Pure Mathematics 理论数学, 2022, 12(3), 448-457
Published Online March 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.123050

Hans汉斯

移动环境下Fisher-KPP方程受迫行波解的存在性

赵林林

长沙理工大学数学与统计学院，湖南 长沙

收稿日期：2022年2月18日；录用日期：2022年3月21日；发布日期：2022年3月28日

摘 要

考虑移动环境下Fisher-KPP方程在其内禀增长率函数非负条件下受迫行波解的存在性。利用单调迭代结合上下解方法的技巧，证明了任意正的恒定速度移动下非减受迫行波的存在性。

关键词

移动环境，Fisher-KPP方程，单调迭代

Existence of Forced Traveling Waves for Fisher-KPP Equation under a Shifting Habitat

Linlin Zhao

School of Mathematics and Statistics, Changsha University of Science and Technology, Changsha Hunan

Received: Feb. 18^{th}, 2022; accepted: Mar. 21^{st}, 2022; published: Mar. 28^{th}, 2022

Abstract

In this paper, we are concerned with the existence of forced traveling wave solutions

文章引用: 赵林林. 移动环境下Fisher-KPP方程受迫行波解的存在性[J]. 理论数学, 2022, 12(3): 448-457.
DOI: 10.12677/pm.2022.123050

for Fisher-KPP equation in the habitat shifting under the condition that its intrinsic growth rate function is nonnegative. Using the technique of monotone iteration combined with the upper and lower solution method, the existence of non-decreasing forced traveling waves under arbitrary positive constant shifting speed is proved.

Keywords

Shifting Habitat, Fisher-KPP Equation, Monotone Iterative

1. 引言

在生态种群动力学的研究中, 诸如种群的空间结构和数量变化、物种入侵以及疾病传播等问题都可以通过建立恰当的反应扩散方程模型进行研究 [1–6]. 例如, 继 Fisher [1]和 Kolmogorov 等人 [2]的开创性工作, Fisher-KPP 反应扩散方程及其推广形式的长时间行为、行波和渐近传播速度等动力学得到了深入的研究 [7–10], 并广泛应用于空间生态学、传染病预防与控制等领域 [3,5,6,11].

自然界中生物物种的栖息地通常是随时间变化且在空间上异质的 [6]. 除了季节性和地理因素外, 全球变暖、工业化过度发展引起的环境恶化也造成了这种时空异质性. 一个自然的问题是, 气候变化和环境恶化会对不同物种的种群持久性产生什么影响？近年来, 除了关于该主题的一些实地科学考察研究外, 许多应用数学学者还通过建立数学模型对物种的种群动力学进行了一些定量研究. 例如, 为了洞悉种群密度在空间中的分布如何随时间演化, 并预测物种未来是否能赶得上由气候变化或环境恶化引起的栖息区域的移动, 文献 [12–17]考虑种群内禀增长率 $r(t,x)$ 依赖于时间 t 和空间位置 x , 采用 $r(t,x)=r(x-ct)$ 这一特殊形式来描述种群栖息地的移动. 该形式反映环境以恒定速度 $c>0$ 向右移动. 特别地, 为了探索在气候变化的影响下物种在移动栖息地的分布和传播, Li 等人 [14]通过将上述移动模式引入到经典的 Fisher-KPP 方程建立如下模型

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}=d\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}+u(t,x)[r(x-ct)-u(t,x)],\ \ t>0,\ x\in\mathbb{R}, \tag{1}$$

其中 $u(t,x)$ 表示种群在时间 t 位置 x 的密度大小, 常数 $d>0$ 为种群扩散系数, $r(\cdot)$ 代表内禀增长率函数, 以速度 $c>0$ 变化. 作者假设内禀增长率函数 $r(\cdot)$ 非减、连续且满足 $r(-\infty)<0<r(+\infty)$, 探讨了物种灭绝和持久生存的条件以及在种群持久生存情形下模型 (1) 的向右渐近传播速度. 随后, Hu 和 Zou 在文献 [18]中证明了对任给的 $c>0$, 方程 (1) 均存在一个连接 0 和 $r(+\infty)$ 的非减受迫行波 $u(t,x)=\varphi(x-ct)$. 这里, 受迫行波是指其波速 c 与环境移动速度相同.

