

智能四轮转向车辆车道保持控制研究

朱晨曦, 陈文静

北京工商大学, 北京
Email: 13584068821@163.com

收稿日期: 2021年3月8日; 录用日期: 2021年3月24日; 发布日期: 2021年3月31日

摘要

针对智能四轮转向车辆车道保持系统控制行驶时的稳定性需求, 提出了一种新的四轮主动转向车道保持控制策略。针对智能车辆车道保持和非线性车辆系统状态估计问题, 设计了利用车辆传感模块、曲率预瞄模块结合基于自适应MPC算法的车道保持控制算法, 对车辆的稳定性进行分析, 设置约束条件, 实现对参考车道的精确跟踪。设计权重系数后轮主动转向最优控制器, 实现四轮转向的最优控制, 在Matlab/Simulink中对控制算法的效果进行了验证, 仿真结果表明: 基于自适应MPC车道保持的最优控制四轮转向方法具有良好的横向控制稳定性和车道保持控制精度。

关键词

车道保持, 自适应模型预测, 最优控制, 操纵稳定性, 动力学仿真

Research on Lane Keeping Control of Intelligent Four Wheel Steering Vehicle

Chenxi Zhu, Wenjing Chen

School of Artificial Intelligence, Beijing Technology and Business University, Beijing
Email: 13584068821@163.com

Received: Mar. 8th, 2021; accepted: Mar. 24th, 2021; published: Mar. 31st, 2021

Abstract

Aiming at the stability requirements of intelligent four-wheel steering vehicle lane keeping system, a new four-wheel active steering lane keeping control strategy is proposed. Aiming at the problem of intelligent vehicle path tracking and nonlinear vehicle system state estimation, a lane keeping control algorithm based on vehicle sensor module, curvature preview module and adaptive MPC algorithm is designed to analyze the stability of vehicle and set constraints to achieve accurate

tracking of reference lane. The weight coefficient optimal controller of rear wheel steering is designed to realize the optimal control of four-wheel steering. The effect of the control algorithm is verified in Matlab/Simulink. The simulation results show that the optimal control of four-wheel steering based on adaptive MPC lane keeping has good lateral control stability and lane keeping control accuracy.

Keywords

Lane Keeping, Adaptive Model Prediction, Optimal Control, Handling Stability, Dynamic Simulation

Copyright © 2021 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

随着自动驾驶技术和电子控制技术的飞速发展, 智能车辆车道保持和自动驾驶的研究已成为一个重要的研究热点。在自主车辆的研究中, 操纵性和稳定性一直是两个关键的性能指标。智能车辆的车道保持系统是智能车辆重要的控制系统, 也是车辆主动安全控制研究的核心技术之一。车道保持控制不仅需要考虑车辆自身行驶时的车身状态, 也需要考虑车辆的位置信息道路信息等, 传统车道保持系统如采用 PID [1], 滑模控制[2]、线性二次最优(LQR) [3]、模型预测[4] [5] [6]等控制算法可以实现车道中心线的准确跟踪并实现车辆的稳定操控, 但仍不能满足更高的行驶的稳定需求。模型预测算法虽可以满足系统不确定关系下的递推约束问题, 但未知车辆的实时适配问题模型与保证满足约束条件, 一直没有彻底解决[7]。由于车辆内部模型参数恒定, 无法保证在车辆高速行驶时由于路面环境的影响或车辆状态参数的变化等强非线性特征往往导致车辆无法按预定车道行驶。四轮转向技术是提高汽车的操纵稳定性和安全性的直接、高效的主动安全底盘技术[8] [9] [10] [11]。四轮转向技术在低速时减小转弯半径, 提高机动性和高速行驶时转向响应小, 车辆的操纵稳定性相比传统两轮转向有明显改善[12]。

