其中下标 1 表示激励线圈, 2~5 表示四个不同位置的接收线圈。由于当 K_{1,2}、 K_{1,3}、 K_{1,4}和 K_{1,5}达到最小值时, t 往往不同, 故为了得到一个更全面的结果, 我们使用参数 K 进行分析。

3.2. 仿真步骤

仿真通过以下四步完成:

1) 厚度 t 的影响

首先将参数 $h \ n \ d$ 固定,在这里,选取 $h \ n \ d$ 为其变化范围的中间值,即 h = 0.9, d = 0.9。t 的变化 范围是 0.05:0.05:0.25,通过对比不同 t 时的 K 可以得到最优的 t,并记为 $t = t_{opt}$ 。同时选取 K 值较小时对 应的三个 t 值,分别记为 t_1 、 t_2 和 t_3 。仿真结果如图 3 所示。

通过图 3 可以看出,当 K_{1,2}、 K_{1,3}、 K_{1,4}和 K_{1,5}达到最小值时对应不同的 t 值,综合考虑下,它们之 和 K 达到最小值 10.9614 时, t = 0.2,故可知 t_{opt} = 0.2。

2) 高度 h 的影响

首先将参数 t 和 d 固定, $t = t_{opt}$, d = 0.9。h 的变化范围是 0.4:0.2:1.4。同(1)中的仿真原理类似,可得 $h_{opt} = 0.8$,同时,选取三个较优的 h 记为 h_1 、 h_2 和 h_3 。仿真结果如图 4 所示。

3) 内半径 d 的影响

首先将参数 t 和 h 固定, $t = t_{opt}$, $h = h_{opt}$ 。d 的变化范围是 0.7:0.1:1.2。由图 5 可以得到最优的 $d_{opt} = 0.8$,



同时选取较优的三个 d 记为 d1、 d2 和 d3。

4) 对三个较优 t、h 和 d 的正交测试

由图 3、图 4 和图 5 可以看出,参数 *t*、*h* 和 *d* 对灵敏度分布的作用是非线性的。为了得到最优的组合,我们采用正交测试法,具体的仿真步骤如表 1 所示。



图 5. 不同 d 值对应的 K

Table 1. Orthogonal test table for t, h and d

 表 1. 对 t、h和 d的正交测试

测计护旦	参数			V		
则以拥有	t		t	— K		
1	t_1	K_1	t_1	K_1		
2	t_1	K_2	t_1	K_2		
3	t_1	K_3	t_1	K_3		
4	t_2	K_4	t_2	K_4		
5	t_2	K_5	t_2	K_5		
6	t_2	K_6	t_2	K_6		
7	<i>t</i> ₃	K_7	t_3	K_7		
8	t_3	K_8	t_3	K_8		
9	t_3	K_9	t_3	K_9		
Sum_1	$K_1 + K_2 + K_3(t_1)$	$K_1 + K_2 + K_3(t_1)$	$K_1 + K_2 + K_3(t_1)$			
Sum_2	$K_4 + K_5 + K_6(t_2)$	$K_4 + K_5 + K_6(t_2)$	$K_4 + K_5 + K_6(t_2)$			
Sum_3	$K_7 + K_8 + K_9(t_3)$	$K_7 + K_8 + K_9(t_3)$	$K_7 + K_8 + K_9(t_3)$			
Avg_1		$Avg_1 = Sum_1/3$				
Avg_2	$Avg_2 = Sum_2/3$					
Avg_3	$Avg_3 = Sum_3/3$					
Rp	$Rp = max(Avg_1, Avg_2, Avg_3) - min(Avg_1, Avg_2, Avg_3)$					

通过步骤 1~3,我们可以得到较优的三个 t、h 和 d 分别记为: $t_1 = 0.1; t_2 = 0.15; t_3 = 0.2;$ $h_1 = 0.4; h_2 = 0.6; h_3 = 0.8;$ $d_1 = 0.7; d_2 = 0.8; d_3 = 0.9;$

正交测试的结果如表2所示。

参数 *Rp* 表示参数对结果的影响程度,由表 2 可以看出,屏蔽层高度 *h* 对 *K* 的影响最大,其次是厚度 *t*,内半径 *d* 的影响最小。

由图 6 可以看出,最优的参数组合是(t₃, h₂, d₃): t₃ = 0.2; h₂ = 0.6; d₃ = 0.9。在 9 种不同参数的屏蔽层

Table 2. Results of the orthogonal test 表 2. 正交测试的结果							
	参数						
测试编号	t	h	d	— K			
10.10.40.711.5310							
2	0.1	0.6	0.8	10.6553			
3	0.1	0.8	0.9	10.8796			
4	0.15	0.4	0.8	11.7378			
5	0.15	0.6	0.9	10.3300			
6	0.15	0.8	0.7	10.7337			
7	0.2	0.4	0.9	10.8216			
8	0.2	0.6	0.7	10.6103			
9	0.2	0.8	0.8	10.4218			
Sum_1	33.06592	34.0904	32.87506				
Sum_2	32.80153	31.59563	32.81479				
Sum_3	31.85371	32.03512	32.03130				
Avg_1	11.02197	11.36347	10.95835				
Avg_2	10.93384	10.53188	10.93826				
Avg_3	10.61790	10.67837	10.67710				
Rp	0.404069	0.831590	0.2812550				





