Pure Mathematics 理论数学, 2016, 6(3), 255-260
Published Online May 2016 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2016.63039

Hans汉斯

Dependence of Eigenvalues of Sturm-Liouville Problem Whose Weight Function $w \not\equiv 1$ on the Potential Function

Muyao Guo, Yunlan Gao*, Xin Zhao

College of Science, Inner Mongolia University of Technology, Hohhot Inner Mongolia
Email: *gaogaoyyyyy@sina.com

Received: May 8th, 2016; accepted: May 20th, 2016; published: May 27th, 2016

Abstract

In this paper, the eigenvalues of Sturm-Liouville problem whose weight function $w \not\equiv 1$ dependent on the potential function are studied, and the comparison theorem and domain monotonicity are used.

Keywords

Sturm-Liouville Problem, Potential Function, Eigenvalues

权函数$w \not\equiv 1$的Sturm-Liouville问题的特征值对势函数的依赖性

郭慕瑶，高云兰*，赵　馨

内蒙古工业大学理学院，内蒙古 呼和浩特
Email: *gaogaoyyyyy@sina.com

收稿日期：2016年5月8日；录用日期：2016年5月20日；发布日期：2016年5月27日

*通讯作者。

文章引用: 郭慕瑶, 高云兰, 赵馨. 权函数 $w \not\equiv 1$ 的Sturm-Liouville问题的特征值对势函数的依赖性[J]. 理论数学, 2016, 6(3): 255-260. http://dx.doi.org/10.12677/pm.2016.63039

摘　要

本文利用比较定理和定义区间的单调性证明了权函数 $w \neq 1$ 的Sturm-Liouville问题的特征值对势函数的依赖性。

关键词

Sturm-Liouville问题，势函数，特征值

1. 引言

经典的 Sturm-Liouville (S-L)问题起源于 19 世纪初 Fourier 对热传导问题的数学解决方法。20 世纪 80 年代以来曹之江，孙炯，刘景麟，尚在久，王万义等从不同角度对 S-L 问题进行了大量的研究。文献[1] [2] Dauge 和 Helffer 考虑的是二阶 S-L 方程

$$-\left(py'\right)' + qy = \lambda wy, p(t) \leq k, p, q, w \in C^{\infty}.$$

给出了 Neumann 特征值作为端点函数满足方程 $\lambda' = u^2\left(q - \lambda w\right)$，以及 Dirichlet 特征值作为端点函数满足方程 $\lambda' = -pu'^2$。证明了最小的 Neumann 特征值作为端点的函数是增加的，当区间长度趋向于零时极限存在。特别的，最小的 Dirichlet 特征值作为端点的函数是减小的，当区间长度趋向于零时，没有给出是否有极限。文献[3] [4]统一给出了特征值作为端点的函数满足的方程 $\lambda' = -p\left|u'\right|^2 + \left|u\right|^2\left(q - \lambda w\right)$，其中 u 是归一化的特征函数。证明了当区间长度趋近于零时，最小的 Dirichlet 特征值趋于无穷大。

本文的动机来源于文献[5] [6]的工作，他们研究了权函数 $w \equiv 1$ 的 S-L 方程

$$-y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x), x \in [0,1]$$

基于 Dirichlet 边界条件

$$y(0) = 0, y(1) = 0,$$

证明了以上 S-L 问题的特征值对势函数的依赖性。我们考虑的权函数 $w \neq 1$ 的 S-L 问题：

$$-y''(x) + q(x)y(x) = \lambda wy(x), x \in [0,1]$$

其中实值函数 $q(x) \in L^1[0,1], w(x) > 0$ 且 $w \neq 1, w(x) \in C^2[0,1]$。

2. 主要结论

我们考虑以下权函数 $w \neq 1$ 的 S-L 问题：

$$\begin{cases} -\varphi'' + V(x)\varphi = \lambda w(x)\varphi, x \in [0,1], \\ \varphi(0) = \varphi(1) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

其中

$$V(x) = \begin{cases} q(x), x \in [0, x_0), \\ q(x) + T, x \in [x_0, 1]. \end{cases}$$

