Pure Mathematics 理论数学, 2016, 6(3), 272-277
Published Online May 2016 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2016.63041

Lagrange Stability of Memristive Recurrent Neural Networks with Delays

Fangxia Yin, Xiaolin Li

Department of Mathematics, Shanghai University, Shanghai
Email: fangxiayin1223@163.com, xlli@shu.edu.cn

Received: May 7th, 2016; accepted: May 27th, 2016; published: May 30th, 2016

Abstract

In this paper, we study the globally exponential stability in a Lagrange sense for memristive recurrent neural networks with time-varying delays. By the results from the theories of nonsmooth analysis, differential inclusions and linear matrix inequalities [1] [2], a novel sufficient criterion in the form of linear matrix inequality is given to confirm the Lagrange stability of memristive recurrent neural networks. Meanwhile, the estimation of the globally exponentially attractive set is also given.

Keywords

Lagrange Stability, Nonsmooth Analysis, Linear Matrix Inequality (LMI)

时滞忆阻神经网络的Lagrange稳定性

般芳霞，李小林

上海大学数学系，上海
Email: fangxiayin1223@163.com, xlli@shu.edu.cn

收稿日期：2016年5月7日；录用日期：2016年5月27日；发布日期：2016年5月30日

摘　要

在本文中我们研究了时滞递归忆阻神经网络在Lagrange意义下的全局指数稳定性。通过运用非光滑分析

文章引用：般芳霞，李小林．时滞忆阻神经网络的 Lagrange 稳定性[J]．理论数学, 2016, 6(3): 272-277.
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2016.63041

方法、微分包含和不等式技巧[1] [2]，我们得到了新的忆阻神经网络Lagrange稳定的充分条件，同时，我们给出了全局吸引集的估计方法。

关键词

Lagrange稳定，非光滑分析，线性矩阵不等式

1. 引言及引理

自惠普实验室在 2008 年建立起忆阻器的数学模型，越来越多的学者对忆阻器进行了电路性质研究并搭建起模拟电路模型，众多研究者开始分析其在存储器、混沌动力学、人工神经网络、交叉阵列等的应用。其中忆阻器在神经网络的应用完全改变了传统的神经网络电路。由于忆阻器的无源性、低耗能、记忆特性以及纳米尺度，忆阻器将会带来人工智能领域，尤其是人工神经网络的理论和应用研究的突破性进展。因此，许多学者开始对忆阻神经网络进行研究。例如，在[3] [4]中作者研究了忆阻神经网络的指数性稳定，在[5]中作者研究了忆阻神经网络的 Lagrange 稳定性。基于忆阻神经网络的特点，并结合文献[1] [2] [6] [7]的理论知识，本文讨论了时滞忆阻神经网络的 Lagrange 稳定性。

引理 1：如果 x，y 是两个向量，那么 $2x^{\mathrm{T}}y \le x^{\mathrm{T}}Wx + y^{\mathrm{T}}W^{-1}y$。其中 W 是正定矩阵。

引理 2 [6]：$V\left(x(t)\right)$ 是一个径向无界的正定函数，假设存在在两个正数 α 和 β，使得：

$$D^{+}V\left(x(t)\right) \le -\beta V\left(x(t)\right) + \alpha, t \ge t_0$$

则当 $V\left(x(t)\right) \ge \dfrac{\alpha}{\beta}, t \ge t_0$，时，我们有

$$V\left(x(t)\right) - \frac{\alpha}{\beta} \le \left(V\left(x(t_0)\right) - \frac{\alpha}{\beta}\right)\mathrm{e}^{-\beta(t-t_0)}, t \ge t_0 \text{。}$$

2. 模型及主要结果

本文讨论的是时滞递归忆阻神经网络的形式如下：

$$\frac{\mathrm{d}x_i(t)}{\mathrm{d}t} = -d_i\left(x_i(t)\right)x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left(x_i(t)\right) f_j\left(x_j(t)\right) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\left(x_i(t)\right) f_j\left(x_j\left(t-\tau_j(t)\right)\right) + I_i(t), t \ge 0, i = 1,2,\cdots,n \quad (1)$$