考虑智能四轮转向车辆在车道保持行驶时的稳定性, 设计了自适应 MPC 车道保持控制器, 为了实现车道中心线精确跟踪, 建立了车辆线性二自由度预测模型和控制器的传感模块动力学方程, 利用曲率计算车辆和期望车道中心线的侧向位移偏差, 控制车轮转角输入从而使侧向偏差趋向于 0。为提高线控主动四轮转向汽车的行驶稳定性, 通过控制前轮转角和线性二次最优反馈控制的后轮转角的大小和方向来对车辆的运动轨迹和行驶稳定性进行控制, 并在 Matlab/simulink 中对不同的四轮转向控制方法进行仿真对比, 验证本文设计的控制方法整体性能。

2. 车辆动力学模型

实际车辆的小侧向加速度和横摆角速度运动可用简化的线型二自由度车辆模型描述, 模型假设轮胎的侧向力处于线性工作区。四轮转向车辆车道保持控制系统控制稳定性取决于侧向和横摆运动, 建立的车辆单轨模型线性二自由度线型微分方程为[13]:

$$\begin{aligned} m(\dot{v}_y + v_x \omega) &= (C_{lf} + C_{lr})\beta + \frac{1}{v_y}(aC_{lf} - bC_{lr})\omega - C_{lf}\delta_f - C_{lr}\delta_r \\ I_z \dot{\omega} &= (aC_{lf} - bC_{lr})\beta + \frac{1}{v_x}(a^2C_{lf} + b^2C_{lr})\omega - aC_{lf}\delta_f + bC_{lr}\delta_r \end{aligned} \quad (1)$$

式中: m ——整车质量; v_x ——纵向速度; v_y ——侧向速度; C_{lf} 、 C_{lr} ——前、后车轴的侧偏刚度; δ_f 、 δ_r ——前轮转角; I_z ——绕 Z 轴横摆转动惯量; a 、 b ——前、后轴距; ω ——横摆角速度; β ——质心侧偏角。

3. 车道保持自适应 MPC 控制

智能车辆车道保持辅助系统配备有摄像头传感器,该系统将车道传感器数据输出的自适应 MPC 控制器中,控制车辆保持在车道中间即通过控制转向角减小侧向位移偏差 e_1 及横摆角偏差 e_2 , 同时通过摄像头预瞄的点测量当前车道的曲率和曲率导数, 根据当前时间和预瞄长度, 计算出未来曲率。车辆传感模块示意图, 如图(1)所示。

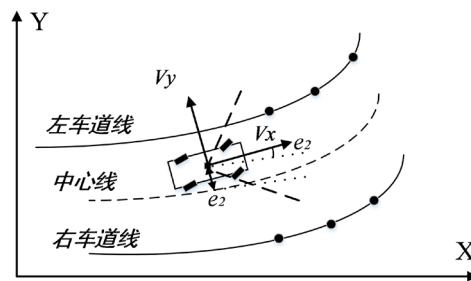


Figure 1. Diagram of lane keeping system sensor module
图 1. 车道保持系统传感模块示意图

如图 1 中所示, 车道保持系统传感模块输出横向偏差 e_1 和相对偏航角 e_2 , 动力学方程如下所示:

$$\dot{e}_1 = v_y + v_x e_2 \quad (2)$$

$$\dot{e}_2 = \omega - \rho v_x \quad (3)$$

其中:

$$\rho = \sqrt{\left(\frac{g(x) \cdot g(g(y))}{g(x)^2 + g(y)^2} \right)^3} \quad (4)$$

式(3)中: ρ 表示曲率; 实际横摆角速度 ω 可用三轴加速度传感器实际得到; 道路曲率预瞄模块检测车道曲率后以 1 秒提前时间输出预览曲率, 因此在模型预测控制器设置样本时间 T_s 为 0.1 s, 预测域设置 10 个步长进行输出。本文使用的曲率 ρ 基于双移线变换轨迹计算。