$q(x)$是连续函数，x_0是$(0,1)$中任意固定一点。设$\beta_m(T)$是问题(1)在$[0,1]$上的第 m 个特征值$(m\in N)$。可以看出$\beta_m(T)$是T的函数。再设α_m是定义在区间$[0,x_0]$上 S-L 问题，即

$$\begin{cases}-\varphi''+V(x)\varphi=\lambda w(x)\varphi,x\in[0,x_0],\\ \varphi(0)=\varphi(x_0)=0.\end{cases} \tag{2}$$

的特征值。设$\varphi(x,\lambda,T)$为方程$-\varphi''+V(x)\varphi=\lambda w(x)\varphi,x\in[0,1]$满足初始条件$\varphi(0,\lambda)=0$，$\varphi'(0,\lambda)=1$的解。当$\lambda=\beta_m(T)$时，$\varphi(x,\lambda,T)$为上述 S-L 问题(1)的特征函数。这里$\varphi(x)$是归一化特征函数即满足$\langle w\varphi,\varphi\rangle=\int_0^1|\varphi|^2 w=1$。

引理 2.1 若$T\to\infty$，则对每一个整数m有$\varphi(x_0,\beta_m(T))_T\to 0$。

证明：令$\beta_m(T)=\mu$。因$\varphi(x,\mu)$是满足上述 S-L 方程的解，由文献[7]和文献[8]，$\varphi(x,\mu)$可表示为：

$$\begin{aligned}\varphi(x,\mu)=&\frac{\sin\left(\sqrt{\mu-T}\int_{x_0}^{x}\sqrt{w(t)}\mathrm{d}t\right)}{\sqrt{\mu-T}[w(0)]^{\frac14}[w(x)]^{\frac14}}\\&+\frac{1}{\sqrt{\mu-T}[w(x)]^{\frac14}}\int_{x_0}^{x}\frac{\sin\left(\sqrt{\mu-T}\left(\int_{x_0}^{x}\sqrt{w(t)}\mathrm{d}t-\int_{x_0}^{\xi}\sqrt{w(t)}\mathrm{d}t\right)\right)}{[w(x)]^{\frac14}}q(\xi)\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi\\&+O\left(\frac{1}{\sqrt{\mu-T}}\right)\end{aligned}$$

因此可以得到

$$\mu=\langle\mu w\varphi,\varphi\rangle=\left\langle\left(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+V\right)\varphi,\varphi\right\rangle=\langle-\varphi'',\varphi\rangle+\langle V\varphi,\varphi\rangle$$

$$\begin{aligned}\langle-\varphi'',\varphi\rangle&=-\int_0^1\varphi''\overline{\varphi}\mathrm{d}x=-\int_0^1\overline{\varphi}\mathrm{d}\varphi'=-\overline{\varphi}\,\varphi'\big|_0^1+\int_0^1\varphi'\overline{\varphi'}\mathrm{d}x\\&=-\overline{\varphi(1)}\varphi'(1)+\overline{\varphi(0)}\varphi'(0)+\langle\varphi',\varphi'\rangle\end{aligned}$$

其中λ为实特征值，有$\varphi(x,\overline{\lambda})=\overline{\varphi(x,\lambda)}$，则

$$\langle-\varphi'',\varphi\rangle=\langle\varphi',\varphi'\rangle$$

于是上式可得

$$\mu=\langle\varphi',\varphi'\rangle+\langle V\varphi,\varphi\rangle_I+\langle V\varphi,\varphi\rangle_{[0,1]/I}$$

其中$I=(x_0,1)$。故

$$\langle V\varphi,\varphi\rangle_I=\mu-\langle V\varphi,\varphi\rangle_{[0,1]/I}-\langle\varphi',\varphi'\rangle \tag{3}$$

又因为

$$\langle V\varphi,\varphi\rangle_I=\langle(q+T)\varphi,\varphi\rangle_I=\langle q\varphi,\varphi\rangle_I+\langle T\varphi,\varphi\rangle_I=T\|\varphi\|_I^2+\int_{x_0}^1|q||\varphi|^2\,\mathrm{d}x. \tag{4}$$

由(3)和(4)可知，

$$T\|\varphi\|_I^2+\int_{x_0}^1|q||\varphi|^2\,\mathrm{d}x=\mu-\langle V\varphi,\varphi\rangle_{[0,1]/I}-\langle\varphi',\varphi'\rangle. \tag{5}$$