根据忆阻器和电流-电压的特征，基于存在的结果[3]，我们可以得到：

$$d_i\left(x_i(t)\right) = \begin{cases} d_i^{*}, & \left|x_i(t)\right| \le T_i \\ d_i^{**} & \left|x_i(t)\right| > T_i \end{cases}, \quad a_{ij}\left(x_i(t)\right) = \begin{cases} a_{ij}^{*}, & \left|x_i(t)\right| \le T_i \\ a_{ij}^{**} & \left|x_i(t)\right| > T_i \end{cases}, \quad b_{ij}\left(x_i(t)\right) = \begin{cases} b_{ij}^{*}, & \left|x_i(t)\right| \le T_i \\ b_{ij}^{**} & \left|x_i(t)\right| > T_i \end{cases},$$

$$i, j = 1,2,\cdots,n$$

其中切换跳跃点 T_i, d_i^{*}, d_i^{**} 均大于零， $a_{ij}^{*}, a_{ij}^{**}, b_{ij}^{*}, b_{ij}^{**}$ 均为常数。

我们令

$$\overline{d_i} = \max\left\{d_i^{*}, d_i^{**}\right\}, \underline{d_i} = \min\left\{d_i^{*}, d_i^{**}\right\}, \overline{a_{ij}} = \max\left\{a_{ij}^{*}, a_{ij}^{**}\right\}, \underline{a_{ij}} = \min\left\{a_{ij}^{*}, a_{ij}^{**}\right\},$$

$$a_{ij} = \max\left\{\left|a_{ij}^{*}\right|, \left|a_{ij}^{**}\right|\right\}, \overline{b_{ij}} = \max\left\{b_{ij}^{*}, b_{ij}^{**}\right\}, \underline{b_{ij}} = \min\left\{b_{ij}^{*}, b_{ij}^{**}\right\}, b_{ij} = \max\left\{\left|b_{ij}^{*}\right|, \left|b_{ij}^{**}\right|\right\},$$

$$\text{矩阵 } \overline{A} = \left(\overline{a_{ij}}\right)_{n\times n}, \underline{A} = \left(\underline{a_{ij}}\right)_{n\times n}, \overline{B} = \left(\overline{b_{ij}}\right)_{n\times n}, \underline{B} = \left(\underline{b_{ij}}\right)_{n\times n}, A = \left(a_{ij}\right)_{n\times n}, B = \left(b_{ij}\right)_{n\times n}$$

$$\bar{D}=diag\left(\overline{d_1},\overline{d_2},\cdots,\overline{d_n}\right),\underline{D}=diag\left(\underline{d_1},\underline{d_2},\cdots,\underline{d_n}\right)。$$

根据[3] [4]，通过微分包含理论和集值映射[1] [2]，存在 $\tilde{D}(t)\in\left[\underline{D},\bar{D}\right]$，$\tilde{A}(t)\in\left[\underline{A},\bar{A}\right]$，$\tilde{B}(t)\in\left[\underline{B},\bar{B}\right]$ 使方程(1)可以化为下列形式：

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=-\tilde{D}(t)x(t)+\tilde{A}(t)f\left(x(t)\right)+\tilde{B}(t)f\left(x\left(t-\tau(t)\right)\right)+I(t),\ t\ge 0,i=1,2,\cdots,n \tag{2}$$

其中，

$$x(t)=\left(x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)\right)^{\mathrm{T}},f\left(x(t)\right)=\left(f_1\left(x_1(t)\right),f_2\left(x_2(t)\right),\cdots,f_n\left(x_n(t)\right)\right)^{\mathrm{T}},$$

$$\tau(t)=\left(\tau_1(t),\tau_2(t),\cdots,\tau_n(t)\right)^{\mathrm{T}},I(t)=\left(I_1(t),I_2(t),\cdots,I_n(t)\right)^{\mathrm{T}}.$$

本文中我们讨论的解都是 Filippov 意义下的[7]解，$Z>0,C_Z=\left\{\sigma\in C:\|\sigma\|\le Z\right\}$，$\Lambda$ 是非负函数 $K:C\to[0,\infty)$ 的集合，我们将初始条件为 $\phi(s)\in C,s\in[-\tau,0]$ 的系统(1)的解表示为 $x\left(t,\phi(s)\right)$。

假设 1：在本文中，我们假设系统(1)的激活函数 $f_i\left(x_i(t)\right)$ 满足下列条件：

① 存在 $j_i>0$，使得 $\left|f_i\left(x_i(t)\right)\right|\le j_i$

② 存在两个对角阵，$L^+=diag\left(L_1^+,L_2^+,\cdots,L_n^+\right),L^-=diag\left(L_1^-,L_2^-,\cdots,L_n^-\right)$ 使得 $\forall s_1,s_2\in R$，当 $s_1\ne s_2$ 时，$L_i^-\le\dfrac{f_i(s_1)-f_i(s_2)}{s_1-s_2}\le L_i^+,f_i(0)=0.$

