

# 五阶偏微分方程的时间多区域时空谱方法

余荣玉

上海大学理学院, 上海  
Email: rongyu\_yu@163.com

收稿日期: 2021年5月1日; 录用日期: 2021年6月2日; 发布日期: 2021年6月10日

## 摘要

本文针对五阶偏微分方程提出了时间多区域时空谱方法. 该方法在空间方向上采用 Legendre-Petrov-Galerkin 方法, 在时间方向上采用多区域的 Legendre-tau 方法, 即: 把时间区间分成多个区域, 并在每个区域上采用 Legendre-tau 方法. 同时, 本文给出了该方法在线性问题上的误差分析, 选取适当的基函数使得系数矩阵稀疏, 对非线性方程中的非线性项采用在 Chebyshev-Gauss-Lobatto 点上的插值进行计算. 最后通过一些数值算例验证了算法的有效性.

## 关键词

五阶偏微分方程, 时空谱方法, Legendre-Petrov-Galerkin 方法, Legendre-Tau 方法, Chebyshev-Gauss-Lobatto 插值

# Multi-Domain Space-Time Spectral Method in Time for Solving Fifth-Order Partial Differential Equation

Rongyu Yu

College of Sciences, Shanghai University, Shanghai  
Email: rongyu\_yu@163.com

Received: May 1<sup>st</sup>, 2021; accepted: Jun. 2<sup>nd</sup>, 2021; published: Jun. 10<sup>th</sup>, 2021

---

## Abstract

In this paper, we propose the multi-domain space-time spectral method in time for the fifth-order partial differential equation. Legendre-Petrov-Galerkin method is applied in space direction, and multi-domain Legendre-tau method is applied in time direction, that is: dividing the time interval into multiple domains and Legendre-tau method is applied in each domain. At the same time, the error analysis of the method on linear problems is given in this paper, and we choose proper basis functions to make the coefficient matrix sparse, the nonlinear term for the nonlinear equation is computed by interpolation through Chebyshev-Gauss-Lobatto points. Finally, some numerical examples are given to verify the effectiveness of the algorithm.

## Keywords

Fifth-Order Partial Differential Equation, Space-Time Spectral Method, Legendre-Petrov-Galerkin Method, Legendre-Tau Method, Chebyshev-Gauss-Lobatto Interpolation

---

Copyright © 2021 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 前言

在实际问题中, 五阶偏微分方程有着广泛的应用, 这些方程出现在物理、力学、光学、热传导、振动、流体运动、控制以及生物系统等方面, 例如: 广义 Korteweg-de Vries(KdV) 方程 [1-8]. 在此之前, 国内外的一些科研工作者已经对五阶偏微分方程进行了大量的研究, 在 [9] 中 Xu 和 Shu 提出了 Local-Discontious-Galerkin(LDG) 方法来求解五阶波动方程, 并给出了该方法的稳定性分析以及通过一些数值算例说明了该方法的精度. 在 [10] 中 Cheng 和 Shu 提出了 Discontious-Galerkin(DG) 有限元方法来求解时间依赖的高阶方程, 同时给出了稳定性分析和误差估计; 数值结果表明, 当分片多项式的次数为  $k$  次时, 该格式的精度将会达到  $k+1$  阶. 在 [11] 中赵小红和李德生针对一类组合的五阶方程的柯西问题提出了一种显式的差分格式, 并且证明了该格式在满足一定条件时是稳定的.

将如下五阶偏微分方程作为模型方程进行研究:

$$\begin{cases} \partial_t U + \partial_x^5 U = f(x, t), & x \in I_x, t \in I_t; \\ U(\pm 1, t) = \partial_x U(\pm 1, t) = \partial_x^2 U(\pm 1, t) = 0, & t \in I_t; \\ U(x, -1) = U_0(x), & x \in I_x. \end{cases} \quad (1.1)$$

其中  $I_x = (-1, 1)$ ,  $I_t = (-1, 1)$ ,  $U = U(x, t)$ .

对于求解时间依赖的偏微分方程, 当方程的精确解在时间和空间方向上足够光滑时, 如果在时间方向上采用差分格式, 会容易导致谱精度丢失. 同时, 当时空多项式次数一定时, 采用时间单区域时空谱方法进行求解所得到的误差较大. 因此本文针对五阶偏微分方程提出了时间多区域时空谱方法, 以便减少误差.

本文给出了方程(1.1)的时间多区域时空谱格式. 空间方向上采用 Legendre-Petrov-Galerkin 方法, 时间方向上采用多区域的 Legendre-tau 方法, 即: 把时间区间分成多个区域, 并在每个区域上采用 Legendre-tau 方法.

本文接下来的内容包括: 1) 介绍了本文算法格式及理论分析中需要用到的一些符号记号和引理; 2) 给出了五阶偏微分方程关于时间多区域时空谱方法的全离散格式, 并描述了算法的实施; 3) 对五阶线性偏微分方程的全离散格式进行了误差分析; 4) 通过一些数值算例验证了本文算法的有效性.

## 2. 预备知识及记号

本节主要介绍本文算法格式及理论分析中需要用到的一些符号记号和引理.

### 2.1. 符号记号

令  $\Omega = I_t \otimes I_x$ . 设  $\sigma$  为非负整数, 记  $H^\sigma(I_x)$  为一般定义的 Sobolev 空间, 且范数与半范数分别记为  $\|\cdot\|_{I_x, \sigma}$  和  $|\cdot|_{I_x, \sigma}$ . 考虑到齐次边界条件, 对  $s \geq 1$ , 定义 [12]:

$$H_0^s(I_x) = \{v \in H^s(I_x) \mid v(\pm 1) = v'(\pm 1) = \dots = v^{(s-1)}(\pm 1) = 0\}.$$

空间方向的离散:

对于任意正整数  $N$ ,  $\mathbb{P}_N(I_x)$  表示区间  $I_x$  上所有次数不超过  $N$  次多项式构成的空间.

定义:

$$H_0^{2,3}(I_x) = \{v \in H_0^2(I_x) \cap H^3(I_x) \mid \partial_x^2(1) = 0\}, \quad H_0^{2,2}(I_x) = H_0^2(I_x) \cap H^2(I_x).$$

由于空间方向缺少对称性, 我们选取试探函数空间不同于检验函数空间:

$$V_N = \mathbb{P}_N(I_x) \cap H_0^{2,3}(I_x), \quad V_N^* = \mathbb{P}_N(I_x) \cap H_0^{2,2}(I_x).$$

设  $L_j(x)$  为次数不超过  $j$  的 Legendre 多项式, 对  $0 \leq j \leq N-5$ , 定义 [12]:

$$\gamma_j(x) = L_j(x) + a_1^{(j)}L_{j+1}(x) + a_2^{(j)}L_{j+2}(x) + a_3^{(j)}L_{j+3}(x) + a_4^{(j)}L_{j+4}(x) + a_5^{(j)}L_{j+5}(x),$$

其中

$$a_1^{(j)} = -\frac{2j+3}{2j+7}, a_2^{(j)} = -\frac{2(2j+5)}{2j+7}, a_3^{(j)} = \frac{2(2j+3)}{2j+9}, a_4^{(j)} = \frac{2j+3}{2j+7}, a_5^{(j)} = -\frac{(2j+3)(2j+5)}{(2j+7)(2j+9)}.$$

在这里我们令  $\gamma_j(x)$  为  $V_N$  上的基函数, 则对  $N \geq 5$ , 有

$$V_N = \text{span}\{\gamma_0(x), \gamma_1(x), \dots, \gamma_{N-5}(x)\}.$$

设  $L_n(x)$  为次数不超过  $n$  的 Legendre 多项式, 对  $0 \leq n \leq N-5$ , 定义:

$$\psi_n(x) = c_{n+1}(L_n(x) - L_{n+2}(x)) - c_{n+3}(L_{n+2}(x) - L_{n+4}(x)).$$

其中  $c_n = \frac{1}{2n+1}$ , 在这里我们令  $\psi_n(x)$  为  $V_{N-1}^*$  上的基函数, 则对  $N \geq 5$ , 有

$$V_{N-1}^* = \text{span}\{\psi_0(x), \psi_1(x), \dots, \psi_{N-5}(x)\}.$$

定义正交投影算子  $\mathcal{P}_N^{\alpha,\beta} : L_{\tilde{\omega}_{\alpha,\beta}}^2(I_x) \rightarrow \mathbb{P}_N(I_x)$ , 记  $P_N := \mathcal{P}_N^{0,0}$ , 且满足

$$(\mathcal{P}_N^{\alpha,\beta}u - u, v)_{I_x, \tilde{\omega}_{\alpha,\beta}} = 0, \quad \forall v \in \mathbb{P}_N(I_x).$$