下面分$T\to+\infty$和$T\to-\infty$两种情形进行证明：

情形 I 当$T\to+\infty$时，由$\langle\varphi',\varphi'\rangle\geq 0$和(5)式知：

$$\mu-\langle V\varphi,\varphi\rangle_{[0,1]/I}-\int_{x_0}^{1}|q||\varphi|^2\,\mathrm{d}x-T\|\varphi\|_I^2\geq 0,$$

变形得

$$\|\varphi\|_I^2\leq\frac{\mu-\langle V\varphi,\varphi\rangle_{[0,1]/I}-\int_{x_0}^{1}|q||\varphi|^2\,\mathrm{d}x}{T}\leq\frac{\mu-\int_{x_0}^{1}|q||\varphi|^2\,\mathrm{d}x}{T}\tag{6}$$

因为$\mu-\int_{x_0}^{1}|q||\varphi|^2\,\mathrm{d}x$的有界性，所以存在正数$K$，使得

$$-K\leq\mu-\int_{x_0}^{1}|q||\varphi|^2\,\mathrm{d}x\leq K\tag{7}$$

结合(6)和(7)式知：

$$\|\varphi\|_I^2\leq\frac{\mu-\int_{x_0}^{1}|q||\varphi|^2\,\mathrm{d}x}{T}\leq\frac{K}{T}$$

即当$T\to+\infty$，$\|\varphi\|_I^2\to 0$。

情形 II $T\to-\infty$，由$\langle\varphi',\varphi'\rangle=\int_{x_0}^{1}|\varphi'|^2\,\mathrm{d}x$的有界性，所以有正数$M$使得$\langle\varphi',\varphi'\rangle\leq M$，则

$$\mu-\langle V\varphi,\varphi\rangle_{[0,1]/I}-\int_{x_0}^{1}|q||\varphi|^2\,\mathrm{d}x-T\|\varphi\|_I^2\leq M,$$

$$\|\varphi\|_I^2\leq\frac{\mu-\langle V\varphi,\varphi\rangle_{[0,1]/I}-\int_{x_0}^{1}|q||\varphi|^2\,\mathrm{d}x-M}{T}\leq\frac{\mu-\int_{x_0}^{1}|q||\varphi|^2\,\mathrm{d}x-M}{T}\tag{8}$$

因为$\mu-\int_{x_0}^{1}|q||\varphi|^2\,\mathrm{d}x$的有界性，故存在正数$K_1$，有

$$-K_1\leq\mu-\int_{x_0}^{1}|q||\varphi|^2\,\mathrm{d}x-M\leq K_1$$

当$T\to-\infty$时有

$$\frac{K_1}{T}\leq\frac{\mu-\int_{x_0}^{1}|q||\varphi|^2\,\mathrm{d}x-M}{T}\leq\frac{-K_1}{T}\tag{9}$$

结合(8)和(9)式知：

$$\|\varphi\|_I^2\leq\frac{\mu-\int_{x_0}^{1}|q||\varphi|^2\,\mathrm{d}x-M}{T}\leq\frac{-K_1}{T}$$

即当$T\to-\infty$时，$\|\varphi\|_I^2\to 0$。

综合上述两种情形有：$T\to\infty$时，$\|\varphi\|_I^2\to 0$。由于$\|\varphi\|_I^2=\int_{x_0}^{1}|\varphi|^2\,\mathrm{d}x$，所以$\int_{x_0}^{1}|\varphi|^2\,\mathrm{d}x\to 0$。

可知$\varphi(x)$是区间$[x_0,1]$上每个点都收敛到 0 的连续函数，故$\varphi(x_0,\beta_m(T))_T\to 0$。

引理 2.2 当$T\to\infty$时，$\beta_m(T)\to\alpha_l$，其中$\beta_m(T)$为问题(1)的特征值，α_l为问题(2)的特征值。

证明：分两种情形讨论：

情形 I 当$T\to+\infty$时，由比较定理得$\beta_m(T)$是T的单调递增函数。由定义区间单调性有：$\beta_m(T)\leq\alpha_m$，因此当$T\to+\infty$时，$\beta_m(T)$有极限。由引理 2.1 可得：

$$\varphi(x_0,\beta_m(T))\to 0\ \ (T\to\infty)$$

因为$\varphi(x_0,t)$是t的连续函数，再由$\varphi(x,\mu)$表达式可知：$\varphi(x_0,t)=0$。则t是区间$[0,x_0]$上的特征值，且