定义 1：如果 $H>0$，对于所有的 $\phi\in C_H$ 和 $t\ge 0$，存在常量 $K=K(H)>0$ 使得 $\left|x(t;\phi)\right|<K$，那么我们可以称系统(1)的轨迹是在 Lagrange 意义下一致稳定的(或者一致有界)。

定义 2：如果存在正定和径向无界函数 $V\left(x(t)\right)$、正常量 α 和 β、正函数 $K\in\Lambda$，使得系统(1)的所有解 $x(t)=x(t;\phi)$，当 $V\left(x(t)\right)\ge\dfrac{\alpha}{\beta},t\ge t_0$，时，我们有

$$V\left(x(t)\right)-\beta\le K(\phi)\mathrm{e}^{-\alpha(t-t_0)},t\ge t_0。$$

那么我们称系统(1)的轨迹是关于 $V\left(x(t)\right)$ 全局指数吸引的，并且紧集 $\Omega=\left\{x\in R^n\mid V\left(x(t)\right)\le\beta\right\}$ 被称作系统(1)的吸引集。

定义 3：如果系统(1)既是全局指数吸引的，又在 Lagrange 意义下一致有界，那么它就是 Lagrange 意义全局指数稳定的。

定理 1：如果存在四个正定矩阵 $H,S,T,G\in R^{n\times n}$，两个正对角矩阵 $W,P\in R^{n\times n}$ 和一个正常数 ξ 使得下列矩阵不等式成立：

$$\begin{pmatrix} -2\underline{D}+BGB^{\mathrm{T}}+T-2L^-WL^+ & A+W\left|L^++L^-\right| & 0 \\ A^{\mathrm{T}}+\left|L^++L^-\right|W^{\mathrm{T}} & -2W & A^{\mathrm{T}}P^{\mathrm{T}} \\ 0 & PA & -2\xi K+PBHB^{\mathrm{T}}P^{\mathrm{T}}+PSP^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}<0$$

其中，$K=diag\left(\dfrac{p_1}{L_1},\dfrac{p_2}{L_2},\cdots,\dfrac{p_n}{L_n}\right)$，$L_i=L_i^+-L_i^-\ (i=1,2,\cdots,n)$，$P=diag\left(p_1,p_2,\cdots,p_n\right)$

则系统(1)是全局指数稳定的，并且存在 α 和 β 使得集合

$$\Omega=\left\{x\in R^n\mid x(t)^{\mathrm{T}}x(t)\le\frac{\alpha}{\beta}\right\}$$

是系统(1)的全局吸引集。

其中 $\alpha = J^{\mathrm{T}}\left(\left|G^{-1}\right|+\left|H^{-1}\right|\right)J + I^{\mathrm{T}}\left(\left|T^{-1}\right|+\left|S^{-1}\right|\right)I,\ \beta = \min\left\{\left(d-\xi\right),\eta\right\}, d = \min_{1\le i\le n}\left\{\underline{d_i}\right\}$

证明：构造一个正定函数

$$V\left(x(t)\right) = x(t)^{\mathrm{T}} x(t) + 2\sum_{j=1}^{n} p_i \int_0^{x_i(t)}\left(f_i(s) - L_i^- s\right)\mathrm{d}s$$

我们将它沿着(2)求 Dini 导数，我们可以得到：

$$\begin{aligned} D^+V\left(x(t)\right)\Big|_{(2)} \le & -2x(t)^{\mathrm{T}}\underline{D}x(t) + 2\left|x(t)\right|^{\mathrm{T}} A\left|f\left(x(t)\right)\right| + 2\left|x(t)\right|^{\mathrm{T}} B\left|f\left(x\left(t-\tau(t)\right)\right)\right| \\ & -2\left|f\left(x(t)\right)-L^- x(t)\right|^{\mathrm{T}} P\left(\underline{D}-\xi E\right)\left|x(t)\right| - 2\xi\left(f\left(x(t)\right)-L^- x(t)\right)^{\mathrm{T}} Px(t) \\ & +2\left|f\left(x(t)\right)-L^- x(t)\right|^{\mathrm{T}} PA\left|f\left(x(t)\right)\right| + 2\left|f\left(x(t)\right)-L^- x(t)\right|^{\mathrm{T}} PB\left|f\left(x\left(t-\tau(t)\right)\right)\right| \\ & +2\left|f\left(x(t)\right)-L^- x(t)\right|^{\mathrm{T}} P\left|I(t)\right| + 2\left|x(t)\right|^{\mathrm{T}}\left|I(t)\right| \end{aligned} \tag{3}$$