由非线性模型和复杂的控制约束对车辆车道保持控制求解计算量大, 不能满足实际工况中实时性要求, 采用简单化的线性模型预测控制器, 且考虑到传统 MPC 内部固定难以适应车辆不同工况下如高速行驶的转向工况的稳定性控制采用自适应 MPC 算法, 改善工作条件的强耦合高、非线性问题。设置输出变量: $X = [\dot{y} \ \dot{\omega} \ e_1 \ e_2]$, 输入变量 $U = [\delta \ \dot{\omega}_{des}]$ 结合式(1)~(3), 建立车辆连续时间预测模型如下:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{\omega} \\ e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{21} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & v_x \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{\omega} \\ e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & 0 \\ b_{21} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_f \\ \dot{\omega}_{des} \end{bmatrix} = A_f \begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{\omega} \\ e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} + B_f \begin{bmatrix} \delta_f \\ \dot{\omega}_{des} \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{\omega} \\ e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} + D \begin{bmatrix} \delta_f \\ \dot{\omega}_{des} \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\text{上式(6)中, } a_{11} = -\frac{2C_{lf} + 2C_{lr}}{mv_x}, \quad a_{12} = -v_x - \frac{2aC_{lf} - 2bC_{lr}}{mv_x}, \quad a_{21} = -\frac{2aC_{lf} + 2bC_{lr}}{I_z v_x}, \quad a_{22} = -\frac{2a^2 C_{lf} + 2b^2 C_{lr}}{I_z v_x},$$

$$b_{11} = \frac{2C_{lf}}{m}, \quad b_{21} = \frac{2aC_{lf}}{I_z}$$

由于 MPC 算法只适用于离散系统控制, 因此需要对上述连续系统方程进行求解离散化:

$$\begin{cases} x(k+1) = A_t x(k) + B_t v(k) + B_d d(k) \\ y(k) = Cx(k) + D_v v(k) + D_d d(k) \end{cases} \quad (7)$$

上式中, 变量 k 为采样时刻; $d(k), v(k)$ 分别为过程状态偏差和测量输出偏差, 其中:

$$\begin{aligned} A_t &= e^{AT_s} \\ B_t &= \int_0^{T_s} e^{At} dt B_u \end{aligned} \quad (8)$$

为引入积分, 并减少静差, 将参考车辆系统信息与当前系统信息作偏差采用控制增量取代控制量:

$$\begin{cases} x(k+1) = \bar{x} + A_d (x(k) - \bar{x}) + B_d (u(k) - \bar{u}) \\ y(k) = \bar{y} + C(x(k) - \bar{x}) + D(u(k) - \bar{u}) \end{cases} \quad (9)$$

由于车道保持行驶过程中, 应控制车辆在预定车道内行驶, 需要对侧向位移进行约束, 同时满足前文假设小角度下的车辆模型假设条件, 不超过车辆执行器的物理极限, 对车辆纵向加速度、前轮转角范围和变化率建立控制约束如下:

$$\begin{cases} \mathbf{u}_{\min}(t+k) \leq \mathbf{u}(t+k) \leq \mathbf{u}_{\max}(t+k), k=0,1,\dots,N_c-1 \\ \Delta \mathbf{u}_{\min}(t+k) \leq \Delta \mathbf{u}(t+k) \leq \Delta \mathbf{u}_{\max}(t+k), k=0,1,\dots,N_c-1 \end{cases} \quad (10)$$

车道保持横向控制目标是实时准确的跟踪确定的车道路径, 确保稳定性和舒适性。模型预测控制优化算法需要同时从侧向运动横向偏差最小和稳定安全考虑, 定义优化目标函数求解系统的控制增量, 目标函数引入松弛变量 ε 增强系统可行解, 选取的目标函数为:

$$J(k) = \sum_{i=1}^{N_p} \|\mathbf{y}(k+i|t) - \bar{\mathbf{y}}(k+i|t)\|_Q^2 + \sum_{i=1}^{N_c-1} \|\Delta \mathbf{u}(k+i|t)\|_R^2 + p\varepsilon^2 \quad (11)$$

式(10)中: N_p 和 N_c 分别为预测和控制时域; ε 为松弛因子; Q, R 分别为表征横向跟随误差、控制输出增量权重矩阵。目标函数的第一项表示输出和参考之间的误差, 它反映了控制目标的精确跟踪; 第二项表示控制增量的大小, 该值在控制目标上体现稳定性和舒适性; 第三项是松弛因子, 它保证了二次规划的最优控制量即前轮偏角。