$\beta_m(T)$ 趋近于其中某一个特征值，即存在 l 使得 $\lim\limits_{T\to+\infty}\beta_m(T)=\alpha_l$。

情形 II 同理可得 $\lim\limits_{T\to-\infty}\beta_m(T)=\alpha_l$。

引理 2.3 当 $T\to+\infty$ 时，$\beta_m(T)\to\alpha_m$；当 $T\to-\infty$ 时，$\beta_m(T)\to\alpha_{m-1}$。

证明：由引理 2.2 的结论：当 $T\to\infty$ 时，$\beta_m(T)\to\alpha_l$。下面证明 $l=m$ 即可。运用数学归纳法，分两种情形证明：

情形 I 设 $m=1$ 时，因为 $\beta_1(T)\le\alpha_1$ 且 α_1 无零点，故有 $\lim\limits_{T\to+\infty}\beta_1(T)=\alpha_1$。又设 $m<k$ 时有，有 $\lim\limits_{T\to+\infty}\beta_m(T)=\alpha_m$，因为 $\beta_{(k-1)}(T)\le\beta_k(T)\le\alpha_k$。

由 $\varphi(x,\beta_k(T))$ 的表达式可知 $\varphi(1,\beta_k(T))=0$，所以 $\varphi(x,\beta_k(T))$ 在 $[x_0,1)$ 无零点。由定义区间的单调性和零点定理(可参考文献[9])知：$\varphi(x,\beta_k(T))$ 比 $\varphi(x,\beta_{k-1}(T))$ 多一个零点。当 $T\to+\infty$ 时，$\varphi(x,\beta_k(T))$ 在 $[0,1)$ 中所以零点都在 $[0,x_0]$ 中。且当 $\varphi(x,\beta_k(T))$ 和 $\varphi(x,\beta_{k-1}(T))$ 穿过 x 轴时，因为 S-L 问题的特征函数无重根，故 $\varphi(x,\beta_k(T))$ 和 $\varphi(x,\beta_{k-1}(T))$ 有相反的符号。由引理 2.1 可知 $\varphi(x,t)$ 在每个零点处都与 x 轴相交，所以 β_{k-1} 和 β_k 在 $[0,x_0]$ 的某些特征值两侧。

则当 $T\to+\infty$ 时，$\beta_k(T)>\alpha_{k-1}$。根据单调有界原理得，$\lim\limits_{T\to+\infty}\beta_m(T)=\alpha_m$。

情形 II 同理可得当 $T\to-\infty$，$\beta_k(T)>\alpha_{k-1}$。根据单调有界原理得 $\lim\limits_{T\to-\infty}\beta_m(T)=\alpha_{m-1}$。

下面叙述并证明本文的结果如下：

定理 2.1 设 $\beta_m(T)$ 为问题(1)的特征值，α_m 为问题(2)的特征值，则 $\lim\limits_{T\to+\infty}\beta_m(T)=\alpha_m$；特别的，存在 T_0，使得 $T\ge T_0$ 时有 $\lim\limits_{T\ge T_0}\beta_m(T)=\alpha_m$。

证明：考虑方程 $\varphi(x_0,t)=h$，若 $h=0$，那么 t 是 $[0,x_0]$ 中的一个特征值。由文献[7]可知 $\varphi'(x,\mu)$ 的方程为

$$\begin{aligned}\varphi'(x,\mu)=&\frac{[w(x)]^{\frac14}}{[w(0)]^{\frac14}}\cos\left(\sqrt{\mu-T}\int_{x_0}^{x}\sqrt{w(t)}\mathrm{d}t\right)\\&-\frac14\frac{w'(x)}{\sqrt{\mu-T}[w(0)]^{\frac14}[w(x)]^{\frac54}}\sin\left(\sqrt{\mu-T}\int_{x_0}^{x}\sqrt{w(t)}\mathrm{d}t\right)\\&+[w(x)]^{\frac14}\int_{x_0}^{x}\frac{\cos(\sqrt{\mu-T}\left(\int_{x_0}^{x}\sqrt{w(t)}\mathrm{d}t-\int_{x_0}^{\xi}\sqrt{w(t)}\mathrm{d}t\right)}{[w(\xi)]^{\frac14}}q(\xi)\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi\\&+O\left(\frac{1}{\sqrt{\mu-T}}\right)\end{aligned}$$