其中，$0 < \xi < d, d = \min_{1\le i\le n}\left\{\underline{d_i}\right\}$

由引理 1，我们可以得到，存在正定矩阵 T 、 H 、 S 和 G 使得下列不等式成立：

$$2\left|x(t)\right|^{\mathrm{T}} B\left|f\left(x\left(t-\tau(t)\right)\right)\right| \le \left|x(t)\right|^{\mathrm{T}} BGB^{\mathrm{T}}\left|x(t)\right| + J^{\mathrm{T}}\left|G^{-1}\right|J \tag{4}$$

$$2\left|x(t)\right|^{\mathrm{T}}\left|I(t)\right| \le \left|x(t)\right|^{\mathrm{T}} T\left|x(t)\right| + I^{T}\left|G^{-1}\right|I \tag{5}$$

$$\begin{aligned} & 2\left|f\left(x(t)\right)-L^- x(t)\right|^{\mathrm{T}} PB\left|f\left(x\left(t-\tau(t)\right)\right)\right| \\ & \le \left|f\left(x(t)\right)-L^- x(t)\right|^{\mathrm{T}} PBHB^{\mathrm{T}}P^{\mathrm{T}}\left|f\left(x(t)\right)-L^- x(t)\right| + J^{\mathrm{T}}\left|H^{-1}\right|J \end{aligned} \tag{6}$$

$$2\left|f\left(x(t)\right)-L^- x(t)\right|^{\mathrm{T}} P\left|I(t)\right| \le \left|f\left(x(t)\right)-L^- x(t)\right|^{\mathrm{T}} PSP^{\mathrm{T}}\left|f\left(x(t)\right)-L^- x(t)\right| + I^{\mathrm{T}}\left|S^{-1}\right|I \tag{7}$$

其中， $J = diag\left(j_1, j_2, \cdots, j_n\right), I = \left(\max\left|I_1(t)\right|, \max\left|I_2(t)\right|, \cdots, \max\left|I_n(t)\right|\right)^{\mathrm{T}}$ 。

由假设 1 我们可以得到下列不等式

$$-2\xi\left(f\left(x(t)\right)-L^- x(t)\right)^{\mathrm{T}} Px(t) \le -2\xi\left|f\left(x(t)\right)-L^- x(t)\right|^{\mathrm{T}} K\left|f\left(x(t)\right)-L^- x(t)\right| \tag{8}$$

其中， $K = diag\left(k_1, k_2, \cdots, k_n\right), k_i = \dfrac{p_i}{L_i}, L_i = L_i^+ - L_i^-$

我们由(3)到(8)可得

$$\begin{aligned} D^+V\left(x(t)\right) \le & -2\left|x(t)\right|^{\mathrm{T}}\underline{D}\left|x(t)\right| + 2\left|x(t)\right|^{\mathrm{T}} A\left|f\left(x(t)\right)\right| + \left|x(t)\right|^{\mathrm{T}} BGB^{\mathrm{T}}\left|x(t)\right| + \left|x(t)\right|^{\mathrm{T}} T\left|x(t)\right| \\ & -2\left(f\left(x(t)\right)-L^- x(t)\right)^{\mathrm{T}} P\left(\underline{D}-\xi E\right)x(t) + J^{\mathrm{T}}\left|G^{-1}\right|J + I^{\mathrm{T}}\left|S^{-1}\right|I \\ & -2\xi\left|f\left(x(t)\right)-L^- x(t)\right|^{\mathrm{T}} K\left|f\left(x(t)\right)-L^- x(t)\right| + J^{\mathrm{T}}\left|H^{-1}\right|J \\ & +2\left|f\left(x(t)\right)-L^- x(t)\right|^{\mathrm{T}} PA\left|f\left(x(t)\right)\right| + I^{\mathrm{T}}\left|T^{-1}\right|I \\ & +\left|f\left(x(t)\right)-L^- x(t)\right|^{\mathrm{T}} PBHB^{\mathrm{T}}P^{\mathrm{T}}\left|f\left(x(t)\right)-L^- x(t)\right| \\ & +\left|f\left(x(t)\right)-L^- x(t)\right|^{\mathrm{T}} PSP^{\mathrm{T}}\left|f\left(x(t)\right)-L^- x(t)\right| \end{aligned} \tag{9}$$