需要指出的是, 近年来的一些研究工作已经将文献 [14]中的结果推广到了其它一些具有移动环境的方程模型. 例如, Li 等人 [19]研究 (1) 中的随机扩散替换为非局部扩散而得到的方程, Wang 和 Zhao 在文献 [20]还研究了此方程受迫行波的唯一性和稳定性. Zhang 等人 [21]和 Yuan 等人 [22]还从不同的动机和角度研究了具有形如 $r(t,x)=r(x-ct)$ 增长率函数的 Lotka-Volterra 型反应扩散竞争系统的传播动力学. Wu 等人 [23]研究了移动环境下非局部扩散 Lotka-Volterra 型竞争系统的传播动力学, 而 Yang 等人 [24]考虑了移动环境下 Lotka-Volterra 型反应扩散合作系统的受迫波的存在性和尾部渐近性. 在上述这些文献中, 所涉及的增长率函数都假设满足 $r(-\infty)<0<r(+\infty)$. 此外, Hu 等人 [25]把内禀增长函数的条件减弱为: $r(\cdot)$ 为非减、连续函数且满足 $r(-\infty)\le 0<r(+\infty)$, 借助半群理论和精细的分析技巧研究了方程 (1) 的时空持久性和传播动力学. 最近, Hu 等人 [26]还在此条件下讨论了移动栖息地下非局部扩散 Lotka-Volterra 型合作系统的受迫行波的存在性.

受上述研究工作的启发, 我们将在本文中探讨种群栖息环境轻微恶化或种群生长繁殖受气候变化影响较弱的情形, 即考虑方程 (1) 的内禀增长率函数 $r(\cdot)$ 满足如下条件:
(**A**) 函数 $r(\cdot)$ 在 $\mathbb{R}$ 上非减有界且连续, 并满足 $r(+\infty)>r(-\infty)\ge 0$.
在上述条件下, 若 $r(-\infty)>0$ 方程 (1) 有两个 KPP 型极限方程且每个方程均决定一个传播速度. 这两种速度与环境移动速度 c 相互作用将给方程 (1) 的时空动力学分析带来困难和复杂性. 因此, 本文的目的仅寻找方程 (1) 的波速与环境移动速度 c 相同的受迫行波解.

首先将方程 (1) 的受迫行波解记作 $U(\xi)$, $\xi:=x-ct$. 因此, 方程 (1) 的行波解可以转化为如下非自治常微分方程

$$-cU'(\xi)=dU''(\xi)+U(\xi)[r(\xi)-U(\xi)] \tag{2}$$

的解. 另外, 方程 (1.2) 对应的极限方程分别为

$$-cU'(\xi)=dU''(\xi)+U(\xi)[r(+\infty)-U(\xi)], \tag{3}$$

和

$$-cU'(\xi)=dU''(\xi)+U(\xi)[r(-\infty)-U(\xi)]. \tag{4}$$

由于 $r(+\infty)>r(-\infty)\ge 0$, 那么极限方程 (3) 和 (4) 分别有非负平衡点 $r(+\infty)$ 和 $r(-\infty)$. 自然地, 我们会考虑连接两个非负平衡点之间行波的存在性, 即研究对任意 $c>0$ 方程 (2) 是否存在满足边界条件

$$\lim_{\xi\to-\infty}U(\xi)=r(-\infty),\quad \lim_{\xi\to+\infty}U(\xi)=r(+\infty) \tag{5}$$

的非减的解. 我们考虑应用单调迭代技巧来证明方程 (2) 存在连接两个非负平衡点之间的解.

我们的研究结果将表明在环境恶化程度较轻时 (即物种内禀增长率 $r(\cdot)$恒正时), 种群在任何一个区域内均能持久生存 ($U(-\infty)=r(-\infty)\ge 0$).

本文其余部分安排如下：在第2节中给出了一些预备知识. 先通过 (2) 的一对有序上下解构造出先验集，再定义一个恰当的积分算子，并证明其单调性和在先验集下的不变性. 在第3节给出主要结论并用单调迭代方法加以证明.