为了避免在理论分析中出现五阶导数, 我们需要引入如下正交投影算子. 定义  $\mathbb{P}_N^* : H_0^{2,3} \rightarrow V_N$  满足

$$(\partial_x^3(\mathbb{P}_N^*u - u), \partial_x^2v)_{I_x} = 0, \quad \forall v \in V_{N-1}^*. \tag{2.1}$$

可知  $\mathbb{P}_N^*u$  存在且唯一, 使得

$$\mathbb{P}_N^*u = \tilde{\mathbb{P}}_N u := \bar{\partial}_x^{-3} P_{N-3} \partial_x^3 u, \tag{2.2}$$

其中  $\bar{\partial}_x^{-1}v(x) = -\int_x^1 v(y)dy$ ,  $\bar{\partial}_x^{-m}v(x) = (\bar{\partial}_x^{-1})^m$ .

由定义知,  $\tilde{\mathbb{P}}_N u(1) = \partial_x \tilde{\mathbb{P}}_N u(1) = \partial_x^2 \tilde{\mathbb{P}}_N u(1) = 0$ , 且有

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{P}}_N u(-1) &= -(x+1)\bar{\partial}_x^{-2} P_{N-3} \partial_x^3 u(x) \Big|_{-1}^1 + \int_{-1}^1 (x+1)\partial_x^2 u(x) dx \\ &= (x+1)\partial_x u(x) \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \partial_x u(x) dx = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_x \tilde{\mathbb{P}}_N u(-1) &= -(x+1)\bar{\partial}_x^{-1} P_{N-3} \partial_x^3 u(x) \Big|_{-1}^1 + \int_{-1}^1 (x+1)\partial_x^3 u(x) dx \\ &= (x+1)\partial_x^2 u(x) \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \partial_x^2 u(x) dx = 0. \end{aligned}$$

故  $\tilde{\mathbb{P}}_N u \in V_N$ , 且  $\forall v \in V_{N-1}^*$ , 有

$$(\partial_x^3(\tilde{\mathbb{P}}_N u - u), \partial_x^2 v)_{I_x} = (P_{N-3} \partial_x^3 u - \partial_x^3 u, \partial_x^2 v)_{I_x} = 0,$$

同时, 算子  $\mathbb{P}_N^*$  也满足

$$(\partial_x^2 \mathbb{P}_N^* u(x))(-1) = \bar{\partial}_x^{-1} P_{N-3} \partial_x^3 u(-1) = \partial_x^2 u(-1). \tag{2.3}$$

接下来说明时间方向的离散:

对于给定的正整数  $K$ , 我们将区间  $I_t = (-1, 1)$  分解成  $K$  个子区间:  $I_k = (b_{k-1}, b_k]$ ,  $h_k = b_k - b_{k-1}$ ,  $k = 1, 2, \dots, K$ ,

$$-1 = b_0 < b_1 < \dots < b_K = 1.$$

令  $\Omega = I_k \otimes I_x$ ,  $\omega_{\alpha, \beta}^k = (b_k - t)^\alpha (t - b_{k-1})^\beta |_{I_k}$ ,  $\tilde{\omega}_{\alpha, \beta} = (1 - x)^\alpha (1 + x)^\beta$  为  $\Omega_k$  上的权函数. 记  $(\cdot, \cdot)_{\Omega_k, \omega^k, \tilde{\omega}}$  和  $\|\cdot\|_{\Omega_k, \omega^k, \tilde{\omega}}$  分别为  $L_{\omega^k, \tilde{\omega}}^2(\Omega_k)$  的内积和范数. 设  $\varphi$  为非负整数, 记  $H^\varphi(I_k)$  为一般定义的 Sobolev 空间, 且范数与半范数分别记为  $\|\cdot\|_{I_k, \varphi}$  和  $|\cdot|_{I_k, \varphi}$ . 引入分片 Sobolev 空间:

$$\tilde{H}^\varphi(I_t) = \{v : v^k \equiv v|_{I_k} \in H^\varphi(I_k), 1 \leq k \leq K\},$$

其上的半范数定义为:

$$|v|_{\tilde{H}^\varphi(I_t)} = \left( \sum_{k=1}^K |v^k|_{\varphi, I_k}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

对于任意正整数  $M_k$ , 我们选取  $\tilde{H}^1(I_t)$  的一个子空间  $\mathcal{X}_K^{M_k}$  作为时间方向上的试探函数空间, 它由  $I_k$  上所有次数不超过  $M_k$  的分片多项式组成. 选取空间  $\mathcal{Y}_K^{M_k-1}$  作为时间方向上的检验函数空间, 即

$$\mathcal{X}_K^{M_k} = \mathcal{Y}_K^{M_k} \cap \tilde{H}^1(I_t), \mathcal{Y}_K^{M_k} = \{v : v|_{I_k} \in \mathbb{P}_{M_k}(I_k), 1 \leq k \leq K\},$$

其中  $\mathbb{P}_{M_k}(I_k)$  表示区间  $I_k$  上所有次数不超过  $M_k$  次多项式构成的空间.

同时引入仿射映射:

$$v(t) = \bar{v}(\bar{t}), t = \frac{1}{2}(h_k \bar{t} + b_{k-1} + b_k), t \in I_k, \bar{t} \in I_t.$$

由上式可知,  $\partial_t^s v = \left(\frac{h_k}{2}\right)^s \partial_{\bar{t}}^s v, s = 1, 2, \dots$

设  $L_i(\bar{t})$  为次数不超过  $i$  的 Legendre 多项式,  $c_i = \frac{1}{2i+1}$ , 对  $1 \leq k \leq K$ , 定义:

$$\begin{cases} \varphi_0^{M_k}(t) = c_0(L_0(\bar{t}) + L_1(\bar{t})); \\ \varphi_i^{M_k}(t) = c_i(L_{i-1}(\bar{t}) - L_{i+1}(\bar{t})), 1 \leq i \leq M_k - 1; \\ \tilde{\varphi}_i^{M_k}(t) = L_i(\bar{t}), 0 \leq i \leq M_k - 1. \end{cases}$$

对  $0 \leq i \leq M_k - 1$ , 分别令  $\varphi_i^{M_k}(t)$ ,  $\tilde{\varphi}_i^{M_k}(t)$  为  $\mathcal{X}_K^{M_k}$ ,  $\mathcal{Y}_K^{M_k-1}$  上的基函数, 则对  $M_k \geq 1$ ,  $1 \leq k \leq K$ , 有

$$\begin{cases} \mathcal{X}_K^{M_k} = \text{span}\{\varphi_0^{M_k}(t), \varphi_1^{M_k}(t), \dots, \varphi_{M_k-1}^{M_k}(t)\}, \\ \mathcal{Y}_K^{M_k-1} = \text{span}\{\tilde{\varphi}_0^{M_k}(t), \tilde{\varphi}_1^{M_k}(t), \dots, \tilde{\varphi}_{M_k-1}^{M_k}(t)\}. \end{cases}$$

定义正交投影算子  $P_{M_k}^L : L^2(I_k) \rightarrow \mathbb{P}_{M_k(I_k)}$  满足

$$(P_{M_k}^L u - u, v)_{I_k} = 0, \quad \forall v \in \mathbb{P}_{M_k(I_k)}.$$

定义投影算子  $\mathcal{P}_{M_k}^1 : H^1(I_k) \rightarrow \mathbb{P}_{M_k(I_k)}$  满足

$$\mathcal{P}_{M_k}^1 u = u(b_{k-1}) + \int_{b_{k-1}}^t P_{M_k-1}^L \partial_t u(s) ds.$$

定义投影算子  $\mathcal{P}_{\mathcal{M}}^1$ : 由  $\mathcal{P}_{1, M_k}^k : H^1(I_k) \rightarrow \mathbb{P}_{M_k(I_k)}$  生成, 记  $u(t)|_{I_k} = u^k(t)$ , 且满足

$$\mathcal{P}_{\mathcal{M}}^1 u(t)|_{I_k} \equiv \mathcal{P}_{1, M_k}^k u^k(t) := \mathcal{P}_{M_k}^1 \bar{u}^k(\bar{t}). \tag{2.4}$$

定义 Chebyshev-Gauss 插值算子:

$$\Pi_N^C : C(\bar{I}_x) \rightarrow \mathbb{P}_N,$$

$$\Pi_{N, M_k}^C : C(\bar{\Omega}_k) \rightarrow \mathbb{P}_N \times \mathbb{P}_{M_k},$$

满足

$$\Pi_N^C u(x_j) = u(x_j), \quad \Pi_{N, M_k}^C u(x_j, t_k) = u(x_j, t_k),$$

其中  $x_j$  为  $I_x$  上的 Chebyshev-Gauss-Lobatto(CGL) 点,  $(x_j, t_k)$  为  $\Omega_k$  上的 CGL 点.