对于任意对角正定矩阵W，下列不等式是成立的

$$-2\left|f\left(x(t)\right)\right|^{\mathrm{T}}W\left|f\left(x(t)\right)\right|+2\left|x(t)\right|^{\mathrm{T}}W\left|L^{+}+L^{-}\right|\left|f\left(x(t)\right)\right|-2\left|x(t)\right|^{\mathrm{T}}L^{-}WL^{+}\left|x(t)\right|\geq 0 \tag{10}$$

由(9)和(10)我们可以得到

$$D^{+}V\left(x(t)\right)\leq -2\left(f\left(x(t)\right)-L^{-}x(t)\right)^{\mathrm{T}}P\left(\underline{D}-\xi E\right)x(t)+X(t)^{\mathrm{T}}\Omega X(t)+\alpha,$$

其中

$$X(t)=\left(\left|x(t)\right|,\left|f\left(x(t)\right)\right|,\left|f\left(x(t)\right)-L^{-}x(t)\right|\right)$$
$$\alpha=J^{\mathrm{T}}\left(\left|G^{-1}\right|+\left|H^{-1}\right|\right)J+I^{\mathrm{T}}\left(\left|T^{-1}\right|+\left|S^{-1}\right|\right)I$$

我们令$-\eta$为Ω的最大特征值，则

$$\begin{aligned}D^{+}V\left(x(t)\right)&\leq -2(d-\xi)\sum_{i=1}^{n}p_i\int_0^{x_i(t)}\left(f_i(s)-l_i^{-}(s)\right)\mathrm{d}s-\eta x(t)^{\mathrm{T}}x(t)+\alpha\\&\leq -\beta V\left(x(t)\right)+\alpha\end{aligned} \tag{11}$$

其中，$\beta=\min\left\{(d-\xi),\eta\right\}$

由不等式(11)，结合引理 2 和定义 3 我们可以得到忆阻神经网络(1)是在 Lagrange 意义下稳定的，且集合

$$\Omega=\left\{x\in R^n \,\middle|\, x(t)^{\mathrm{T}}x(t)\leq\frac{\alpha}{\beta}\right\}$$

是系统(1)的全局指数吸引集。证明完毕。

注：在这篇文章中，我们通过构造新的 Lyapunov 函数，研究了具有一般形式的激活函数的忆阻神经网络的 Lagrange 稳定性，在文献[5]中，忆阻神经网络要求激活函数是单调增的，而本文中讨论的激活函数不要求其单调，从而使得本文的结果可以运用到更多的模型中。

3. 结论

在本文中，我们通过构建 Lyapunov 函数和运用不等式技巧，我们讨论了一般形式的时滞递归忆阻神经网络的 Lagrange 稳定性，并且给出了吸引集的确定方法。一但吸引集确定，那么周期解和混沌吸引子的大概位置也就可以确定。我们知道，忆阻神经网络是状态依赖的非线性系统，所以本文的方法也可以运用到其他的非线性系统中，本文的结果丰富了已存在的结论，并且也可以扩展研究更复杂的情况。

致　谢

感谢国家自然科学基金资助项目 10902065 对本文的支持。

参考文献 (References)

[1] Clarke, F.H., Ledyaev, Y.S., Stem, R.J. and Wolenski, R.R. (1998) Nonsmooth Analysis and Control Theory. Springer, New York.

[2] Aubin, J.P. and Cellina, A. (1984) Differential Inclusions. Springer-Verlag, Berlin. http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-69512-4

[3] Zhang, G.D., Shen, Y. and Sun, J.W. (2012) Global Exponential Stability of a Class of Memristor-Based Recurrent Neural Networks with Time-Varying Delays. *Neurocomputing*, **97**, 149-154. http://dx.doi.org/10.1016/j.neucom.2012.05.002

[4] Wu, A.L. and Zeng, Z.G. (2012) Exponential Stabilization of Memristive Neural Networks with Time Delays. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, **23**, 1919-1929. http://dx.doi.org/10.1109/TNNLS.2012.2219554

[5] Zhang, G.D., Shen, Y. and Xu, C.J. (2015) Global Exponential Stability in a Lagrange Sense for Memristive Recurrent Neural Networks with Time-Varying Delays. *Neurocomputing*, **149**, 1330-1336. http://dx.doi.org/10.1016/j.neucom.2014.08.064

[6] Liao, X.X. (2000) Theory and Application of Stability for Dynamical System. National Defense Publishing House, Beijing.

[7] Filippov, A.F. (1988) Differential Equations with Discontinuous Right-Hand Sides. Kluwer, Dordrecht. http://dx.doi.org/10.1007/978-94-015-7793-9