2. 预备知识

首先, 我们引入一些函数空间. 设空间 $C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ 由 $\mathbb{R}$ 上所有连续函数组成, C^+ 表示由所有非负连续函数组成的空间, 记

$$BC(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \left\{ u \in C(\mathbb{R},\mathbb{R}) \,\middle|\, \sup_{\xi\in\mathbb{R}} |u(\xi)| < \infty \right\},$$

对任意 $u, v \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$, 若 $u - v \in C^+$, 则记 $u \geq v$ 或 $v \leq u$.

令 $\alpha = 2r(+\infty)$, 则方程 $-d\lambda^2 - c\lambda + \alpha = 0$ 有两个实根:

$$\lambda_- = \frac{-c - \sqrt{c^2 + 4d\alpha}}{2d} < 0,\ \lambda_+ = \frac{-c + \sqrt{c^2 + 4d\alpha}}{2d} > 0.$$

定义一个二阶微分算子 Δ 和它的逆 Δ^{-1} 分别为

$$\Delta h := -dh'' - ch' + \alpha h,$$

$$(\Delta^{-1}h)(\xi) := \frac{1}{d(\lambda_+ - \lambda_-)} \left[\int_{-\infty}^{\xi} \mathrm{e}^{\lambda_-(\xi-\eta)} h(\eta)\mathrm{d}\eta + \int_{\xi}^{+\infty} \mathrm{e}^{\lambda_+(\xi-\eta)} h(\eta)\mathrm{d}\eta \right].$$

不难验证对任给 $h \in BC(\mathbb{R},\mathbb{R})$ 都有 $\Delta(\Delta^{-1}h) = h$. 此外, 若 $h', h'' \in BC(\mathbb{R},\mathbb{R})$, 则 $\Delta^{-1}(\Delta h) = h$.

定义 2.1 [26] 若 $\overline{U}(\xi), \underline{U}(\xi) \in BC(\mathbb{R},\mathbb{R})$ 满足 $\overline{U}', \underline{U}', \overline{U}'', \underline{U}'' \in L^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\overline{U} \geq \underline{U}$, $\overline{U}''(\xi)$ 和 $\underline{U}''(\xi)$ 在 $\mathbb{R}\backslash\{\xi_j\}$ 上连续(ξ_j 为一有限递增点列), $\overline{U}'(\xi_j+) \leq \overline{U}'(\xi_j-), \underline{U}'(\xi_j+) \geq \underline{U}'(\xi_j-)$, 且使得不等式

$$-c\overline{U}'(\xi) \geq d\overline{U}''(\xi) + \overline{U}(\xi)[r(\xi) - \overline{U}(\xi)], \tag{6}$$

$$-c\underline{U}'(\xi) \leq d\underline{U}''(\xi) + \underline{U}(\xi)[r(\xi) - \underline{U}(\xi)] \tag{7}$$

在 $\mathbb{R}\backslash\{\xi_j\}$ 上成立, 则称 $\overline{U}$ 和 $\underline{U}$ 是 (2) 的一对有序上下解.

给定一对有序上下解, 可以构造先验集 Γ:

$$\Gamma = \{U \in BC(\mathbb{R},\mathbb{R}) |\, \underline{U} \leq U \leq \overline{U}\}.$$

显然, 集合 Γ 为 $BC(\mathbb{R},\mathbb{R})$ 中的非空有界闭凸集.

对任意 $U \in \Gamma$, 定义如下算子

$$H(U)(\xi) := \alpha U(\xi) + U(\xi)[r(\xi) - U(\xi)]. \tag{8}$$

接下来, 我们给出算子 H 的两个性质.

引理 2.1 下面结论均成立:

(i) $H(\Gamma)$ 为 $BC(\mathbb{R},\mathbb{R})$ 中的有界集；

(ii) 算子 $H:\Gamma\to BC(\mathbb{R},\mathbb{R})$ 连续.

证明 设 $\overline{U}$ 和 $\underline{U}$ 是 (2) 的一对有序的上下解. 记

$$D:=\max\{\sup_{\xi\in\mathbb{R}}|\overline{U}(\xi)|,\sup_{\xi\in\mathbb{R}}|\underline{U}(\xi)|\}. \tag{9}$$

一方面, 对任意 $U\in\Gamma$ 都有

$$|H(U)(\xi)|\le(\alpha+r(\xi)+|U(\xi)|)|U(\xi)|\le(\alpha+r(+\infty)+D)D.$$

因此

$$|H(U)|\le(\alpha+r(+\infty)+D)D,$$

故 $H(\Gamma)$ 为 $BC(\mathbb{R},\mathbb{R})$ 中的有界集.