记:

$$\mathcal{W}^k = V_N \otimes \mathcal{X}_K^{M_k},$$

$$\widetilde{\mathcal{W}}^k = V_{N-1}^* \otimes \mathcal{Y}_K^{M_k-1}.$$

## 2.2. 理论分析中需要用到的引理

**引理1.** (见 [13]: Lemma 3.3) 若  $u \in H^\varphi(I_k)$ , 且  $\varphi \geq 1$ , 对  $1 \leq k \leq K$ , 则有

$$\| \mathcal{P}_{1, M_k}^k u - u \|_{I_k} \leq Ch_k M_k^{-\varphi} \| \partial_t^\varphi u \|_{I_k, \omega_{\varphi-1, \varphi-1}^k}. \tag{2.5}$$

**引理2.** (见 [14]: Lemma 3.1) 若  $\alpha, \beta > -1$ , 且  $u \in H^r(I_x)$ , 则有

$$\begin{aligned} \|\partial_x^s(\mathcal{P}_N^{\alpha,\beta}u - u)\|_{I_x, \tilde{\omega}_{\alpha+s, \beta+s}} &\leq CN^{s-r} \|\partial_x^r(\mathcal{P}_N^{\alpha,\beta}u - u)\|_{I_x, \tilde{\omega}_{\alpha+r, \beta+r}} \\ &\leq CN^{s-r} \|\partial_x^r u\|_{I_x, \tilde{\omega}_{\alpha+r, \beta+r}}, \quad 0 \leq s \leq r. \end{aligned} \quad (2.6)$$

引理3. 若  $u \in H_0^{2,3}(I_x) \cap H^\sigma(I_x)$ , 且  $\sigma \geq 3$ , 则有

$$\|\partial_x^l(\mathbb{P}_N^*u - u)\|_{I_x, \tilde{\omega}_{l-3, l-3}} \leq CN^{l-\sigma} \|\partial_x^\sigma u\|_{I_x, \tilde{\omega}_{\sigma-3, \sigma-3}}, \quad 0 \leq l \leq 3. \quad (2.7)$$

证: (1) 当  $l = 3$  时, 记  $\mathbf{I}$  为恒等算子, 由(2.2)式和(2.6)式可以立即得到

$$\begin{aligned} &\|\partial_x^3(\mathbb{P}_N^*u - u)\|_{I_x} \\ &= \|(P_{N-3} - \mathbf{I})\partial_x^3 u\|_{I_x} \leq CN^{3-\sigma} \|\partial_x^{\sigma-3}(P_{N-3} - \mathbf{I})\partial_x^3 u\|_{I_x, \tilde{\omega}_{\sigma-3, \sigma-3}} \\ &= CN^{3-\sigma} \|\partial_x^\sigma(\mathbb{P}_N^* - \mathbf{I})u\|_{I_x, \tilde{\omega}_{\sigma-3, \sigma-3}} \leq CN^{3-\sigma} \|\partial_x^\sigma u\|_{I_x, \tilde{\omega}_{\sigma-3, \sigma-3}}. \end{aligned}$$

(2) 当  $l = 2$  时, 令  $g = \partial_x^2(\mathbb{P}_N^*u - u)$ , 由(2.3)式知, 故  $g \in H_0^1(I_x)$ . 通过下列 Hardy's 不等式 [14], 有  $g\tilde{\omega}_{-1, -1} \in L^2(I_x)$ :

$$\int_{-1}^1 v^2(x)(1-x^2)^{\beta-2} dx \leq \sup\left\{\frac{1}{1-\beta}, \frac{1}{(1-\beta)^2}\right\} \int_{-1}^1 (\partial_x v)^2(x)(1-x^2)^\beta dx,$$

其中  $v \in H_0^1(I_x)$ ,  $\beta < 1$ , 由(2.6)式得

$$\begin{aligned} \|\partial_x^2(\mathbb{P}_N^*u - u)\|_{\tilde{\omega}_{-1, -1}}^2 &= (\partial_x^2(\mathbb{P}_N^*u - u), \partial_x \bar{\partial}_x^{-1}[g\tilde{\omega}_{-1, -1}]) \\ &= |((P_{N-3} - \mathbf{I})\partial_x^3 u, \bar{\partial}_x^{-1}[g\tilde{\omega}_{-1, -1}])| \\ &= |((P_{N-3} - \mathbf{I})\partial_x^3 u, (\mathbf{I} - P_{N-3})\bar{\partial}_x^{-1}[g\tilde{\omega}_{-1, -1}])| \\ &\leq \|(P_{N-3} - \mathbf{I})\partial_x^3 u\| \|(\mathbf{I} - P_{N-3})\bar{\partial}_x^{-1}[g\tilde{\omega}_{-1, -1}]\| \\ &\leq CN^{3-\sigma} \|\partial_x^{\sigma-3}(P_{N-3} - \mathbf{I})\partial_x^3 u\|_{\tilde{\omega}_{\sigma-3, \sigma-3}} N^{-1} \|g\tilde{\omega}_{-1, -1}\|_{\tilde{\omega}_{1, 1}} \\ &= CN^{2-\sigma} \|\partial_x^\sigma(\mathbb{P}_N^* - \mathbf{I})u\|_{\tilde{\omega}_{\sigma-3, \sigma-3}} \|g\|_{\tilde{\omega}_{-1, -1}} \\ &\leq CN^{2-\sigma} \|\partial_x^\sigma u\|_{\tilde{\omega}_{\sigma-3, \sigma-3}} \|g\|_{\tilde{\omega}_{-1, -1}}, \end{aligned}$$

因此, 当  $l = 2$  时, (2.7)式也成立.

(3) 当  $l = 1$  时, 同理可令  $g = \partial_x(\mathbb{P}_N^*u - u)$ , 故  $g \in H_0^2(I_x)$ . 再次运用上述 Hardy's 不等式, 有  $g\tilde{\omega}_{-2, -2} \in L^2(I_x)$ , 由(2.6)式得

$$\begin{aligned}
 \|\partial_x(\mathbb{P}_N^*u - u)\|_{\tilde{\omega}_{-2,-2}}^2 &= (\partial_x(\mathbb{P}_N^*u - u), \partial_x^2 \bar{\partial}_x^{-2}[g\tilde{\omega}_{-2,-2}]) \\
 &= |((P_{N-3} - \mathbf{I})\partial_x^3 u, \bar{\partial}_x^{-2}[g\tilde{\omega}_{-2,-2}])| \\
 &= |((P_{N-3} - \mathbf{I})\partial_x^3 u, (\mathbf{I} - P_{N-3})\bar{\partial}_x^{-2}[g\tilde{\omega}_{-2,-2}])| \\
 &\leq \| (P_{N-3} - \mathbf{I})\partial_x^3 u \| \| (\mathbf{I} - P_{N-3})\bar{\partial}_x^{-2}[g\tilde{\omega}_{-2,-2}] \| \\
 &\leq CN^{3-\sigma} \| \partial_x^{\sigma-3}(P_{N-3} - \mathbf{I})\partial_x^3 u \|_{\tilde{\omega}_{\sigma-3,\sigma-3}} N^{-2} \| g\tilde{\omega}_{-2,-2} \|_{\tilde{\omega}_{2,2}} \\
 &= CN^{1-\sigma} \| \partial_x^\sigma(\mathbb{P}_N^* - \mathbf{I})u \|_{\tilde{\omega}_{\sigma-3,\sigma-3}} \| g \|_{\tilde{\omega}_{-2,-2}} \\
 &\leq CN^{1-\sigma} \| \partial_x^\sigma u \|_{\tilde{\omega}_{\sigma-3,\sigma-3}} \| g \|_{\tilde{\omega}_{-2,-2}},
 \end{aligned}$$

因此, 当  $l = 1$  时, (2.7)式也成立.

