Pure Mathematics 理论数学, 2016, 6(3), 195-198
Published Online May 2016 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2016.63030

Hans汉斯

The Proceeding of Orthogonal and Transitivity

Chengli Cai, Peixin Chen

School of Science, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing Jiangsu
Email: caichenglia@163.com

Received: Apr. 30th, 2016; accepted: May 16th, 2016; published: May 19th, 2016

Abstract

In this paper, the proceeding of orthogonal and transitivity theorem are discussed. We find that the proceeding of orthogonal is a special case of the transitivity theorem.

Keywords

Gram-Schmidt Orthogonal, Transitivity, Inner Product

正交化过程与传递性

蔡成立，陈培鑫

南京理工大学理学院，江苏 南京
Email: caichenglia@163.com

收稿日期：2016年4月30日；录用日期：2016年5月16日；发布日期：2016年5月19日

摘 要

本文研究了正交化过程与传递性定理之间的关系，我们发现正交化过程可以看作传递性定理的特例。

文章引用：蔡成立，陈培鑫．正交化过程与传递性[J]．理论数学, 2016, 6(3): 195-198.
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2016.63030

关键词

格拉姆－施密特正交化，传递性，内积

1. 引言

Gram-Schmidt 正交化过程是线性代数中的重要内容，传递性定理是算子代数中的重要定理和基本工具。本文通过他们之间的关系，将二者统一地去看待：将正交化过程看作传递性定理的特例。传递性定理可以在一般 *Hilbert* 空间中给出非构造性证明。*Gram-Schmidt* 正交化过程可以在可分 *Hilbert* 空间中具体构造出来。为了统一起见，本文假定 *Hilbert* 空间都是可分的。

2. 预备知识

定义：A 是 $B(H)$ 的 C^*-子代数，称 A 是不可约的若 A 的不变子空间只有 0 和 H。

设 V 是复数域 C 上的 n 维线性空间，$\mathcal{T}$ 是 V 上的一个线性变换。任取 V 上的一组基 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$，则存在一个唯一的矩阵 T，使得：$\mathcal{T}\ (\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)T$。$V$ 上的线性变换全体记作 $L(V)$，则 $L(V)$ 关于加法，数乘和映射的乘法构成一个代数。

在线性代数中，我们有如下结论；

引理 2.1. [1]-[3] 设 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$ 是 V 的一组基，则对任意 V 中的任意 n 个向量 $\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_n$，存在唯一的 V 到 V 的线性变换 T，满足 $T(\alpha_i)=\beta_i\quad(i=1,2,\cdots,n)$。

在泛函分析中，我们有传递性定理；

引理 2.2. [4]-[7] 设 A 是 *Hilbert* 空间 H 上的不可约 C^*-代数，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是 H 中的线性无关向量组，$y_1,y_2,\cdots y_n$ 是 V 中的任意向量组，则存在算子 $T\in A$，使得 $T(x_i)=y_i$，$i=1,2,\cdots,n$。

3. 正交化过程与传递

下面的定理给出了可分 *Hilbert* 空间上可列基到另一组可列基的传递定理：

定理 3.1. 设 H 是可分的 *Hilbert* 空间，则对 H 的任意两组基 $\{x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots\}$ 和 $\{y_1,y_2,\cdots,y_n,\cdots\}$，存在线性算子 A，满足 $Ax_i=y_i$，$i=1,2,\cdots$

证明： 令 $span(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)=H$。则 H 关于 $\{x_i\}_{i=1}^{+\infty}$ 的 *Gram-Schmidt* 标准正交化基 $\{e_i\}_{i=1}^{+\infty}$。即对于

$$e_{i+1}=\frac{f_{i+1}}{\|f_{i+1}\|},\quad i=0,1,\cdots$$

这里 $f_{i+1}=x_{i+1}-\sum_{j=1}^{i}\frac{(x_{i+1},f_j)}{\|f_j\|^2}f_j$，$i=0,1,\cdots$，定义 H 上的算子 u：

$$u(x)=\sum_{j=1}^{+\infty}(y_j\otimes e_j)(x),$$

其中，$(y_j\otimes e_j)(x)=(x,e_j)y_j$，$j=1,2,\cdots$，$\forall x\in H$

由此可知，$u(e_i)=y_i$，$i=1,2,\cdots$

$$u\left(\frac{f_i}{\|f_i\|}\right)=y_i,\quad i=1,2,\cdots$$

记 $A(x_i)=u(e_i)$，$i=1,2,\cdots$，其中 $e_i=\dfrac{f_i}{\|f_i\|}$，则有 $A(x_i)=y_i$，$i=1,2,\cdots$。

说明： 在定理 3.1 的证明中，我们没能确定传递算子 A 的有界性。下面的推论表明：若把定理 3.1 中的基 $y_1,y_2,\cdots,y_n,\cdots$ 换成正交基 $\beta_1,\cdots,\beta_m,\cdots$，可使相应的传递算子 A 是可逆的，并且 *Gram-Schmidt* 正交化过程可以作为传递定理 3.1 的特例。