另一方面, 对任给 U_1, $U_2\in\Gamma$, 我们有

$$\begin{aligned}|H(U_1)(\xi)-H(U_2)(\xi)|\le&(\alpha+r(\xi))|U_1(\xi)-U_2(\xi)|+\left|U_1^2(\xi)-U_2^2(\xi)\right|\\ \le&(\alpha+r(+\infty)+2D)\left|U_1(\xi)-U_2(\xi)\right|,\end{aligned}$$

即

$$|H(U_1)-H(U_2)|\le(\alpha+r(+\infty)+2D)\left|U_1-U_2\right|.$$

这意味着算子 $H:\Gamma\to BC(\mathbb{R},\mathbb{R})$ 连续. 证毕.

接下来, 我们定义映射$F(U):=\Delta^{-1}H(U),\forall U\in\Gamma\subset BC(\mathbb{R},\mathbb{R})$. 我们先讨论映射$F$的一些性质.

引理 2.2 F 是一个非减算子. 另外, 若 $U(\xi)\in\Gamma$ 非减, 则 $F(U)(\xi)$ 关于 ξ 也非减.

证明 取 $\tilde{U}$, $\hat{U}\in\Gamma$ 且满足 $\tilde{U}\ge\hat{U}$, 则对任何 $\xi\in\mathbb{R}$ 有

$$H(\tilde{U})(\xi)-H(\hat{U})(\xi)=(\alpha+r(\xi)-\tilde{U}(\xi)-\hat{U}(\xi))(\tilde{U}(\xi)-\hat{U}(\xi))\ge0.$$

从而, 对 $\forall\xi\in\mathbb{R}$, 有 $F(\tilde{U})(\xi)\ge F(\hat{U})(\xi)$. 即, F 是一个非减算子.

若 $U(\xi)\in\Gamma$ 是一个关于 ξ 的非减函数, 则对 $\forall\zeta>0$ 和 $\forall s\in\mathbb{R}$, 有

$$\begin{aligned}&H(U)(s+\zeta)-H(U)(s)\\&=(U(s+\zeta)-U(s))[\alpha+r(s+\zeta)-U(s+\zeta)+U(s)]+(r(s+\zeta)-r(s))U(s)\ge0.\end{aligned}$$

对于 $\forall\xi\in\mathbb{R}$, 注意到当 $h\in\mathscr{B}_\mu(\mathbb{R},\mathbb{R})$ 时, 有 $(\Delta^{-1}h(s+\zeta))(\xi)=(\Delta^{-1}h(s))(\xi+\zeta)$, 那么

$$\begin{aligned}F(U)(\xi+\zeta)&=[\Delta^{-1}H(U)(s)](\xi+\zeta)=[\Delta^{-1}H(U)(s+\zeta)](\xi)\\&\ge[\Delta^{-1}H(U)(s)](\xi)=F(U)(\xi).\end{aligned}$$

证毕.

引理 2.3 $F(\Gamma) \subset \Gamma$.

证明 由引理 2.1易知$F(\Gamma) \subset BC(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. 因此, 我们只需证对所有 $U \in \Gamma$ 都有

$$\underline{U} \leq F(U) \leq \overline{U}.$$

由于 $\overline{U}, \underline{U}$ 是一对有序上下解, 结合文献 [18]的引理 2.1 我们有

$$F(\underline{U}) = \Delta^{-1} H(\underline{U}) \geq \Delta^{-1} \Delta(\underline{U}) \geq \underline{U}, \quad F(\overline{U}) = \Delta^{-1} H(\overline{U}) \leq \Delta^{-1} \Delta \overline{U} \leq \overline{U}. \tag{10}$$

由引理 2.3 知 F 是一个非减算子. 所以对 $\forall U \in \Gamma$ 有

$$F(\underline{U}) \leq F(U) \leq F(\overline{U}). \tag{11}$$

结合 (10) 和 (11) 得到 $F(\Gamma) \subset \Gamma$. 证毕.