故由 $\varphi'(x,\mu)$ 的方程可知，对 $[0,x_0]$ 中的任意特征值 α_m，有

$$(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)\varphi(x_0,\alpha_m)\ne0.$$

如果 $h\to0$，由隐函数定理：存在唯一的函数 $v(h)$ 使得 $v(0)=\alpha_m,\varphi(x_0,v(h))=h$。所以 $(\mathrm{d}/\mathrm{d}h)v(h)=((\mathrm{d}/\mathrm{d}t)\varphi(x_0,v))^{-1}$ 是有界的，存在正数 D，使得 $|v(h)-\alpha_m|\le Dh$。

由引理 2.3 可知，$\lim\limits_{T\to\infty}\beta_m(T)=\alpha_m$。因为 $\beta_m(T)$ 和 $v(h(T))$ 有相同的极限，且是方程 $\varphi_m(T)=\varphi(x_0,t)$ 的解。所以当 T 充分大时，有 $\beta_m(T)=v(h(T))$。

由引理 2.1 可知，当 $T\to\infty$ 时，存在 ε 使得 $|\varphi_m(T)|\le\varepsilon$，选取

$$T\ge T_0,|v(h)-\alpha_m|\le Dh\quad(\text{对所有 } |h|<\varepsilon)$$

因为 $\beta_m(T)=v(h_m(T))$。当 $T\ge T_0$，有 $\beta_m(T)-\alpha_m\le D\varepsilon$。所以 $\lim\limits_{T\ge T_0}\beta_m(T)=\alpha_m$。

类似的可以得到定理 2.2。

定理 2.2 设 $\beta_m(T)$ 为问题(1)的特征值，α_m 为问题(2)的特征值，则 $\lim\limits_{T\to-\infty}\beta_m(T)=\alpha_{m-1}$；特别的，存在 T_0，使得 $T\le T_0$ 时有 $\lim\limits_{T\le T_0}\beta_m(T)=\alpha_{m-1}$。

证明：按照定理 2.1 的证明可证得该定理。

参考文献 (References)

[1] Dauge, M. and Helffer, B. (1993) Eigenvalues Variation, I. Neumann Problem for Sturm-Liouville Operators. *Differential Equations*, **104**, 243-262. http://dx.doi.org/10.1006/jdeq.1993.1071

[2] Dauge, M. and Helffer, B. (1993) Eigenvalues Variation, II. Neumann Problem for Sturm-Liouville Operators. *Differential Equations*, **104**, 263-297. http://dx.doi.org/10.1006/jdeq.1993.1072

[3] Kong, Q, and Zettl, A. (1996) Dependence of Eigenvalues of Sturm-Liouville Problems on the Boundary. *Differential Equations*, **126**, 389-407. http://dx.doi.org/10.1006/jdeq.1996.0056

[4] Kong, Q. and Zettl, A. (1996) Eigenvalues of Regular Sturm-Liouville Problems. *Differential Equations*, **131**, 1-19. http://dx.doi.org/10.1006/jdeq.1996.0154

[5] Paul Phillips, D. (2005) A Partial Inverse Sturm-Liouville Problem: Matching a Step Function Potential to a Finite Eigenvalue List. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **312**, 248-260. http://dx.doi.org/10.1016/j.jmaa.2005.03.038

[6] 张婷婷, 魏广生. Sturm-Liouville 问题的特征值对势函数的依赖性[J]. 纯粹数学与应用数学, 2012, 28(2): 232-237.

[7] 王琳, 高云兰, 符权有. 权函数 $w\neq 1$ 时二阶右定 Sturm-Liouville 问题特征值的渐进式[J]. 内蒙古工业大学学报, 2013, 32(1): 1-5.

[8] Evitan, B.M. (1949) On the Determination of a Sturm-Liouville Equation by Two Spectra. *Nordisk Matematisk Tidskrift, B*, 25-30.

[9] Chavel, I. (1984) Eigenvalues in Riemannian Geometry. Academic Press, Orlando.