将最优控制输入向量定义如下

$$\Delta U = [\Delta u_t, \Delta u_{t+1}, \dots, \Delta u_{t+N_c-1}, \varepsilon]^T \quad (12)$$

自适应 MPC 控制器计算得到的前轮转角 $u(k) = u(k-1) + \Delta u^*(k)$ 作用于车辆执行器, 直到产生在下一时刻最佳控制输入。

4. 基于线性二次最优理论的后轮转向控制

方程(1)中二自由度模型的状态空间矩阵形式如下[10]:

$$\dot{X} = A_r X_r + B_r U_r + C_r W_r \quad (13)$$

$$\text{其中: } A_r = \begin{bmatrix} \frac{C_{lf} + C_{lr}}{mv_x} & \frac{aC_{lf} - bC_{lr} - 1}{mv_x^2} \\ \frac{aC_{lf} - bC_{lr}}{I_z} & \frac{a^2C_{lf} + b^2C_{lr}}{I_z v_x} \end{bmatrix}, \quad B_r = \begin{bmatrix} -\frac{C_{lf}}{mv_x} \\ -\frac{aC_{lf}}{I_z} \end{bmatrix}, \quad C_r = \begin{bmatrix} -\frac{C_{lr}}{mv_x} \\ \frac{bC_{lr}}{I_z} \end{bmatrix}, \quad \dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix}, \quad X_r = \begin{bmatrix} \beta \\ \dot{\omega} \end{bmatrix},$$

$$U_r = [\delta_f], \quad W_r = [\delta_r].$$

线型二次规划最优控制(LQR)算法通过计算当前车辆状态 X 与理想状态量 X_d 之间的误差构造一个评价函数, 通过求解评价函数即后轮的最佳输出角, 得到最优控制律[14]。用于建立车辆理想参考模型的状态变量如下式(13)所示:

$$X_d = \begin{bmatrix} \beta_d \\ \dot{\omega}_d \end{bmatrix} = A_d \delta_f \quad (14)$$

$$A_d = \begin{bmatrix} G_{\beta_d} \\ G_{\dot{\omega}_d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ v_x \\ (a+b)(1+Kv_x^2) \end{bmatrix} \quad (15)$$

在公式(14)中, G_{β_d} 是侧滑角对前轮角输入的增益, $G_{\dot{\omega}_d}$ 是前轮转向车辆横摆角速度的增益, K 是表征车辆转向特性的稳定系数。

$$K = \frac{m}{a+b} \left(\frac{a}{C_{lr}} - \frac{b}{C_{lf}} \right) \quad (16)$$

$$e = X - X_d = \begin{bmatrix} e_\beta \\ e_{\dot{\omega}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta - \beta_d \\ \dot{\omega} - \dot{\omega}_d \end{bmatrix} \quad (17)$$

为了保证 LQR 控制器有最优解, 应设置控制器性能指标 J , 当 J 值最小时, 应得到最佳后轮转角 $U(t)$:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty [(X - X_d)^T Q (X - X_d) + U_0^T R U_0] dt \quad (18)$$

$$\text{其中: } Q = \begin{bmatrix} q_\beta & 0 \\ 0 & q_{\dot{\omega}} \end{bmatrix}, \quad R = [r_r]$$

式中, q_β 、 q_r 和 r_r 分别表示侧滑角、横摆角速度和后轮角度。通过大量的仿真实验, 本文确定 LQR 控制后轮主动转向的最优 q_β 、 $q_{\dot{\omega}}$ 、 r_r 值为 5、0、1。

采用变分法求解二次型最优控制问题[15], 最终得到最优控制律如下:

$$U^*(t) = -R^{-1} B^T P X + R^{-1} B^T (P B R^{-1} B^T - A^T)^{-1} (Q A_d - P C) \delta_f \quad (19)$$