(4) 当  $l = 0$  时, 同理可令  $g = \mathbb{P}_N^*u - u$ , 故  $g \in H_0^3(I_x)$ . 再次运用上述 Hardy's 不等式, 有  $g\tilde{\omega}_{-3,-3} \in L^2(I_x)$ , 由(2.6) 式得

$$\begin{aligned}
 \|\mathbb{P}_N^*u - u\|_{\tilde{\omega}_{-3,-3}}^2 &= (\mathbb{P}_N^*u - u, \partial_x^3 \bar{\partial}_x^{-3}[g\tilde{\omega}_{-1,-1}]) \\
 &= |((P_{N-3} - \mathbf{I})\partial_x^3 u, (\mathbf{I} - P_{N-3})\bar{\partial}_x^{-3}[g\tilde{\omega}_{-3,-3}])| \\
 &\leq CN^{3-\sigma} \| \partial_x^{\sigma-3}(P_{N-3} - 5thbfI)\partial_x^3 u \|_{\tilde{\omega}_{\sigma-3,\sigma-3}} N^{-3} \| g\tilde{\omega}_{-3,-3} \|_{\tilde{\omega}_{3,3}} \\
 &= CN^{-\sigma} \| \partial_x^\sigma(\mathbb{P}_N^* - \mathbf{I})u \|_{\tilde{\omega}_{\sigma-3,\sigma-3}} \| g \|_{\tilde{\omega}_{-3,-3}} \\
 &\leq CN^{-\sigma} \| \partial_x^\sigma u \|_{\tilde{\omega}_{\sigma-3,\sigma-3}} \| g \|_{\tilde{\omega}_{-3,-3}},
 \end{aligned}$$

因此, 当  $l = 0$  时, (2.7)式仍成立.此外, 当  $l$  为非整数时, 可由空间插值获得结论. 综上, 对(2.7)式的证明到此全部完成.

### 3. 五阶偏微分方程的全离散格式

本节主要叙述五阶偏微分方程关于时间多区域时空谱方法的全离散格式. 空间方向采用 Legendre-Petrov-Galerkin 方法, 时间方向采用多区域的 Legendre-tau 方法. 选取适当的基函数使得系数矩阵稀疏, 提高求解速度.

对  $1 \leq k \leq K$ , 下面考虑方程(1.1)在  $\Omega_k$  上的时空谱格式: 存在  $U_L^k = U_L^k(x, t) \in \mathcal{W}^k$ , 使得

$$\begin{cases} (\partial_t U_L^k, v)_{\Omega_k} + (\partial_x^3 U_L^k, \partial_x^2 v)_{\Omega_k} = (f, v)_{\Omega_k}, \quad \forall v \in \widetilde{\mathcal{W}}^k, \\ U_L^k(x, -1) = \mathbb{P}_N^*U_0(x). \end{cases} \tag{3.1}$$

取  $W_L^k = U_L^k - \mathbb{P}_N^*U_0$ , 则(3.1)式可写成: 存在  $W_L^k \in \mathcal{W}^k$ , 使得

$$\begin{cases} (\partial_t W_L^k, v)_{\Omega_k} + (\partial_x^3 W_L^k, \partial_x^2 v)_{\Omega_k} = (f - \partial_x^5 \mathbb{P}_N^*U_0(x), v)_{\Omega_k}, \quad \forall v \in \widetilde{\mathcal{W}}^k, \\ W_L^k(x, -1) = 0. \end{cases} \tag{3.2}$$



$$\text{令 } W_L^k = \sum_{i=0}^{M_k-1} \sum_{j=0}^{N-5} \tilde{w}_{ij}^k \varphi_i^{M_k} \gamma_j, \quad v = \tilde{\varphi}_m^{M_k} \psi_n, \quad m = 0, 1, \dots, M_k - 1, \quad n = 0, 1, \dots, N - 5. \quad (3.3)$$

将  $W_L^k, v$  代入(3.2)式, 记  $\mathbf{W}^k = (\tilde{w}_{ij}^k)_{M_k \times (N-4)}$ , 有

$$\mathbf{A}^k \mathbf{W}^k \mathbf{F}_1 + \mathbf{B}^k \mathbf{W}^k \mathbf{F}_2 = \mathbf{F}_3^k, \quad (3.4)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^k &= (a_{im}^k)_{M_k \times M_k}, \quad a_{im}^k = (\varphi_i^{M_k'}, \tilde{\varphi}_m^{M_k})_{I_k}, \\ \mathbf{B}^k &= (b_{im}^k)_{M_k \times M_k}, \quad b_{im}^k = (\varphi_i^{M_k}, \tilde{\varphi}_m^{M_k})_{I_k}, \\ \mathbf{F}_1 &= (f_{jn}^1)_{(N-4) \times (N-4)}, \quad f_{jn}^1 = (\gamma_j, \psi_n)_{I_x}, \\ \mathbf{F}_2 &= (f_{jn}^2)_{(N-4) \times (N-4)}, \quad f_{jn}^2 = (\gamma_j''', \psi_n'')_{I_x}, \\ \mathbf{F}_3^k &= (f_{mn}^k)_{M_k \times (N-4)}, \quad f_{mn}^k = (f - \partial_x^5 \mathbb{P}_N^* U_0(x), \tilde{\varphi}_m^{M_k} \psi_n)_{\Omega_k}. \end{aligned}$$

为了方便计算, 本文考虑时间方向上多区域情况的多项式次数均与单区域情况的多项式次数相同, 且区间等距划分, 即:  $M_k = M, h_k = \frac{2}{K}, k = 1, \dots, K$ .

又因为

$$\begin{cases} a_{im}^k = \int_{b_{k-1}}^{b_k} \varphi_i^{M_k'}(t) \tilde{\varphi}_m^{M_k}(t) dt = \int_{-1}^1 \varphi_i^{M_k'}(\bar{t}) \tilde{\varphi}_m^{M_k}(\bar{t}) d\bar{t}, \\ b_{im}^k = \int_{b_{k-1}}^{b_k} \varphi_i^{M_k}(t) \tilde{\varphi}_m^{M_k}(t) dt = \frac{1}{K} \int_{-1}^1 \varphi_i^{M_k}(\bar{t}) \tilde{\varphi}_m^{M_k}(\bar{t}) d\bar{t}. \end{cases} \quad (3.5)$$

故有

$$\begin{cases} \mathbf{A}^k = \mathbf{A}, \quad \mathbf{A} = (a_{im})_{M \times M}, \quad a_{im} = (\varphi_i^{M_k'}, \tilde{\varphi}_m^{M_k})_{I_t}, \\ \mathbf{B}^k = \frac{1}{K} \mathbf{B}, \quad \mathbf{B} = (b_{im})_{M \times M}, \quad b_{im} = (\varphi_i^{M_k}, \tilde{\varphi}_m^{M_k})_{I_t}, \\ \mathbf{F}_3^k = \frac{1}{K} \mathbf{F}_3, \quad \mathbf{F}_3 = (f_{mn})_{M \times (N-4)}, \quad f_{mn} = (f - \partial_x^5 \mathbb{P}_N^* U_0(x), \tilde{\varphi}_m^{M_k} \psi_n)_{\Omega}. \end{cases} \quad (3.6)$$

将(3.6)式代入(3.4)式, 则有

$$\mathbf{A} \mathbf{W}^k \mathbf{F}_1 + \frac{1}{K} \mathbf{B} \mathbf{W}^k \mathbf{F}_2 = \frac{1}{K} \mathbf{F}_3. \quad (3.7)$$

下面考虑  $k = 1$  (第一个区间)的求解格式, 则有

$$\mathbf{A} \mathbf{W}^1 \mathbf{F}_1 + \frac{1}{K} \mathbf{B} \mathbf{W}^1 \mathbf{F}_2 = \frac{1}{K} \mathbf{F}_3. \quad (3.8)$$

利用张量积符号  $\otimes$ , (3.8)式可改写成

$$(\mathbf{F}_1^T \otimes \mathbf{A} + \frac{1}{K} \mathbf{F}_2^T \otimes \mathbf{B}) \mathbf{w}^1 = \frac{1}{K} \mathbf{f}_3, \quad (3.9)$$

其中  $\mathbf{w}^1, \mathbf{f}_3$  分别为  $\mathbf{W}^1, \mathbf{F}_3$  的列向量形式.