Figure 6. Relationship between the parameters and the index 图 6. 屏蔽层参数与优化指标间的关系

存在的情况下, MIT 的灵敏度图如图 7 所示。





4. 结论

本文中提出了一种 BEM-FEM 混合法,该方法可以对高频 MIT 系统中金属屏蔽层参数进行有效优化。 为了设计出最优的屏蔽层,需要考虑很多因素,例如屏蔽层的形状和位置等。在 FEM 软件 MAXWELLANSOFT 的帮助下,我们首先求得了在不同参数屏蔽层存在时的主磁场分布,接着利用 BEM 和扰动法计算出 MIT 系统的灵敏度分布。通过对灵敏度图的分析,可以得到不同屏蔽层参数对灵敏度分 布的影响。选取合适的优化指标,就可以得到最优的屏蔽层参数,同时由仿真结果也可以看出,屏蔽层 的设计对系统的灵敏度分布有较大影响。

参考文献 (References)

- Watson, S., Williams, R.J., Gough, W.A. and Griffiths, H. (2008) A magnetic induction tomography system for samples with conductivities less than 10 S m⁻¹. *Measurement Science & Technology*, **19**, 045501.
- [2] Yin, W.L. and Peyton, A.J. (2004) Simultaneous measurements of thickness and distance of a thin metal plate with an electromagnetic sensor using a simplified model. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, **53**, 1335-1338.
- [3] Ma, L., Wei, H.Y. and Soleimani, M. (2013) Planar magnetic induction tomography for 3D near subsurface imaging. *Progress in Electromagnetics Research*, 138, 65-82.
- [4] Wei, H.Y. and Soleimani, M. (2012) Three-dimensional magnetic induction tomography imaging using a matrix free Krylov subspace inversion algorithm. *Progress in Electromagnetics Research*, **122**, 29-45.
- [5] Wei, H.Y. and Soleimani, M. (2012) Four dimensional reconstruction using magnetic induction tomography: Experimental study. *Progress in Electromagnetics Research*, **129**, 17-32.
- [6] Ma, X., Peyton, A.J., Higson, S.R., Lyons, A. and Dickinson, S.J. (2012) Hardware and software design for an electromagnetic induction tomography (EMT) system for high contrast metal process applications. *Measurement Science & Technology*, **17**, 111-118.
- [7] Griffiths, H. (2001) Magnetic induction tomography. Measurement Science & Technology, 12, 1126-1131.
- [8] Yin, W.L., Chen, G., Chen, L.J. and Wang, B. (2011) The design of a digital magnetic induction tomography (MIT) system for metallic object imaging based on half cycle demodulation. *Sensors Journal*, 11, 2233-2240.
- [9] Soleimani, M., Lionheart, W.R.B., Riedel, C.H. and Dossel, O. (2003) Forward problem in 3D magnetic induction tomography (MIT). 3rd World Congress on Industrial Process Tomography, Banff, 2-5 September 2003, 275-280.
- [10] Wu, K.L., Delisle, G.Y., Fang, D.G. and Lecours, M. (1990) Coupled finite element and boundary element methods in electromagnetic scattering. *Progress in Electromagnetics Research*, **2**, 113-132.
- [11] Liao, S. and Vernon, R.J. (2006) On the image approximation for electromagnetic wave propagation and PEC scattering in cylindrical harmonics. *Progress in Electromagnetics Research*, 66, 65-88.
- [12] Sun, K.L., O'Neill, K., Shubitidze, F., Haider, S.A. and Paulsen, K.D. (2002) Simulation of electromagnetic induction scattering from targets with negligible to moderate penetration by primary fields. *IEEE Transactions on Geoscience* and Remote Sensing, 40, 910-927.
- [13] Pham, M.H. and Peyton, A.J. (2008) A model for the forward problem in magnetic induction tomography using boundary integral equations. *IEEE Transactions on Magnetics*, **44**, 2262-2267.
- [14] Zhao, Q., Hao, J.N. and Yin, W.L. (2013) A simulation study of flaw detection for rail sections based on high frequency magnetic induction sensing using the boundary element method. *Progress in Electromagnetics Research*, 141, 309-325.
- [15] Zhao, Q., Chen, G., Hao, J.N., Xu, K. and Yin, W.L. (2013) Numerical approach for the sensitivity of a high-frequency magnetic induction tomography system based on boundary elements and perturbation method. *Measurement Science* and Technology, 24, 074004.
- [16] Peyton, A., Watson, S., Williams, R., Griffiths, H., and Gough, W. (2003) Characterizing the effects of the external electromagnetic and shield on a magnetic induction tomography sensor. 3rd World Congress on Industrial Process Tomography, Banff, 2-5 September 2003, 352-357.
- [17] Morrison, J.A. (1979) Integral equations for electromagnetic scattering by perfect conductors with two-dimensional geometry. *Bell System Technical Journal*, 58, 409-425.
- [18] Graglia, R.D. (1987) Static and dynamic potential integrals for linearly varying source distributions in two- and three-dimensional problems. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, **35**, 662-669.

[19] Lazic, L. and Mastorakis, N. (2008) Orthogonal array application for optimal combination of software defect detection techniques choices. WSEAS Transactions on Computers, 7, 1319-1333.