状态反馈增益矩阵如下:

$$K_{FB} = R^{-1} B_0^T P \quad (20)$$

前馈增益矩阵:

$$K_{FF} = R^{-1} B^T (P B R^{-1} B^T - A^T)^{-1} (Q A_d - P C) \quad (21)$$

综上所述, 基于最优控制的后轮主动转向控制方程可以表示为:

$$\delta_r = K_{FB} X_e + K_{FF} \delta_f \quad (22)$$

为了比较分析不同四轮转向的控制效果, 验证本文提出的四轮转向控制方法优越的控制性能, 将后

轮转角比例于前轮转角控制, 控制表达式如(22)所示, 定义了四轮转向车辆的前轮转角和前轮转角, K_b 可以保证在稳定状态下侧滑角为 0。横摆角速度的反馈控制控制表达式为式(23)。将基于线性二次型最优控制理论控制的主动四轮转向与上述方法对比。

$$K_b = \frac{\delta_r}{\delta_f} = \frac{-b - mav_x^2 / [C_{cr}(a+b)]}{a - mbv_x^2 / [C_{cf}(a+b)]} \quad (23)$$

$$\delta_r = -\frac{C_{cf}}{C_{cr}} \delta_f + \left(\frac{aC_{cf} - bC_{cr}}{C_{cr}v_x} - \frac{mv_x}{C_{cr}} \right) \dot{\omega} \quad (24)$$

5. 仿真结果及分析

为验证本文设计的自适应 MPC 车道保持最优控制四轮转向控制系统的优越性, 利用 Matlab/Simulink 仿真, 采用常用的双移线工况检测车道保持控制精度和车辆稳定性, 对比在相同仿真条件下, 不同四轮转向控制方法的控制效果。设置出初始仿真车辆参数: 整车质量 $m = 1575 \text{ kg}$; 横摆转动惯量 $I_z = 2875 \text{ N/m}$; 前轴距中心位置 $lf = 1.2 \text{ m}$; 后轴距中心位置 $lr = 1.6 \text{ m}$; 前轴侧偏刚度 $C_{lf} = -19000 \text{ N/rad}$; 后轴侧偏刚度 $C_{lr} = -33000 \text{ N/rad}$; 初始车速为 15 m/s ; 设置自适应 MPC 控制器参数: 控制时域 N_c 为 2, 预测时域 N_p 为 10。设定前轮转角 δ_f 变化范围为 $-25^\circ \leq \delta_f \leq 25^\circ$, 变化量为 $-0.5 \leq \Delta\delta_f \leq 0.5$, 仿真结果如下:

由仿真结果图 2 和图 3 可以分析得出, 采用最优控制的四轮转向车道保持控制双移线路径曲率跟踪横向误差最小, 分别较前轮转向、比例前轮转向、横摆角速度反馈四轮转向三种转向控制方法减少了 0.8 m 、 0.46 m 、 0.7 m 横向偏移误差。由图 4 相对偏航角偏差对比可知, 基于最优控制的四轮转向控制的车道保持相对偏航角偏差仅为 0.9% , 较另外三种方法相对偏航角误差最小, 说明自适应 MPC 车道保持最优控制四轮控制效果满足车辆车道保持控制的道路中心线跟踪的精确性要求。

