Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(7), 2007-2016
Published Online July 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.137206

一类二阶半正Dirichlet边值问题正解的存在性和多解性

李存丽

西北师范大学，数学与统计学院，甘肃 兰州

收稿日期：2023年6月11日；录用日期：2023年7月14日；发布日期：2023年7月21日

摘 要

考察二阶半正 Dirichlet 边值问题

$$\begin{cases} -u''(t) = \lambda f(u(t)) - \epsilon, \quad t \in (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \tag{P}$$

正解的存在性与多解性, 其中 λ 为正参数，$f \in C([0,\infty),[0,\infty))$，存在 $\wedge > 0$，使得 $\epsilon \in [0,\wedge]$。当 f 满足 $\lim\limits_{u\to 0^+} \frac{f(u)}{u} = \lim\limits_{u\to+\infty} \frac{f(u)}{u} = 0$，$\lim\limits_{u\to\infty} f(u) = \infty$ 时，运用不动点指数理论和上下解方法证明了存在常数 $\lambda^* > 0$，使得当 $\lambda > \lambda^*$ 时，问题 **(P)** 至少存在两个正解。

关键词

正解，半正问题，不动点指数理论，上下解

Existence and Multiplicity of Positive Solutions for a Class of Second-Order Dirichlet Boundary Value Problems

Cunli Li

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

Received: Jun. 11^{th}, 2023; accepted: Jul. 14^{th}, 2023; published: Jul. 21^{st}, 2023

文章引用: 李存丽. 一类二阶半正Dirichlet边值问题正解的存在性和多解性[J]. 理论数学, 2023, 13(7): 2007-2016.
DOI: 10.12677/pm.2023.137206

Abstract

In this paper, we are considered with the existence and multiplicity of positive solutions for second-order Dirichlet boundary value problems

$$\begin{cases} -u''(t) = \lambda f(u(t)) - \epsilon, & t \in (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \tag{P}$$

where λ is a positive parameter, $f \in C([0,\infty),[0,\infty))$, there exists $\wedge > 0$, such that $\epsilon \in [0,\wedge]$. When f satisfies $\lim\limits_{u\to 0^+} \frac{f(u)}{u} = \lim\limits_{u\to+\infty} \frac{f(u)}{u} = 0$ and $\lim\limits_{u\to\infty} f(u) = \infty$, we apply a fixed point index theorem and the method of the upper and lower solutions to prove that there exists $\lambda^* > 0$ such that the problem (P) has at least two positive solutions for $\lambda > \lambda^*$.

Keywords

Positive Solutions, Semi-Positone Problem, Fixed Point Index, Upper and Lower Solutions

1. 引言及主要结果

微分方程 Dirichlet 边值问题在应用数学和数学物理方面有很多的应用, 并已有许多重要成果 [1–10], 其中对正问题的研究相对较多 [1–9]. 特别地, 基于不动点指数理论, Erbe 和 Wang [1]研究了二阶边值问题

$$\begin{cases} -u''(t) = f(t,u), & t \in (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

多个正解的存在性, 并在非线性项非负的情形下得到了定理 A.

定理 A 假设 $f \in C([0,\infty),[0,\infty))$, 问题 (1.1) 至少存在两个正解, 若下面条件成立:

(H1) $\lim\limits_{u\to 0^+} \max\limits_{t\in[0,1]} \frac{f(t,u)}{u} = 0$, $\lim\limits_{u\to+\infty} \max\limits_{t\in[0,1]} \frac{f(t,u)}{u} = 0$;

(H2)存在 $l > 0$ 使得 $\sigma l \le u \le l$,

$$f(t,u) \ge \lambda l,$$

其中 $\lambda^{-1}=\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}}G(\frac{1}{2},s)ds$, 且

$$\sigma=\min\{\frac{\gamma+4\delta}{4(\gamma+\delta)},\frac{\alpha+4\beta}{4(\alpha+\beta)}\}.$$

然而, 对半正问题的研究相对较少 [10]. 事实上, 这类问题的非线性项可以取负值, 所以研究正问题时有效的方法一般不能直接用于研究半正问题. 例如, 利用上下解方法研究正问题时, 0 就是一个非负的下解, 从而只需要找一个正的上解就可以了. 但在半正情形时, 0 就不再是问题的下解. 此外, Lions 曾指出, 在数学上半正问题很有挑战性 [11].

