Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(2), 255-260
Published Online February 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.112034

函数域上的一类均值问题

——除数和函数在无平方因子多项式集上的均值

宋宏硕

青岛大学数学与统计学院，山东 青岛
Email: songhongshuo1@163.com

收稿日期：2021年1月12日；录用日期：2021年2月15日；发布日期：2021年2月23日

摘　要

算数函数的均值问题一直是数论中比较重要的一类问题。本文主要在无平方因子多项式集上对除数和函数的均值进行估计，得到其均值的一个渐进公式。

关键词

除数和函数，均值，无平方因子多项式

A Problem about Average in the Function Fields

—The Average of Divisor Sum Function in the Set of Square-Free Polynomials

Hongshuo Song

School of Mathematics and Statistics, Qingdao University, Qingdao Shandong
Email: songhongshuo1@163.com

Received: Jan. 12th, 2021; accepted: Feb. 15th, 2021; published: Feb. 23rd, 2021

Abstract

The problems about the average of arithmetic functions are always important problems in number theory. In this paper, we mainly estimate the average of divisor sum function in the set of square-free polynomials and then obtain an asymptotic formula about its average.

文章引用: 宋宏硕. 函数域上的一类均值问题[J]. 理论数学, 2021, 11(2): 255-260.
DOI: 10.12677/pm.2021.112034

Keywords

Divisor Sum Function, Average, Square-Free Polynomials

1. 引言

算术函数的均值问题一直是数论中比较重要的问题，同时无平方因子数也是一类重要的研究对象。在文献[1]中，给出了无平方因子数的个数的计算公式；在文献[2]中对整数中的无平方因子数的分布进行了估计，本文将在函数域上估计除数和函数在无平方因子多项式集上的均值。

设 $\mathbb{F}_q$ 为有限域，具有 q 个元素，其中 $q=p^k$，p 为一个素数，$k\in\mathbb{N}$。我们以 $\mathcal{A}:=\mathbb{F}_q[T]$ 表示在 $\mathbb{F}_q$ 上的一元多项式环。当 $0\neq f\in\mathcal{A}$ 时，我们定义多项式 f 的范数 $|f|:=q^{\deg(f)}$。当 $f=0$ 时，令 $|f|=0$。

我们以 $\mathcal{M}$ 表示由 $\mathcal{A}$ 中所有首一多项式构成的集合，以 $\mathcal{M}_n$ 表示由 $\mathcal{A}$ 中所有 n 次首一多项式构成的集合。除此之外，我们以 $\mathcal{P}$ 表示由 $\mathcal{A}$ 中所有首一不可约多项式构成的集合。多项式环 $\mathcal{A}$ 是唯一分解环，其中的每一个元素 f 都有唯一分解：$f=\alpha P_1^{e_1}\cdots P_1^{e_r}$，其中 $\alpha\in\mathbb{F}_q$，$P_i\in\mathcal{P}$，$e_i\in\mathbb{N}$，$i=1,\cdots,r$。若 $e_1=\cdots=e_r=1$，我们称 f 是无平方因子多项式。

函数域 $\mathbb{F}_q(T)$ 上的除数和函数形式为：$\sigma(f)=\sum_{g|f}|g|$，其中 g 遍历 f 的首一因子。由文献[3]，命题 2.8 可知，$\sigma(f)$ 在 $\mathcal{M}_n$ 上的均值为

$$\sum_{f\in\mathcal{M}_n}\sigma(f)=q^{2n}\frac{1-q^{-n-1}}{1-q^{-1}}.$$

在这篇文章中，我们将除数和函数 $\sigma(f)$ 限制在由 n 次首一无平方因子多项式构成的集合上，然后得到其均值的估计如下。

定理 1.1 设 $n\geq 1$，对任意的 $\varepsilon>0$ 有

$$\sum_{\substack{f\in\mathcal{M}_n\\ f\text{无平方因子}}}\sigma(f)=q^{2n}+O_\varepsilon\left(q^{(3/2+\varepsilon)n}\right).$$

其中，q 为有限域 $\mathbb{F}_q$ 的元素个数，$\varepsilon>0$ 为一常数。

符号:

$\mathbb{F}_q$，具有 q 个元素的有限域；

$\mathcal{A}:=\mathbb{F}_q[T]$，有限域上的一元多项式环；

$\mathbb{F}_q[T]$，函数域；

$|f|$，多项式 f 的范数；

$\sigma(f)$，函数域上的除数和函数；

$\lambda(f)$，无平方因子多项式的特征函数；

$\zeta_{\mathcal{A}}(s)$，一元多项式环 $\mathcal{A}$ 上的 zeta 函数；

$H(x)=O(F(x))$，指存在常数 K 满足 $|H(x)|\leq K|F(x)|$，若为 O_ε，则表明常数 K 与 ε 有关；

s，若无特别指定，均指复数；

$\mathrm{Re}(s)$，复数 s 的实部。

2. 预备知识

2.1. 多项式环 $\mathcal{A}$ 上的 zeta 函数

根据文献[4]，多项式环 $\mathcal{A}$ 上的 zeta 函数定义如下

$$\zeta_{\mathcal{A}}(s) := \sum_{f\in\mathcal{M}} \frac{1}{|f|^s},\ \mathrm{Re}(s) > 1.$$

在 $\mathcal{A}$ 中，因为次数为n的首一多项式的个数为 q^n，所以

$$\zeta_{\mathcal{A}}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\deg(f)=n} \frac{1}{|f|^s} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{q^{n(s-1)}}.$$

于是我们有如下结果

$$\zeta_{\mathcal{A}}(s) = \frac{1}{1-q^{1-s}},\ \mathrm{Re}(s) > 1. \tag{2.1}$$

进一步令 $u = q^{-s}$，对 $\zeta_{\mathcal{A}}(s)$ 进行 Taylor 展开可得

$$\zeta_{\mathcal{A}}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} q^n u^n.$$

$\zeta_{\mathcal{A}}(s)$ 的 Euler 展开按如下形式给出

$$\zeta_{\mathcal{A}}(s) = \prod_{P} \left(1 - \frac{1}{|P|^s}\right)^{-1},\ \mathrm{Re}(s) > 1. \tag{2.2}$$

其中，P 遍历 $\mathcal{A}$ 上所有首一不可约多项式。

2.2. 所需引理

对于多项式环 $\mathcal{A}$ 中 n 次首一不可约多项式的个数，有如下结果。

引理 2.1 ([3]，定理 2.2)设 a_n 为多项式环 $\mathcal{A}$ 中 n 次首一不可约多项式的个数，则

$$a_n = \frac{q^n}{n} + O\left(\frac{q^{\frac{n}{2}}}{n}\right).$$

设

$$G(s) = \prod_{P} \left(1 + \frac{1}{|P|^s} - \frac{1}{|P|^{2s-1}} - \frac{1}{|P|^{2s-2}}\right),\ \mathrm{Re}(s) > \frac{3}{2}.$$

其中，P 遍历多项式环 $\mathcal{A}$ 上所有不可约多项式。对 $G(s)$ 我们有结果：

引理 2.2 对任意的 $\varepsilon > 0$，当 $\mathrm{Re}(s) \geq 3/2 + \varepsilon$ 时，存在一个常数 $C(\varepsilon)$ 使得

$$|G(s)| \leq C(\varepsilon).$$

证 按首一不可约多项式 P 的次数，将 $G(s)$ 的各项进行分类可得

$$G(s)=\prod_{n=1}^{\infty}\prod_{\deg(P)=n}\left(1+\frac{1}{|P|^{s}}-\frac{1}{|P|^{2s-1}}-\frac{1}{|P|^{2s-2}}\right)$$
$$=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{q^{ns}}-\frac{1}{q^{n(2s-1)}}-\frac{1}{q^{n(2s-2)}}\right)^{a_n}.$$

其中 a_n 为 n 次首一不可约多项式的个数。

由三角不等式有

$$\left|G(s)\right|\le\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{\left|q^{ns}\right|}+\frac{1}{\left|q^{n(2s-1)}\right|}+\frac{1}{\left|q^{n(2s-2)}\right|}\right)^{a_n}.$$