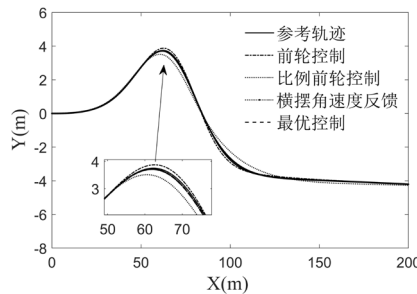


Figure 2. Lane keeping path

图 2. 车道保持行驶路径

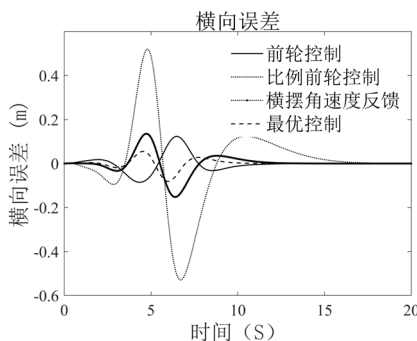


Figure 3. Lateral error of lane keeping

图 3. 车道保持横向误差

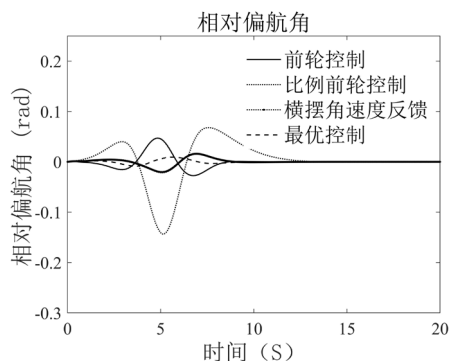


Figure 4. Lane Keeping relative yaw angle

图 4. 车道保持相对偏航角

由仿真结果图 5 和图 6 可知, 基于自适应 MPC 设计的车道保持控制器, 通过采集道路信息和对车道中心线曲率以及偏差计算, 考虑四轮转向车辆行驶稳定性需求, 结合单轨车辆模型设置模型约束产生最优的前轮转角, 图 6 显示了不同四轮转向控制方法后轮转角对前轮转角输入的响应输出。

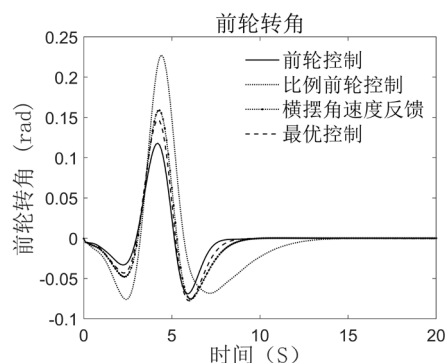


Figure 5. Front wheel angle input

图 5. 前轮转角输入

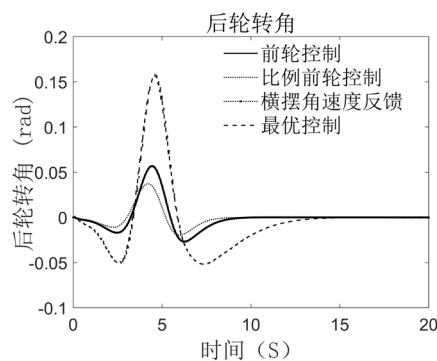


Figure 6. Rear wheel angle input

图 6. 后轮转角输入

由双移线工况下的车辆横摆角速度响应见图 7 可知, 最优控制四轮转向控制的车辆横摆角速度与前轮转向汽车横摆角速度最为接近, 说明该方法有很好的转向感与前轮转向车辆保持一致, 同时产生的质心侧偏角见图 8 最大也仅为 0.145 rad, 最优控制四轮转向控制方法在保证车辆转向能力的同时, 降低了质心侧偏角, 确保了车辆在转向过程中的稳定性。

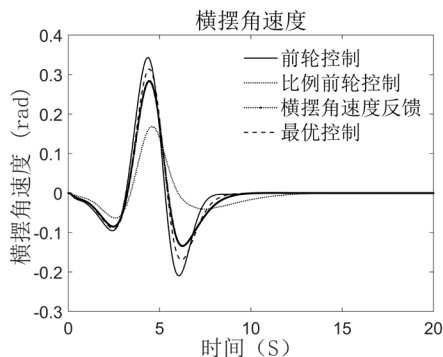


Figure 7. Yaw rate response

图 7. 横摆角速度响应

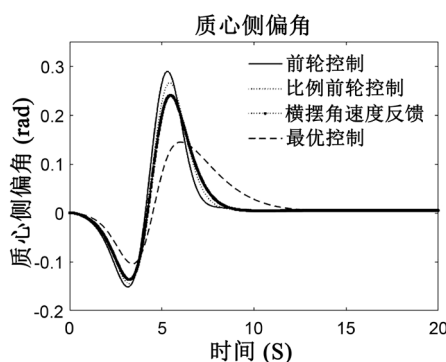


Figure 8. Sideslip angle response

图 8. 质心侧偏角响应

6. 结论

本文针对智能四轮转向车辆车道保持控制时转向稳定性问题,提出了一种基于自适应 MPC 道路车道保持最优控制四轮转向方案,自适应 MPC 控制器逐步优化求解最优参考前轮转角并通过最优控制器得到最优后轮转角作用于车辆。双移线路径跟踪仿真实验测试结果表明:自适应 MPC 满足高速转向工况强耦合、非线性状况下车道保持的准确性和稳定性;最优四轮转向控制相比前轮控制、比例前轮四轮转向控制、横摆角速度反馈四轮转向控制方法横向偏差最小,质心侧偏角最小且保证了横摆率,可以有效的提高车辆的操纵稳定性,减少车辆侧偏角避免产生侧翻等危险状况。