推论 3.2. 若 $\{\alpha_i\}_{i=1}^{\infty}$ 是可分 *Hilbert* 空间 H 上的一组基，则存在 H 上的可逆线性变换 T 和标准正交基 $\{\beta_i\}_{i=1}^{\infty}$，使得 $T(\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\cdots)=(\beta_1,\cdots,\beta_m,\cdots)$。

证明： 由定理 3.1 可知，存在有线性变换 T 和正交基 $\{\beta_i\}_{i=1}^{\infty}$，满足 $T(\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\cdots)=(\beta_1,\cdots,\beta_m,\cdots)$，同理，利用定理 3.1，我们可以给出线性变换 T 的逆变换 T^{-1} 存在。

下面在可分 *Hilbert* 空间中给出几个关于 *Gram-Schmidt* 正交化过程和传递性定理的例子：

命题 3.3. 设 $\{v_i\}_{i=1}^{+\infty}$ 是可列无穷空间的一组基，其中 $\{v_i\}_{i=1}^{+\infty}$，$v_1=(1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$，$v_2=(1,1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$，$\cdots$，$v_i=(1,\cdots,1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$，$\cdots$那么对于另一组标准正交基 $\{e_i\}_{i=1}^{+\infty}$，其中 $e_i=(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$，我们可以通过一个变换：

$$\begin{bmatrix}1&0&0&\cdots&0\\0&1&0&\cdots&0\\ \cdot&\cdot&\cdot&\cdots&\cdot\\ \cdot&\cdot&\cdot&\cdots&\cdot\\ \cdot&\cdot&\cdot&\cdots&0\\0&0&0&\cdots&1\end{bmatrix}_{i\times i}=\begin{bmatrix}1&1&1&\cdots&1\\0&1&1&\cdots&1\\0&0&1&\cdots&1\\ \cdot&\cdot&\cdot&\cdots&\cdot\\ \cdot&\cdot&\cdot&\cdots&1\\0&0&0&\cdots&1\end{bmatrix}_{i\times i}\begin{bmatrix}1&-1&0&\cdots&0\\0&1&-1&\cdots&0\\ \cdot&\cdot&1&\cdots&\cdot\\ \cdot&\cdot&\cdot&\cdots&\cdot\\ \cdot&\cdot&\cdot&\cdots&-1\\0&0&0&\cdots&1\end{bmatrix}_{i\times i}\quad(i=1,2,\cdots,+\infty),$$

把 v_i 传递到 e_i 上。

命题 3.4.

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}},\frac{1}{\sqrt{\pi/2}}\sin x,\frac{1}{\sqrt{\pi/2}}\sin nx\right\}_{n=0}^{+\infty}\tag{1}$$

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}},\frac{1}{\sqrt{\pi/2}}\cos x,\frac{1}{\sqrt{\pi/2}}\cos nx\right\}_{n=0}^{+\infty}\tag{2}$$

分别是 $L^2_{(0,\pi)}$ 空间的两组标准正交基，记 $x_0=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$，$x_n=\dfrac{1}{\sqrt{\pi/2}}\sin nx$，$y_0=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$，$y_n=\dfrac{1}{\sqrt{\pi/2}}\cos nx$，$\cdots$

则存在一个算子 $u(x)=\sum_{i=1}^{+\infty}(x,x_i)y_i$，使得 $u(x_i)=y_i,i=0,1,2,\cdots$。

推论 3.5. 设 V 是 n 维欧式空间，$u_1,u_2,\cdots,u_m$ 是 V 中 m $(m\le n)$ 个线性无关的向量，则在 V 中存在 m 个两两正交的向量 $v_1,v_2,\cdots,v_m$，使得 $v_1,v_2,\cdots,v_m$ 张成的 V 的子空间恰好为由 $u_1,u_2,\cdots,u_m$ 张成的 V 的子空间，即 $v_1,v_2,\cdots,v_m$ 是该子空间的一组正交基。

证明： 由推论 3.2 可得。

4. 总结

在本文中，*Gram-Schmidt* 正交化过程是代数中的结果，传递性定理是泛函分析中的重要结果，通过建立它们之间的关系，我们能够把正交化过程看成是传递性定理的一个特例。

参考文献 (References)

[1] 姚慕生，吴泉水. 高等代数学[M]. 上海: 复旦大学出版社, 2007.

[2] 王萼方，石生明. 高等代数[M]. 第3版. 北京: 高等教育出版社, 2013.

[3] 张恭庆，林源渠. 泛函分析讲义[M]. 北京: 北京大学出版社, 2006.

[4] Gerard, J.M. (1990) C^*-Algebras and Operator Theory. Harcourt Brace Jovanovich, Boston.

[5] Rachard, V.K. and John, R.R. (1983) Fundamentals of the Theory of Operator Algebras. A Subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, New York.

[6] Bratteli, O. and Robinson, D.W. (2002) Operators and Quantum Statistical Mechanics Springer. 2nd Edition, Springer-Verlage, Berlin, Heidelberg, New York.

[7] Takesaki, M. (2002) Theory of Operator Algebra I. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.