由(3.9)式可以得到方程(1.1)在第一个区间上的数值解:  $U_L^1(x, t) = W_L^1(x, t) + \mathbb{P}_N^* U_0(x)$ , 接着取  $U_L^1(x, -1)$  作为第二个区间的初值, 代入(3.7)式可以得到方程(1.1)在第二个区间上的数值解,  $\dots$ , 如此进行下去我们可以得到方程(1.1)在每个区间上的数值解.

### 4. 误差分析

本节主要对全离散格式(3.1)进行误差分析.

令  $U, U_L^k$  分别为方程(1.1)、方程(3.1)的解, 由于精确解  $U$  对方程(1.1)的弱形式仍成立, 对  $1 \leq k \leq K$ , 故有下列误差方程成立:

$$(\partial_t(U - U_L^k), v)_{\Omega_k} + (\partial_x^3(U - U_L^k), \partial_x^2 v)_{\Omega_k} = 0, \quad \forall v \in \widetilde{\mathcal{W}}^k. \tag{4.1}$$

$$\text{记 } \hat{u}^k = \mathbb{P}_N^* \mathcal{P}_{1, M_k}^k U, \tilde{u}^k = U_L^k - \hat{u}^k, \text{ 易知 } \tilde{u}^k(x, -1) = 0. \tag{4.2}$$

将(4.2)式代入(4.1)式, 得

$$(\partial_t \tilde{u}^k, v)_{\Omega_k} + (\partial_x^3 \tilde{u}^k, \partial_x^2 v)_{\Omega_k} = (\partial_t(U - \hat{u}^k), v)_{\Omega_k} + (\partial_x^3(U - \hat{u}^k), \partial_x^2 v)_{\Omega_k}. \tag{4.3}$$

由于(2.1)式、(2.4)式, 上式右端可以简化成

$$\begin{aligned} (\partial_t(U - \hat{u}^k), v)_{\Omega_k} + (\partial_x^3(U - \hat{u}^k), \partial_x^2 v)_{\Omega_k} &= (\partial_t(U - \mathbb{P}_N^* \mathcal{P}_{1, M_k}^k U), v)_{\Omega_k} + (\partial_x^3(U - \mathbb{P}_N^* \mathcal{P}_{1, M_k}^k U), \partial_x^2 v)_{\Omega_k} \\ &= (\partial_t(U - \mathbb{P}_N^* U), v)_{\Omega_k} + (\partial_x^3(U - \mathcal{P}_{1, M_k}^k U), \partial_x^2 v)_{\Omega_k}. \end{aligned} \tag{4.4}$$

令  $v = \omega_{0, -1}^k \tilde{\omega}_{0, -1} \tilde{u}^k$ , 代入(4.3)式左端, 且由(3.5)式知, 有

$$(\partial_t \tilde{u}^k, v)_{\Omega_k} = \frac{1}{K} (\partial_t \tilde{u}^k, \tilde{u}^k)_{\Omega, \omega_{0, -1}, \tilde{\omega}_{0, -1}} = \frac{1}{2K} \|\tilde{u}^k\|_{\Omega, \omega_{0, -2}, \tilde{\omega}_{0, -1}}^2 + \frac{1}{4K} \|\tilde{u}^k(x, 1)\|_{I_x, \tilde{\omega}_{0, -1}}^2. \tag{4.5}$$

$$(\partial_x^3 \tilde{u}^k, \partial_x^2 v)_{\Omega_k} = \frac{1}{K^2} (3\partial_x^2 v + (1+x)\partial_x^3 v, \partial_x^2 v)_{\Omega, \omega_{0, 1}} = \frac{5}{2K^2} \|\partial_x^2 v\|_{\Omega, \omega_{0, 1}}^2 + \frac{1}{K^2} \|\partial_x^2 v(1, t)\|_{I_t, \omega_{0, 1}}^2. \tag{4.6}$$

将  $v = \omega_{0, -1}^k \tilde{\omega}_{0, -1} \tilde{u}^k$  代入(4.3)式右端, 且由(3.5)式和由施瓦茨不等式得

$$|(\partial_t(U - \mathbb{P}_N^* U), v)_{\Omega_k}| \leq \frac{1}{K} \|\partial_t(U - \mathbb{P}_N^* U)\|_{\Omega, \omega_{0, -1}, \tilde{\omega}_{0, -1}} \|\tilde{u}^k\|_{\Omega, \omega_{0, -1}, \tilde{\omega}_{0, -1}}. \tag{4.7}$$

$$|(\partial_x^3(U - \mathcal{P}_{1, M_k}^k U), \partial_x^2 v)_{\Omega_k}| \leq \frac{5}{K^2} \|\partial_x^3(U - \mathcal{P}_{1, M_k}^k U)\|_{\Omega, \omega_{0, -1}, \tilde{\omega}_{0, -1}} \|\tilde{u}^k\|_{\Omega, \omega_{0, -1}, \tilde{\omega}_{0, -1}}. \tag{4.8}$$

将(4.4)式、(4.5)式、(4.6)式、(4.7)式、(4.8)式代入(4.3)式, 有

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \|\tilde{u}^k\|_{\Omega, \omega_0, -2, \tilde{\omega}_0, -1}^2 + \frac{1}{4} \|\tilde{u}^k(x, 1)\|_{L_x, \tilde{\omega}_0, -1}^2 + \frac{5}{2K} \|\partial_x^2 v\|_{\Omega, \omega_0, 1}^2 + \frac{1}{K} \|\partial_x^2 v(1, t)\|_{L_t, \omega_0, 1}^2 \\
& \leq \|\partial_t(U - \mathbb{P}_N^* U)\|_{\Omega, \omega_0, -1, \tilde{\omega}_0, -1} \|\tilde{u}^k\|_{\Omega, \omega_0, -1, \tilde{\omega}_0, -1} \\
& + \frac{5}{K} \|\partial_x^3(U - \mathcal{P}_{1, M_k}^k U)\|_{\Omega, \omega_0, -1, \tilde{\omega}_0, -1} \|\tilde{u}^k\|_{\Omega, \omega_0, -1, \tilde{\omega}_0, -1}. \tag{4.9}
\end{aligned}$$

利用定积分的基本性质, (4.9)式可整理成

$$\begin{aligned}
\|\tilde{u}^k\|_{\Omega, \omega_0, -2, \tilde{\omega}_0, -1} & \leq 4 \|\partial_t(U - \mathbb{P}_N^* U)\|_{\Omega, \omega_0, -1, \tilde{\omega}_0, -1} \\
& + \frac{20}{K} \|\partial_x^3(U - \mathcal{P}_{1, M_k}^k U)\|_{\Omega, \omega_0, -1, \tilde{\omega}_0, -1}. \tag{4.10}
\end{aligned}$$

又由引理1、引理3和(3.5)式知, (4.10)式可化成

$$\begin{aligned}
\|\tilde{u}^k\|_{\Omega, \omega_0, -2, \tilde{\omega}_0, -1} & \leq CN^{-\sigma} \|\partial_x^\sigma \partial_t U\|_{\Omega, \omega_0, -1, \tilde{\omega}_{\sigma-3, \sigma-3}} \\
& + C \frac{M^{-\varphi}}{K^{\frac{1}{2}}} \|\partial_t^\varphi \partial_x^3 U\|_{\Omega, \omega_{\varphi-1, \varphi-1}, \tilde{\omega}_0, -1}. \tag{4.11}
\end{aligned}$$

因此, 由  $L^2(\Omega)$  范数的三角不等式性质可立即得到如下关于全离散格式(3.1)的误差分析定理.