基金项目

国家自然科学基金(51805009),项目名称新型人工晶状体视觉仿生微机构设计方法及调焦机制研究。

参考文献

- [1] 张卫波, 张麒麟, 马宁, 吴乙万. 基于模糊 PID 的智能车辆路径跟踪控制技术研究[J]. 机械制造与自动化, 2018, 47(2): 167-170+174.
- [2] 罗鹰, 冒兴峰. 智能汽车换道避障路径规划与跟踪控制研究[J]. 机械设计与制造, 2019(7): 139-143.
- [3] 周东昇. 基于预瞄滚动时域 LQR 的无人驾驶汽车路径跟踪研究[D]: [硕士学位论文]. 重庆: 重庆交通大学, 2018.
- [4] 龚建伟, 姜岩. 无人驾驶车辆模型预测控制[M]. 北京: 北京理工大学出版社, 2014: 49.
- [5] Pereira, G.C., et al. (2017) Lateral Model Predictive Control for Over-Actuated Autonomous Vehicle. 2017 IEEE Intelligent Vehicles Symposium (IV), Los Angeles, 11-14 June 2017, 310-316. <https://doi.org/10.1109/IVS.2017.7995737>

-
- [6] 毛丁丁, 邓亚东. 四轮转向智能车辆轨迹跟踪及稳定控制研究[J]. 机械科学与技术, 2020, 39(7): 1094-1099.
- [7] 李刚, 宗长富, 陈国迎, 洪伟. 线控转向四轮独立驱动电动车的 AFS/DYC 集成控制[J]. 华南理工大学学报(自然科学版), 2012, 40(3): 150-155.
- [8] Hu, C., Wang, R., Yan, F., *et al.* (2015) Output Constraint Control on Path Following of Four-Wheel Independently Actuated Autonomous Ground Vehicles. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, **65**, 4033-4043. <https://doi.org/10.1109/TVT.2015.2472975>
- [9] Domina, Á. and Tihanyi, V. (2019) Comparison of Path Following Controllers for Autonomous Vehicles. 2019 *IEEE 17th World Symposium on Applied Machine Intelligence and Informatics (SAMII)*, Herlany, 24-26 January 2019, 147-152. <https://doi.org/10.1109/SAMI.2019.8782719>
- [10] 刘启佳. 四轮转向汽车侧向动力学最优控制和内外环联合控制研究[D]: [博士学位论文]. 北京: 北京理工大学, 2014.
- [11] 杜峰, 魏朗, 赵建有. 基于状态反馈的四轮转向汽车最优控制[J]. 长安大学学报(自然科学版), 2008, 28(4): 91-94.
- [12] 田承伟, 宗长富, 何磊, 于志新, 王祥. 汽车线控四轮转向控制策略[J]. 吉林大学学报(工学版), 2010, 40(5): 1177-1182.
- [13] Hang, P., Chen, X.B. and Luo, F.M. (2017) Path-Tracking Controller Design for a 4WIS and 4WID Electric Vehicle with Steer-by-Wire System. No. 2017-01-1954. SAE Technical Paper. <https://doi.org/10.4271/2017-01-1954>
- [14] Jiang, Z.Z. and Xiao, B.X. (2018) LQR Optimal Control Research for Four-Wheel Steering Forklift Based-On State Feedback. *Journal of Mechanical Science and Technology*, **32**, 2789-2801. <https://doi.org/10.1007/s12206-018-0536-7>
- [15] 谢宪毅, 金立生, 高琳琳, 夏海鹏. 基于变权重系数的 LQR 车辆后轮主动转向控制研究[J]. 浙江大学学报(工学版), 2018, 52(3): 446-452.