方程 (2) 可写为

$$\Delta U = H(U). \tag{12}$$

因此, 若映射 F 在 Γ 中存在一个不动点, 即 $\exists U \in \Gamma$ 使得

$$U = F(U),$$

则该不动点必是 (12) 的解. 若该不动点还满足边界条件 (5), 则必是方程 (1) 的受迫行波. 这就是我们的研究目标.

3. 受迫行波解的存在性

定理 3.1 若 $(\mathbf{A})$ 成立, 则对任意 $c > 0$, 方程 (1) 总存在一个满足边界条件 (5) 的非减受迫行波.

证明 首先考虑情形(i): $r(-\infty) > 0$.

设 $\overline{U}(\xi) = r(+\infty)$ 和 $\underline{U}(\xi) = r(-\infty)$, 显然, $\overline{U}(\xi)$ 和 $\underline{U}(\xi)$ 满足定义 2.1 的所有条件，即 $\overline{U}(\xi)$ 和 $\underline{U}(\xi)$ 是 (2) 的一对有序上下解. 于是我们得到一个先验集:

$$\Gamma_1 := \{U \in BC(\mathbb{R}, \mathbb{R}) | \underline{U} \leq U \leq \overline{U}\},$$

构造如下迭代序列:

$$U^{(1)} = F(\overline{U}), \;\; U^{(n+1)} = F(U^{(n)}), \;\; \forall n \geq 1.$$

因 $\overline{U}(\xi) \in \Gamma_1$ 是 $\mathbb{R}$ 上的非减函数, 结合引理 2.2 和引理 2.3 得到对所有的 $n \geq 1$, $U^{(n)}(\xi)$ 也是 $\mathbb{R}$ 上的非减函数且满足不等式

$$\overline{U}(\xi) \geq U^{(1)}(\xi) \geq U^{(2)}(\xi) \geq \cdots \geq U^{(n)}(\xi) \geq U^{(n+1)}(\xi) \geq \cdots \geq \underline{U}(\xi).$$

从而, 存在一个有界非减函数 $U(\xi)$ 使得 $\lim_{n\to\infty} U^{(n)}(\xi) = U(\xi)$. 很容易看出, 对所有的 $n \geq 1$, $\xi \in \mathbb{R}$ 有 $|H(U^{(n)})(\xi)| \leq r(+\infty)(r(+\infty)+\alpha)$. 从而利用 Lebesgue's 控制收敛定理得

$$\begin{aligned}
U(\xi) = &\lim_{n\to\infty} U^{(n+1)}(\xi) = \lim_{n\to\infty} F(U^{(n)})(\xi)\\
= &\lim_{n\to\infty} (\Delta^{-1} H(U^{(n)})(\xi))\\
= &\frac{1}{d(\lambda_+ - \lambda_-)}\left[\int_{-\infty}^{\xi} \mathrm{e}^{\lambda_-(\xi-\eta)} H(U)(\eta)\mathrm{d}\eta + \int_{\xi}^{+\infty} \mathrm{e}^{\lambda_+(\xi-\eta)} H(U)(\eta)\mathrm{d}\eta\right]\\
= &F(U)(\xi).
\end{aligned}$$

即 $U(\xi) \in \Gamma_1$ 是算子 F 的不动点, 也就是说 $U(\xi)$ 是方程 (2) 的解.

接下来证明 $U(\xi)$ 满足边界条件 (5). 因 $U(\xi)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的有界非减函数, 记 $A_1 := \lim_{\xi\to-\infty} U(\xi)$ 和 $B_1 := \lim_{\xi\to+\infty} U(\xi)$. 显然有

$$0 < r(-\infty) \leq A_1 \leq r(+\infty),\ 0 < r(-\infty) \leq B_1 \leq r(+\infty).$$

由

$$\begin{aligned}
&\lim_{\xi\to-\infty} H(U)(\xi) = A_1(\alpha + r(-\infty) - A_1),\\
&\lim_{\xi\to+\infty} H(U)(\xi) = B_1(\alpha + r(+\infty) - B_1),
\end{aligned}$$