**定理1.** 设  $U$ 、 $U_L^k$  分别为方程(1.1)、方程(3.1)的解,  $\sigma \geq 3$ ,  $\varphi \geq 1$ ,  $U \in L^2(I_x; H^\varphi(I_t)) \cap L^2(I_t; H^\sigma(I_x) \cap H_0^{2,3}(I_x))$ , 则对  $1 \leq k \leq K$ , 存在正常数  $C$ , 使得

$$\|U - U_L^k\|_{\Omega, \omega_0, -2, \tilde{\omega}_0, -1} \leq CN^{-\sigma} \|U\|_{A_1^{\sigma, \varphi}(\Omega)} + C \frac{M^{-\varphi}}{K^{\frac{1}{2}}} \|U\|_{B_1^\varphi(\Omega)}. \tag{4.12}$$

其中

$$\begin{aligned}
\|U\|_{A_1^{\sigma, \varphi}(\Omega)} & = \|\partial_x^\sigma U\|_{\Omega, \omega_0, -2, \tilde{\omega}_{\sigma-3, \sigma-3}} + \|\partial_x^\sigma \partial_t U\|_{\Omega, \omega_0, -1, \tilde{\omega}_{\sigma-3, \sigma-3}} \\
& + \frac{M^{-\varphi}}{K^{\frac{1}{2}}} \|\partial_x^\sigma \partial_t^\varphi U\|_{\Omega, \omega_{\varphi-1, \varphi-1}, \tilde{\omega}_{\sigma-3, \sigma-3}}, \\
\|U\|_{B_1^\varphi(\Omega)} & = \|\partial_t^\varphi U\|_{\Omega, \omega_{\varphi-1, \varphi-1}, \tilde{\omega}_0, -1} + \|\partial_t^\varphi \partial_x^3 U\|_{\Omega, \omega_{\varphi-1, \varphi-1}, \tilde{\omega}_0, -1}.
\end{aligned}$$

证:

$$\begin{aligned}
\|U - U_L^k\|_{\Omega, \omega_0, -2, \tilde{\omega}_0, -1} & = \|U - (\hat{u}^k + \tilde{u}^k)\|_{\Omega, \omega_0, -2, \tilde{\omega}_0, -1} \\
& \leq \|U - \hat{u}^k\|_{\Omega, \omega_0, -2, \tilde{\omega}_0, -1} + \|\tilde{u}^k\|_{\Omega, \omega_0, -2, \tilde{\omega}_0, -1} \\
& = \|U - \mathbb{P}_N^* \mathcal{P}_{1, M_k}^k U\|_{\Omega, \omega_0, -2, \tilde{\omega}_0, -1} + \|\tilde{u}^k\|_{\Omega, \omega_0, -2, \tilde{\omega}_0, -1}. \tag{4.13}
\end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned}
 & \| U - \mathbb{P}_N^* \mathcal{P}_{1, M_k}^k U \|_{\Omega, \omega_0, -2, \tilde{\omega}_0, -1} \\
 &= \| (\mathbf{I} - \mathbb{P}_N^*) U - (\mathbf{I} - \mathbb{P}_N^*) (\mathbf{I} - \mathcal{P}_{1, M_k}^k) U + (\mathbf{I} - \mathcal{P}_{1, M_k}^k) U \|_{\Omega, \omega_0, -2, \tilde{\omega}_0, -1} \\
 &\leq \| (\mathbf{I} - \mathbb{P}_N^*) U \|_{\Omega, \omega_0, -2, \tilde{\omega}_0, -1} + \| (\mathbf{I} - \mathbb{P}_N^*) (\mathbf{I} - \mathcal{P}_{1, M_k}^k) U \|_{\Omega, \omega_0, -2, \tilde{\omega}_0, -1} \\
 &+ \| (\mathbf{I} - \mathcal{P}_{1, M_k}^k) U \|_{\Omega, \omega_0, -2, \tilde{\omega}_0, -1} .
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

由引理1、引理3和(3.5)式知, (4.14)式可整理成

$$\begin{aligned}
 & \| U - \mathbb{P}_N^* \mathcal{P}_{1, M_k}^k U \|_{\Omega, \omega_0, -2, \tilde{\omega}_0, -1} \\
 &\leq CN^{-\sigma} \| \partial_x^\sigma U \|_{\Omega, \omega_0, -2, \tilde{\omega}_{\sigma-3, \sigma-3}} + CN^{-\sigma} \frac{M^{-\varphi}}{K^{\frac{1}{2}}} \| \partial_x^\sigma \partial_t^\varphi U \|_{\Omega, \omega_{\varphi-1, \varphi-1}, \tilde{\omega}_{\sigma-3, \sigma-3}} \\
 &+ C \frac{M^{-\varphi}}{K^{\frac{1}{2}}} \| \partial_t^\varphi U \|_{\Omega, \omega_{\varphi-1, \varphi-1}, \tilde{\omega}_0, -1} .
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

结合(4.11)式和(4.15)式, (4.13)式可整理成

$$\| U - U_L^k \|_{\Omega, \omega_0, -2, \tilde{\omega}_0, -1} \leq CN^{-\sigma} \| U \|_{A_1^{\sigma, \varphi}(\Omega)} + C \frac{M^{-\varphi}}{K^{\frac{1}{2}}} \| U \|_{B_1^\varphi(\Omega)} .$$

综上, 故定理1的结论成立.

## 5. 数值结果

本节主要通过一些数值算例来验证时间多区域时空谱方法对求解五阶偏微分方程的有效性, 数值算例的右端项和非线性项采用 CGL 插值处理, 并使用快速傅里叶变换(FFT)进行计算.

**例1.** 考虑如下五阶方程:

$$\begin{cases} \partial_t U + \partial_x^3 U + \partial_x^5 U = f(x, t), & x \in I_x, t \in I_t; \\ U(\pm 1, t) = \partial_x U(\pm 1, t) = \partial_x^2 U(1, t) = 0, & t \in I_t; \\ U(x, -1) = U_0(x), & x \in I_x. \end{cases} \tag{5.1}$$

其中  $I_x = (-1, 1)$ ,  $I_t = (-1, 1)$ ,  $U = U(x, t)$ .

令

$$U(x, t) = (x - 1)t \cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right), \quad x \in (-1, 1), t \in (-1, 1]$$

为方程(5.1)的精确解, 则方程初值  $U_0(x)$ , 右端项  $f$  分别为:

$$U_0(x) = -(x - 1) \cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right),$$

$$f = \frac{x-1}{2} + \left(\frac{x-1}{2} + \frac{5}{2}\pi^4 t - \frac{3}{2}\pi^2 t\right) \cos(\pi x) + \frac{x-1}{2} \pi^3 t(1-\pi^2) \sin(\pi x).$$

此数值算例的实验结果由图 1-图 3 给出.

图中  $L^\infty$ -error 定义如下:

$$\|U - U_L\|_{L^\infty} = \max_{i,j} |U(x_j, t_i) - U_L(x_j, t_i)|,$$

$$\|U - U_L^k\|_{L^\infty} = \max_{i,k} |U(x_j, t_k) - U_L(x_j, t_k)|,$$

其中  $(x_j, t_i)$ 、 $(x_j, t_k)$  分别为  $\Omega$  和  $\Omega_k$  上的 CGL 点,  $i = 0, 1, \dots, M-1$ ,  $k = 0, 1, \dots, M_k-1$ ,  $j = 0, 1, \dots, N-5$ .  $M$  表示时间方向单区域的多项式次数,  $M_k$  表示时间方向子区域的多项式次数,  $N$  表示空间方向的多项式次数.