现在, 有一个自然的问题是, 当问题 (1.1) 受到轻微扰动成为一个半正问题时, 二阶 Dirichlet 问题正解的存在性结果如何? 基于此, 本文研究二阶半正 Dirichlet 边值问题

$$\begin{cases}-u''(t)=\lambda f(u(t))-\epsilon, & t\in(0,1),\\ u(0)=u(1)=0\end{cases}\tag{1.2}$$

正解的存在性, 其中 λ 为正参数, $f\in C([0,\infty),[0,\infty))$. 记

$$f_0:=\lim_{s\to0^+}\frac{f(s)}{s},\quad f_\infty:=\lim_{s\to+\infty}\frac{f(s)}{s}.$$

本文总假定 :

(A1) $f\in C([0,\infty),[0,\infty))$ 且满足 $\lim\limits_{u\to\infty}f(u)=\infty$;

(A2) $f_0=f_\infty=0$.

本文主要结果如下:

定理 1.1 假设 (A1)–(A2) 成立, 则存在 $\lambda^*>0$, 使得当 $\lambda>\lambda^*$ 时, 边值问题 (1.2) 至少存在两个正解.

注 1.1 当 $\lambda\equiv1$ 且 $\epsilon\equiv0$ 时, 问题 (1.2) 可以退化为问题 (1.1), 因此, 定理 1.1 推广了文献 [1]的定理 A.

注 1.2 Erbe 和 Wang 运用不动点指数理论得到了正问题 (1.1) 正解的存在性. 当 $\epsilon>0$ 时, 问题 (1.2) 为半正问题, 锥上的理论不能直接使用, 本文将运用上下解方法和 Leray-Schauder 延拓定理得到问题 (1.2) 多个正解的存在性结果.

2. 预备知识

令空间 $E:=C[0,1]$, 其在范数 $\|u\|_\infty=\max\limits_{t\in[0,1]}|u(t)|$ 下构成 Banach 空间.

引理 2.1 [12] 设 X 是一个 Banach 空间, $K\subseteq X$ 是一个锥. 对 $p>0$, 定义 $K_p=\{x\in K\mid\|x\|\le p\}$. 假设 $F:K_p\to K$ 是一个全连续算子且满足当 $x\in\partial K_p=\{x\in K\mid\|x\|=p\}$ 时, $Fx\neq x$, 则

(i)若 $\|x\| \le \|Fx\|, \forall x \in \partial K_p$, 则

$$i(F, K_p, K) = 0;$$

(ii)若 $\|x\| \ge \|Fx\|, \forall x \in \partial K_p$, 则

$$i(F, K_p, K) = 1.$$

引理 2.2 设 $m \in C([0,1],[0,\infty))$, 则二阶线性 Dirichlet 边值问题

$$\begin{cases} -\omega''(t) = m(t), & t \in (0,1), \\ \omega(0) = \omega(1) = 0 \end{cases}$$

存在唯一解

$$\omega(t) = \int_0^1 G(t,s)m(s)ds, \qquad t \in [0,1],$$

其中

$$G(t,s) = \begin{cases} (1-t)s, & 0 \le s \le t \le 1, \\ (1-s)t, & 0 \le t \le s \le 1. \end{cases}$$

此外, 令 $q(t) = \min\{t, 1-t\}$, 则

$$\omega(t) \ge 2\|\omega\|_\infty q(t), \qquad t \in [0,1].$$

证明 首先容易验证

$$\omega(t) = \int_0^1 G(t,s)m(s)ds, \qquad t \in [0,1].$$

接下来, 我们证明

$$\omega(t) \ge 2\|\omega\|_\infty q(t), \qquad t \in [0,1].$$

令 $\|\omega\|_\infty = \omega(t_0)$, $t_0 \in (0,1)$. 易知, $t_0 = \frac{1}{2}$. 事实上,
若 $t \le \frac{1}{2} \le s$, 则

$$\frac{G(t,s)}{G(\frac{1}{2},s)} = \frac{(1-s)t}{(1-s)\frac{1}{2}} = 2t;$$

若 $t \le s \le \frac{1}{2}$, 则

$$\frac{G(t,s)}{G(\frac{1}{2},s)} = \frac{(1-s)t}{(1-\frac{1}{2})s} \ge \frac{t}{s} \ge 2t;$$