取 s 满足 $\mathrm{Re}(s)\ge 3/2+\varepsilon$，此时可得

$$\left|G(s)\right|\le\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{q^{n(3/2+\varepsilon)}}+\frac{1}{q^{n(2+2\varepsilon)}}+\frac{1}{q^{n(1+2\varepsilon)}}\right)^{a_n}.$$

因为 $q^{n(1+2\varepsilon)}\le q^{n(3/2+\varepsilon)}\le q^{n(2+2\varepsilon)}$，故有

$$\left|G(s)\right|\le\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{3}{q^{n(1+2\varepsilon)}}\right)^{a_n}.$$

由引理 2.1 可知，存在常数 c 使得 $a_n\le cq^n/n$，于是

$$\left|G(s)\right|\le\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{3}{q^{n(1+2\varepsilon)}}\right)^{cq^n/n}.$$

对 $\left(1+3/q^{n(1+2\varepsilon)}\right)^{cq^n/n}$ 进行 Taylor 展开可得

$$\left|G(s)\right|\le\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{3c}{nq^{2n\varepsilon}}+O\left(\frac{1}{q^{2n(1+2\varepsilon)}}\right)\right)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+O\left(\frac{1}{nq^{2n\varepsilon}}\right)\right).$$

因为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{nq^{2n\varepsilon}}\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{q^{2n\varepsilon}}=\frac{1}{q^{2\varepsilon}-1},$$

所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}1/nq^{2n\varepsilon}$ 是绝对收敛的，从而无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+O\left(1/nq^{2n\varepsilon}\right)\right)$ 也是收敛的(参考文献[4]，第二章，定理 1)。令

$$C(\varepsilon)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+O\left(\frac{1}{nq^{2n\varepsilon}}\right)\right).$$

引理证毕。

将无穷乘积 $G(s)$ 展开，然后将分母相同的项合并在一起，可得

$$G(s)=\sum_{f\in\mathcal{M}}\frac{h(f)}{|f|^{s}},\quad \mathrm{Re}(s)>\frac{3}{2}.$$

其中，表达式 $h(f)$ 是与 f 有关的一个式子。此时

$$G(s)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\deg(f)=n}\frac{h(f)}{|f|^s}=\sum_{n=0}^{\infty}u^n\sum_{\deg(f)=n}h(f),$$

其中 $u=q^{-s}$ 。

令

$$h_n=\sum_{\deg(f)=n}h(f).$$

记

$$G(s)=\tilde{G}(u)=\sum_{n=0}^{\infty}h_n u^n,\ |u|<q^{-3/2}. \tag{2.3}$$

关于 h_n 我们有如下结果：

引理 2.3 符号 h_n， $C(\varepsilon)$ 同上，

$$|h_n|\le C(\varepsilon)q^{(3/2+\varepsilon)n}.$$

证 $\tilde{G}(u)$ 是一个幂级数，根据 Laurent 定理(文献[5])，我们可以得到

$$h_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{\tilde{G}(u)}{u^{n+1}}\mathrm{d}u.$$

其中，闭曲线 $\Gamma:|u|=q^{-(3/2+\varepsilon)}$ 。对 h_n 取绝对值，可以得到

$$|h_n|\le\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}\frac{|\tilde{G}(u)|}{|u^{n+1}|}\mathrm{d}s=C(\varepsilon)q^{(3/2+\varepsilon)n}.$$

其中， $\mathrm{d}s=|\mathrm{d}u|=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}$ 。

引理证毕。

引理 2.4 符号 h_n， q 同上，有

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{h_k}{q^{2k}}=1+O_{\varepsilon}\left(q^{(-1/2+\varepsilon)n}\right). \tag{2.4}$$

证 注意到 $h_0=1$，则

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{h_k}{q^{2k}}=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{h_k}{q^{2k}}.$$

由三角不等式可得

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{h_k}{q^{2k}}\right|\le\sum_{k=1}^{n}\frac{|h_k|}{q^{2k}}.$$

根据引理 2.3， $|h_k|\le C(\varepsilon)q^{(3/2+\varepsilon)k}$ ，于是

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{h_k}{q^{2k}}\right|\le C(\varepsilon)\sum_{k=1}^{n}q^{(-1/2+\varepsilon)k}=\frac{C(\varepsilon)}{q^{1/2-\varepsilon}-1}\left(1-q^{(-1/2+\varepsilon)n}\right).$$