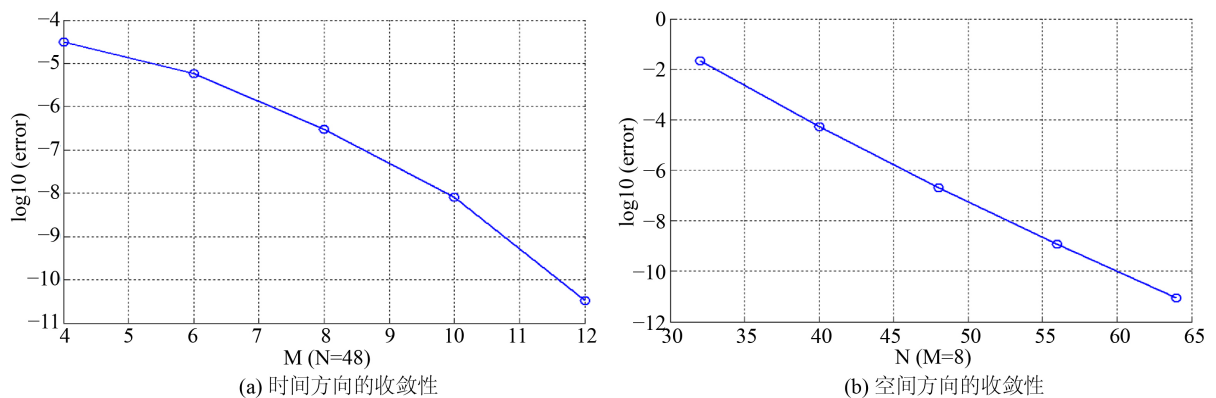


Figure 1. Example 1 Convergence of single domain in time

图 1. 例 1 时间单区域的收敛性

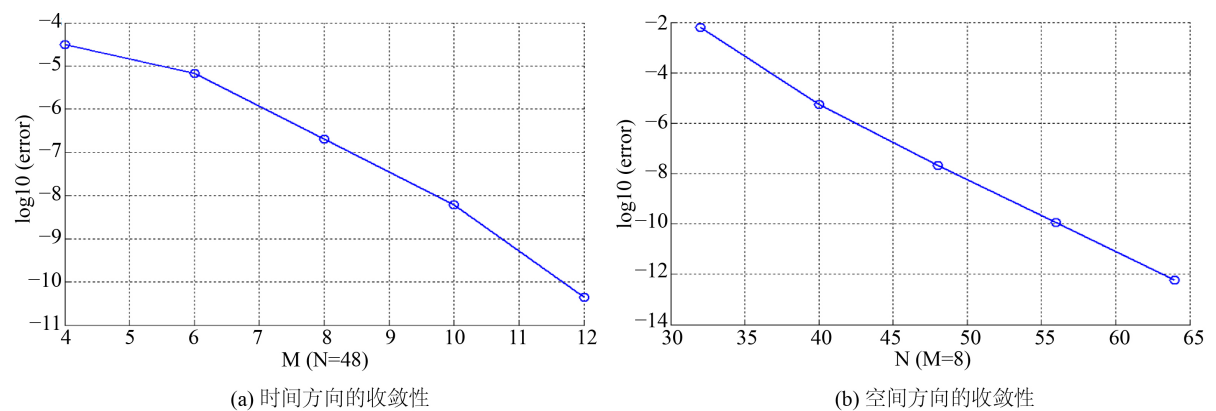


Figure 2. Example 1 Convergence of four domains in time

图 2. 例 1 时间四区域的收敛性

例 2. 考虑如下五阶方程:

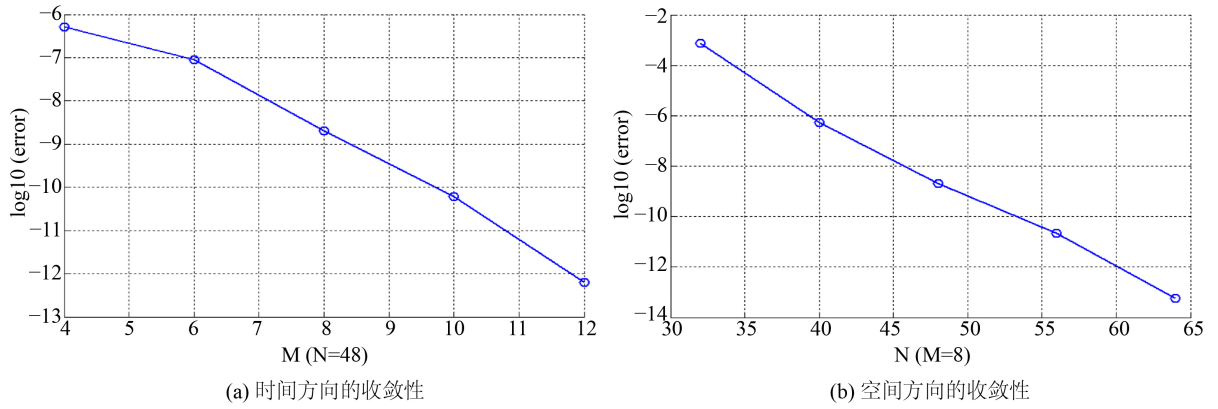


Figure 3. Example 1 Convergence of six domains in time

图 3. 例 1 时间六区域的收敛性

$$\begin{cases} \partial_t U + \partial_x^2 U + \partial_x^5 U + UU_x = f(x, t), & x \in I_x, t \in I_t; \\ U(\pm 1, t) = \partial_x U(\pm 1, t) = \partial_x^2 U(1, t) = 0, & t \in I_t; \\ U(x, -1) = U_0(x), & x \in I_x. \end{cases} \quad (5.2)$$

其中  $I_x = (-1, 1)$ ,  $I_t = (-1, 1)$ ,  $U = U(x, t)$ .

易知方程(5.2)的时间多区域时空谱格式关键在于处理非线性项  $UU_x$ , 此时可采用非线性项在 CGL 点上的插值对其进行计算, 该方法结合了 Chebyshev 配置法快速变换计算的优点与 Legendre 方法的良好稳定性. 方程(5.2)其他项的处理方式与方程(1.1)相同.

在对方程(5.2)的时间多区域时空谱格式进行数值计算时, 我们采用迭代法进行求解, 即: 设迭代次数为  $l$ , 迭代误差为  $\varepsilon$ , 依次对方程(5.2)的时间多区域时空谱格式进行迭代, 当前后两次迭代误差的最大规模小于  $\varepsilon$  时, 终止迭代.

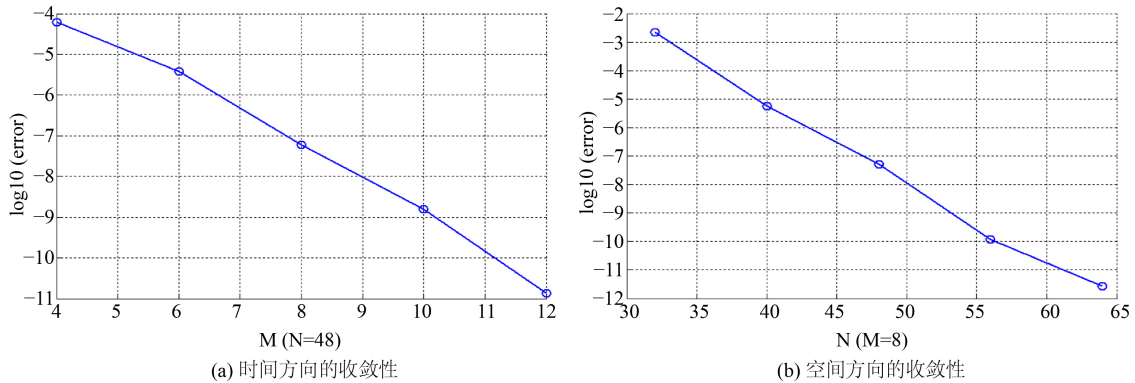


Figure 4. Example 2 Convergence of single domain in time

图 4. 例 2 时间单区域的收敛性

令

$$U(x, t) = (x - 1) \sin^2(\pi x) e^{-t}, \quad x \in (-1, 1), \quad t \in (-1, 1]$$

为方程(5.2)的精确解, 则方程初值  $U_0(x)$ , 右端项  $f$  分别为:

$$U_0(x) = (x - 1) \sin^2(\pi x) e,$$

$$f = 2\pi^2(x - 20\pi^2 - 1)e^{-t} \cos(2\pi x) + (x - 1)e^{-t} \sin^2(\pi x)(e^{-t} \sin^2(\pi x) + \pi(x - 1)e^{-t} \sin(2\pi x) - 1) + 2\pi(8\pi^3 x - 8\pi + 1)e^{-t} \sin(2\pi x).$$

取迭代允许误差为  $\varepsilon = 10^{-12}$ , 迭代次数为  $l = 40$ . 此数值算例的实验结果由图4-图6给出.