若 $s \le t \le \frac{1}{2}$, 则

$$\frac{G(t,s)}{G(\frac{1}{2},s)} = \frac{(1-t)s}{(1-\frac{1}{2})s} = 2(1-t);$$

若 $\frac{1}{2} \le s \le t$, 则

$$\frac{G(t,s)}{G(\frac{1}{2},s)} = \frac{(1-t)s}{(1-s)\frac{1}{2}} \ge 2(1-t).$$

定义 $q(t)=\min\{t,1-t\}$, 显然
$$\frac{G(t,s)}{G(t_0,s)}\geq 2q(t).$$
因此,
$$\begin{aligned}\omega(t)&=\int_0^1 G(t,s)m(s)ds\\&=\int_0^1\frac{G(t,s)}{G(\frac{1}{2},s)}G(\frac{1}{2},s)m(s)ds\\&\geq 2q(t)\int_0^1 G(\frac{1}{2},s)m(s)ds\\&=2\|\omega\|_\infty q(t).\end{aligned}$$

3. 主要结果的证明

首先考虑正问题
$$\begin{cases}-u''(t)=\lambda f(u(t)), & t\in(0,1),\\ u(0)=u(1)=0\end{cases}\tag{3.1}$$
正解的存在性. 事实上, 正问题 (3.1) 存在一个正解 $u=u(t)$ 当且仅当 u 是算子方程
$$u(t)=\lambda\int_0^1 G(t,s)f(u(s))ds:=Au(t),\quad u\in C[0,1]$$
的一个不动点.

定义 E 中的锥
$$K=\{u\in C[0,1]:\ u(t)\geq 2\|u\|_\infty q(t),\ t\in[0,1]\}.$$
若 $u\in K$, 则
$$\begin{aligned}Au(t)&=\lambda\int_0^1 G(t,s)f(u(s))ds\\&\geq\lambda\int_0^1\frac{G(t,s)}{G(\frac{1}{2},s)}G(\frac{1}{2},s)f(u(s))ds\\&\geq 2\lambda q(t)\int_0^1 G(\frac{1}{2},s)f(u(s))ds\\&=2q(t)\|Au\|_\infty.\end{aligned}$$
因此, $A(K)\subset K$. 此外, 由 Arzèla-Ascoli 定理知, $A:K\to K$ 为全连续算子.

由 (A2) , 对任意的 $\eta>0$, 存在 $M_1>0$, 使得当 $u\geq 0$ 时,
$$f(u)\leq M_1+\eta u.$$

当 $u \in K$ 时,

$$\begin{aligned} Au(t) &= \lambda \int_0^1 G(t,s)f(u(s))ds \\ &\le \lambda \int_0^1 G(t,s)(M_1 + \eta u(s))ds. \end{aligned}$$

取 $\eta > 0$ 充分小且 $R > p$ 充分大, 可得当 $u \in \partial K_p$ 时,

$$\|Au\|_\infty < \|u\|_\infty.$$

因此, 由引理 2.1,

$$i(A, K_R, K) = 1. \tag{3.2}$$

同理, 存在 $r > 0, r < p$, 有

$$i(A, K_r, K) = 1. \tag{3.3}$$

另一方面, 当 $u \in \partial K_p$ 时, 有

$$u(t) \ge 2\|u\|_\infty q(t) = 2pq(t).$$

由 (A1), 存在 $N > 0$, $M_2 > 0$, 使得当 $u > N$ 时, 有 $f(u) \ge M_2$.
因此, 当 $u \in \partial K_p$ 时,

$$\begin{aligned} (Au)(\frac{1}{2}) &= \lambda \int_0^1 G(\frac{1}{2},s)f(u(s))ds \\ &\ge \lambda M_2 \int_0^1 G(\frac{1}{2},s)ds \\ &\ge \|u\|_\infty = p. \end{aligned}$$