利用 L'Hôpital 法则可得

$$\begin{aligned}
A_1 = &\lim_{\xi\to-\infty} U(\xi) = \lim_{\xi\to-\infty} (\Delta^{-1} H(U)(\xi))\\
= &\lim_{\xi\to-\infty} \frac{1}{d(\lambda_+ - \lambda_-)}\left[\int_{-\infty}^{\xi} \mathrm{e}^{\lambda_-(\xi-\eta)} H(U)(\eta)\mathrm{d}\eta + \int_{\xi}^{+\infty} \mathrm{e}^{\lambda_+(\xi-\eta)} H(U)(\eta)\mathrm{d}\eta\right]\\
= &\lim_{\xi\to-\infty} \frac{1}{d(\lambda_+ - \lambda_-)}\left(\frac{H(U)(\xi)}{-\lambda_-} + \frac{H(U)(\xi)}{\lambda_+}\right)\\
= &A_1 + \frac{A_1[r(-\infty) - A_1]}{\alpha}.
\end{aligned}$$

于是 $A_1 = r(-\infty)$. 同理,

$$B_1 = \lim_{\xi\to+\infty} U(\xi) = B_1 + \frac{B_1[r(+\infty) - B_1]}{\alpha}.$$

所以 $B_1 = r(+\infty)$.

下面考虑情形(ii): $r(-\infty) = 0$. 记 $\tilde{r}(\xi)$ 满足文 [18]中的假设 (H), 那么存在 $\varphi(\xi)$ 是文 [18]中方程 (1.2) 的解. 显然, $\varphi(\xi)$ 总不大于 (2) 的解. 故令 $\overline{V}(\xi) = r(+\infty)$ 和 $\underline{V}(\xi) = \varphi(\xi)$. 根据定义 2.1, 不难验证 $\overline{V}(\xi)$ 和 $\underline{V}(\xi)$ 是 (2) 的一对有序上下解. 进一步, 定义如下先验集

$$\Gamma_2 := \{V \in BC(\mathbb{R}, \mathbb{R}) | \underline{V} \leq V \leq \overline{V}\},$$

类似于情形(i)的证明可知：存在 $V \in \Gamma_2$ 是算子 F 的不动点. 另外 $\xi \to -\infty$ 时, 同样使用 L'Hôpital 法则得到

$$\lim_{\xi \to -\infty} V(\xi) = 0.$$

而当 $\xi \to +\infty$ 时, 有 $\underline{V}(\xi) \to r(+\infty)$. 由夹逼准则得,

$$\lim_{\xi \to +\infty} V(\xi) = r(+\infty).$$

证毕.

基金项目

湖南省自然科学基金项目(编号：2020JJ4093)资助。

参考文献

[1] Fisher, R. (1937) The Wave of Advance of Advantageous Gene. *Annals of Human Genetics*, **7**, 355-369. https://doi.org/10.1111/j.1469-1809.1937.tb02153.x

[2] Kolomgorov, A., Petrovskii, I. and Piskunov, N. (1937) Study of a Diffusion Equation That Is Related to the Growth of a Quality of Matter, and Its Application to a Biological Problem. *Moscow University Mathematics Bulletin*, **1**, 1-26.

[3] Cantrell, R. and Cosner, C. (2003) Spatial Ecology via Reaction-Diffusion Equations. John Wiley and Sons, Chichester. https://doi.org/10.1002/0470871296

[4] Lam, K. and Ni, W. (2012) Uniqueness and Complete Dynamics of the Lotka-Volterra Competition Diffusion System. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **72**, 1695-1712. https://doi.org/10.1137/120869481

[5] 倪维明. 浅谈反应扩散方程[J]. 数学传播, 2016, 34(4): 17-26.

[6] 楼元. 空间生态学中的一些反应扩散方程模型[J]. 中国科学: 数学, 2015, 45(10): 1619-1634.

[7] Aronson, D. and Weinberger, H. (1978) Multidimensional Nonlinear Diffusion Arising in Population Genetics. *Advances in Mathematics*, **30**, 33-76. https://doi.org/10.1016/0001-8708(78)90130-5

[8] Weinberger, H. (1982) Long-Time Behavior of a Class of Biological Models. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, **13**, 353-396. https://doi.org/10.1137/0513028

[9] Billingham, J. and Needham, D. (1991) A Note on the Properties of a Family of Travelling-Wave Solutions Arising in Cubic Autocatalysis. *Dynamic Stability Systems*, **6**, 33-49. https://doi.org/10.1080/02681119108806105