因此可得

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{h_k}{q^{2k}}=1+O_{\varepsilon}\left(q^{(-1/2+\varepsilon)n}\right).$$

引理证毕。

3. 定理 1.1 的证明

考虑 Dirichlet 级数如下

$$\sum_{f\in\mathcal{M}}\frac{\sigma(f)\lambda(f)}{|f|^s}.$$

一方面，令 $u=q^{-s}$，则

$$\sum_{f\in\mathcal{M}}\frac{\sigma(f)\lambda(f)}{|f|^s}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{f\in\mathcal{M}_n}\frac{\sigma(f)\lambda(f)}{|f|^s}=\sum_{n=0}^{\infty}u^n\sum_{f\in\mathcal{M}_n}\sigma(f)\lambda(f). \tag{3.1}$$

另一方面，因为除数和函数 $\sigma(f)$ 与特征函数 $\lambda(f)$ 都是可乘函数，所以可通过 Euler 展开得到

$$\begin{aligned}\sum_{f\in\mathcal{M}}\frac{\sigma(f)\lambda(f)}{|f|^s}&=\prod_P\left(1+\frac{\sigma(P)\lambda(P)}{|P|^s}+\frac{\sigma(P^2)\lambda(P^2)}{|P|^{2s}}+\cdots\right)\\&=\prod_P\left(1+\frac{1}{|P|^s}+\frac{1}{|P|^{s-1}}\right).\end{aligned}$$

其中，P 遍历 $\mathcal{A}$ 的所有首一不可约多项式。进一步计算

$$\begin{aligned}\sum_{f\in\mathcal{M}}\frac{\sigma(f)\lambda(f)}{|f|^s}&=\zeta_{\mathcal{A}}(s-1)\prod_P\left(1-\frac{1}{|P|^{s-1}}\right)\left(1+\frac{1}{|P|^s}+\frac{1}{|P|^{s-1}}\right)\\&=\zeta_{\mathcal{A}}(s-1)\prod_P\left(1+\frac{1}{|P|^s}-\frac{1}{|P|^{2s-1}}-\frac{1}{|P|^{2s-2}}\right)\\&=\zeta_{\mathcal{A}}(s-1)G(s).\end{aligned}$$

由式(2.1)和式(2.3)可得

$$\sum_{f\in\mathcal{M}}\frac{\sigma(f)\lambda(f)}{|f|^s}=\left(\sum_{m=0}^{\infty}q^{2m}u^m\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}h_ku^k\right)=\sum_{n=0}^{\infty}u^n\sum_{m+k=n}q^{2m}h_k. \tag{3.2}$$

比较式(3.1)与式(3.2)的系数可得

$$\sum_{f\in\mathcal{M}_n}\sigma(f)\lambda(f)=\sum_{m+k=n}q^{2m}h_k=q^{2n}\sum_{k=0}^{n}\frac{h_k}{q^{2k}}. \tag{3.3}$$

根据引理 2.4 可得

$$\sum_{\substack{f\in\mathcal{M}_n\\ f\text{无平方因子}}}\sigma(f)=\sum_{f\in\mathcal{M}_n}\sigma(f)\lambda(f)=q^{2n}+O_\varepsilon\left(q^{(3/2+\varepsilon)n}\right). \tag{3.3}$$

定理证毕。

参考文献

[1] Ivic, A. (2003) The Riemann Zeta-Function Theory and Application. New York: Courier Corporation, 32-33.

[2] 贾朝华. 无平方因子数的分布[J]. 北京大学学报(自然科学版), 1987(3): 21-27.

[3] Rosen, M. (2002) Number Theory in Function Fields. Springer-Verlag, New York, 1-19. https://doi.org/10.1007/978-1-4757-6046-0_1

[4] Karatsuba, A.A. (1993) Basic Number Theory. 2nd Edition, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New York, 27-28.

[5] 钟玉泉. 复变函数论[M]. 第三版. 北京: 高等教育出版社, 2004: 185-188.