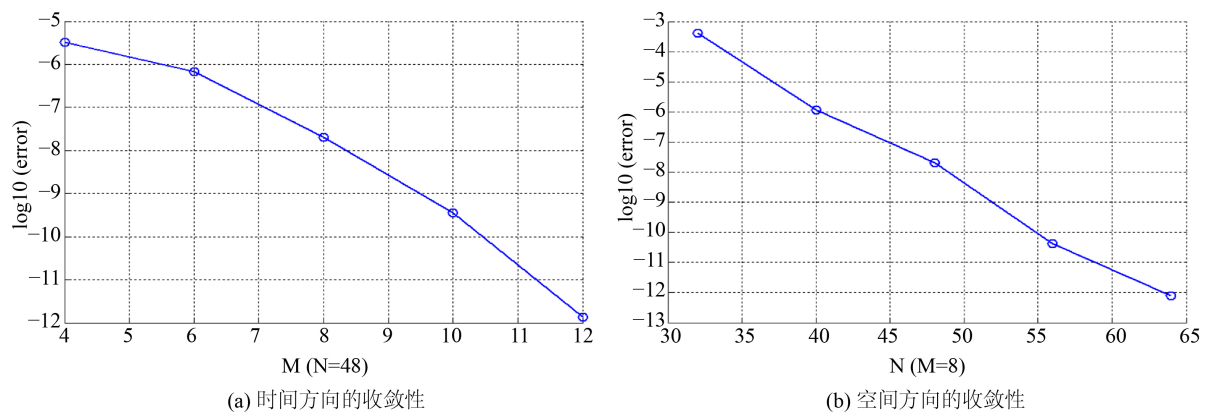


Figure 5. Example 2 Convergence of four domains in time

图 5. 例 2 时间四区域的收敛性

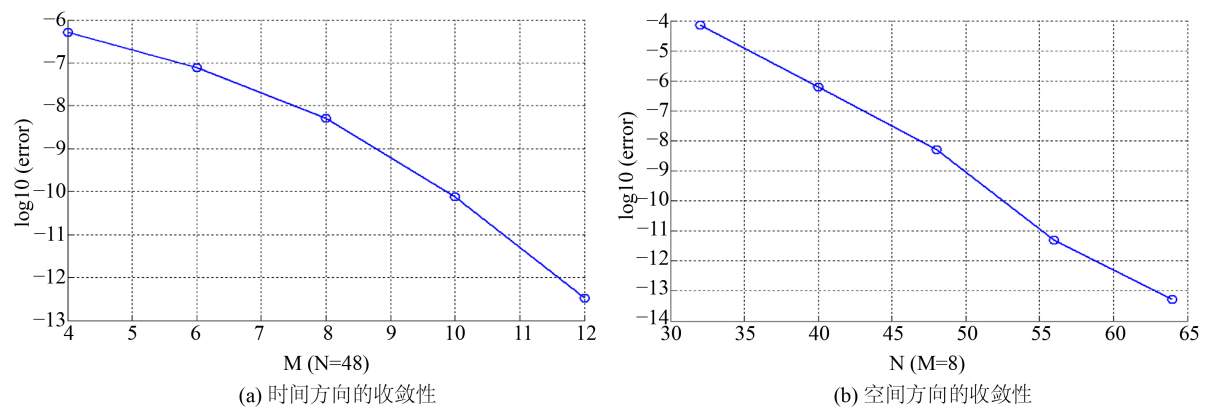


Figure 6. Example 2 Convergence of six domains in time

图 6. 例 2 时间六区域的收敛性

图1、图4分别表示例1、例2采用时间单区域时空谱方法进行计算的实验结果.图2、图3、图5、图6分别表示例1、例2采用时间多区域时空谱方法进行计算的实验结果, 不难发现例1、例2时间多区域时空谱格式在时间与空间上均满足谱收敛. 此外当  $M = 8$ ,  $N = 64$ ,  $K = 6$  时, 例1、例

2 时间六区域的误差均比时间单区域更小, 其误差都达到了  $10^{-14}$  量级. 故今后可以采用时间多区域时空谱方法来求解此类方程, 减少误差.

## 6. 结束语

本文提出了五阶偏微分方程的时间多区域时空谱方法. 该方法在空间方向上采用 Legendre-Petrov-Galerkin 方法, 在时间方向上采用多区域的 Legendre-tau 方法. 同时, 本文给出了该方法在线性问题上的误差分析, 对非线性方程中的非线性项采用在 Chebyshev-Gauss-Lobatto 点上的插值进行计算. 最后, 文章末尾给出了一些数值算例, 数值算例的计算结果表明本文算法对求解五阶线性偏微分方程、一些五阶非线性问题都是有效的.

## 基金项目

国家自然科学基金(11971016)。

## 参考文献

- [1] Xu, Y. and Shu, C.W. (2005) Local Discontinuous Galerkin Methods for the Kuramoto-Sivashinsky Equations and the Ito-Type Coupled KdV Equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **195**, 3430-3447. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2005.06.021>
- [2] 房少梅, 吴荣俏. 一类广义的KdV方程的显式差分解[J]. 应用数学学报, 2007, 30(2): 368-376.
- [3] Khanal, N., Sharma, R., Wu, J. and Yuan, J.M. (2009) A Dual-Petrov-Galerkin Method for Extended Fifth-Order Korteweg-de Vries Type Equations. *Conference Publications*, **2009**, 442-450.
- [4] Darvishi, M. and Khani, F. (2009) Numerical and Explicit Solutions of the Fifth-Order Korteweg-de Vries Equations. *Chaos, Solitons and Fractals*, **39**, 2484-2490. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2007.07.034>
- [5] Edson, P. and Eben, M. (2013) Discrete Singular Convolution Method for Numerical Solutions of Fifth Order Korteweg-De Vries Equations. *Journal of Applied Mathematics Physics*, **1**, 5-15. <https://doi.org/10.4236/jamp.2013.17002>
- [6] Chen, W., Li, J., Miao, C. and Wu, J. (2009) Low Regularity Solutions of Two Fifth-Order KDV Type Equations. *Journal d'Analyse Mathematique*, **107**, 221-238. <https://doi.org/10.1007/s11854-009-0009-0>
- [7] Kenig, C.E. and Pilod, D. (2015) Well-Posedness for the Fifth-Order KdV Equation in the Energy Space. *Transactions of the American Mathematical Society*, **367**, 2551-2612. <https://doi.org/10.1090/S0002-9947-2014-05982-5>
- [8] Gao, X. and Zheng, X. (2016) Unique Continuation Property for a Class of Fifth-Order Korteweg-de-Vries Equations. *Chinese Journal of Engineering Mathematics*, **33**, 541-550.



- 
- [9] Xu, Y. and Shu, C.W. (2004) Local Discontinuous Galerkin Methods for Three Classes of Nonlinear Wave Equations. *Journal of Computational Mathematics*, **22**, 250-274.
- [10] Cheng, Y. and Shu, C.W. (2008) A Discontinuous Galerkin Finite Element Method for Time Dependent Partial Differential Equations with Higher Order Derivatives. *Mathematics of Computation*, **77**, 699-730. <https://doi.org/10.1090/S0025-5718-07-02045-5>
- [11] 赵小红, 李德生. 一类组合的五阶非线性偏微分方程的一种显式差分格式[J]. 科学技术与工程, 2008, 8(3): 750-752.
- [12] Shen, J. (2003) A New Dual-Petrov-Galerkin Method for Third and Higher Odd-Order Differential Equations: Application to the KDV Equation. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **41**, 1595-1619. <https://doi.org/10.1137/S0036142902410271>
- [13] Ma, H.P. and Sun, W.W. (2000) A Legendre-Petrov-Galerkin and Chebyshev Collocation Method for Third-Order Differential Equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **38**, 1425-1438. <https://doi.org/10.1137/S0036142999361505>
- [14] Tang, J. and Ma, H. (2002) Single and Multi-Interval Legendre  $\tau$ -Methods in Time for Parabolic Equations. *Advances in Computational Mathematics*, **17**, 349-367. <https://doi.org/10.1023/A:1016273820035>