[10] Hou, X., Li, Y. and Meyer, K. (2010) Traveling Wave Solutions for a Reaction Diffusion Equation with Double Degenerate Nonlinearities. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, **26**, 265-290. https://doi.org/10.3934/dcds.2010.26.265

[11] Skellam, J. (1951) Random Dispersal in Theoretical Populations. *Biometrika*, **38**, 196-218. https://doi.org/10.1093/biomet/38.1-2.196

[12] Berestycki, H., Diekmann, O., Nagelkerke, C.J., *et al.* (2009) Can a Species Keep Pace with a Shifting Climate? *Bulletin of Mathematical Biology*, **71**, 399-429. https://doi.org/10.1007/s11538-008-9367-5

[13] Elith, J., Kearney, M. and Phillips, S. (2010) The Art of Modelling Range-Shifting Species. *Methods in Ecology and Evolution*, **1**, 330-342. https://doi.org/10.1111/j.2041-210X.2010.00036.x

[14] Li, B., Bewick, S., Jin, S., *et al.* (2014) Persistence and Spread of a Species with a Shifting Habitat Edge. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **74**, 1397-1417. https://doi.org/10.1137/130938463

[15] Li, B., Bewick, S., Barnard, M. and Fagan, W. (2016) Persistence and Spreading Speeds of Integro-Difference Equations with an Expanding or Contracting Habitat. *Bulletin of Mathematical Biology*, **78**, 1337-1379. https://doi.org/10.1007/s11538-016-0180-2

[16] Fang, J., Lou, Y. and Wu, J. (2016) Can Pathogen Spread Keep Pace with Its Host Invasion? *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **76**, 1633-1657. https://doi.org/10.1137/15M1029564

[17] Berestycki, H. and Fang, J. (2018) Forced Waves of the Fisher-KPP Equation in a Shifting Environment. *Journal of Differential Equations*, **264**, 2157-2183. https://doi.org/10.1016/j.jde.2017.10.016

[18] Hu, H. and Zou, X. (2017) Existence of an Extinction Wave in the Fisher Equation with a Shifting Habitat. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **145**, 4763-4771. https://doi.org/10.1090/proc/13687

[19] Li, W., Wang, J. and Zhao, X. (2018) Spatial Dynamics of a Nonlocal Dispersal Population Model in a Shifting Environment. *Journal of Nonlinear Science*, **28**, 1189-1219. https://doi.org/10.1007/s00332-018-9445-2

[20] Wang, J. and Zhao, X. (2019) Uniqueness and Global Stability of Forced Waves in a Shifting Environment. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **147**, 1467-1481. https://doi.org/10.1090/proc/14235

[21] Zhang, Z., Wang, W. and Yang, J. (2017) Persistence versus Extinction for Two Competing Species under a Climate Change. *Nonlinear Analysis: Modelling and Control*, **22**, 285-302. https://doi.org/10.15388/NA.2017.3.1

[22] Yuan, Y., Wang, Y. and Zou, X. (2019) Spatial Dynamics of a Lotka-Volterra Model with a Shifting Habitat. *Discrete and Continuous Dynamical Systems, Series B*, **24**, 5633-5671.

[23] Wu, C., Wang, Y. and Zou, X. (2019) Spatial-Temporal Dynamics of a Lotka-Volterra Competition Model with Nonlocal Dispersal under Shifting Environment. *Journal of Differential Equations*, **267**, 4890-4921. https://doi.org/10.1016/j.jde.2019.05.019

[24] Yang, Y., Wu, C. and Li, Z. (2019) Forced Waves and Their Asymptotics in a Lotka-Volterra Cooperative Model under Climate Change. *Applied Mathematics and Computation*, **353**, 254-264. https://doi.org/10.1016/j.amc.2019.01.058

[25] Hu, H., Yi, T. and Zou, X. (2020) On Spatial-Temporal Dynamics of Fisher-KPP Equation with a Shifting Environment. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **148**, 213-221. https://doi.org/10.1090/proc/14659

[26] Hu, H., Deng, L. and Huang, J. (2021) Traveling Wave of a Nonlocal Dispersal Lotka-Volterra Cooperation Model under Shifting Habitat. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **500**, Article ID: 125100. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2021.125100