其中,

$$\lambda > p(M_2 \int_0^1 G(\frac{1}{2},s)ds)^{-1} := \lambda^*.$$

显然, 当 $u \in \partial K_p$ 时, $Au \ne u$. 由引理 2.2, 有

$$i(A, K_p, K) = 0. \tag{3.4}$$

由不动点指数的可加性及 (3.2)–(3.4) 得

$$i(A, K_R \backslash \mathring{K}_p, K) = 1,$$

且

$$i(A, K_R \backslash \mathring{K}_r, K) = -1.$$

因此, A 有两个正的不动点, 分别在 $K_R \backslash \mathring{K}_p$, $K_R \backslash \mathring{K}_r$ 中. 即, 正问题 (3.1) 至少存在两个正解.

定义 3.1 [13]　设 $\alpha \in C^2[0,1]$ 满足不等式

$$\begin{cases} -\alpha''(t) \ge \lambda f(\alpha(t)), \quad t \in (0,1), \\ \alpha(0) \ge 0,\ \alpha(1) \ge 0, \end{cases}$$

则称 α 是问题 (3.1) 的上解.

定义 3.2 [13]　设 $\beta \in C^2[0,1]$ 满足不等式

$$\begin{cases} -\beta''(t) \le \lambda f(\beta(t)), \quad t \in (0,1), \\ \beta(0) \le 0,\ \beta(1) \le 0, \end{cases}$$

则称 β 是问题 (3.1) 的下解.

现在构造正问题 (3.1) 的两对上下解. 当 $\lambda > \lambda^*$ 时, 存在 $\zeta > 0$ 充分小, 使得 $\lambda - \zeta > \lambda^*$, 则问题

$$\begin{cases} -u''(t) = (\lambda - \zeta) f(u(t)), \quad t \in (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

显然有两个解 $\alpha_1,\ \alpha_2$, 且 $\alpha_1,\ \alpha_2$ 是问题 (3.1) 的两个严格下解. 不失一般性, 令 $\alpha_1 > \alpha_2$. 同样地, 存在 $M_3 > 0$, 使得 $\lambda + M_3 > \lambda^*$, 则问题

$$\begin{cases} -u''(t) = (\lambda + M_3) f(u(t)), \quad t \in (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

显然有两个解 $\beta_1,\ \beta_2$, 且 $\beta_1,\ \beta_2$ 是问题 (3.1) 的两个严格上解. 不失一般性, 令 $\beta_1 > \beta_2$. 注意到, $\alpha_1 \ll \beta_1$ 且 $\beta_2 \ll \alpha_2$.

定义算子

$$Lu(t) = \lambda \int_0^1 G(t,s)(f(u(s)) - \epsilon) ds.$$

定义 E 的有界开子集:

$$U_{\alpha_1}^{\beta_1} = \{u \in E : \alpha_1 \ll u \ll \beta_1\},$$

$$U_{\beta_2}^{\alpha_2} = \{u \in E : \beta_2 \ll u \ll \alpha_2\},$$

则

$$\deg(I - L(0,\cdot), U_{\alpha_1}^{\beta_1}, 0) = 1,$$

$$\deg(I - L(0,\cdot), U_{\beta_2}^{\alpha_2}, 0) = -1.$$

令 $\Sigma := \{(\lambda,u) \mid (\lambda,u) \in (0,\infty) \times E,\ u$ 是正问题 (3.1) 的解$\}$. 易见存在一个连通分支 $\xi \in \Sigma$, 满足

$$\xi \cap \{(\lambda,u) \in \Sigma \mid \lambda \ge \lambda^*, \|u\|_\infty = \rho_0\} = \emptyset,$$

其中 $\lambda^*,\ \rho_0$ 是常数.

引理 3.1 假设 $U_1 = \{u \mid (\lambda, u) \in \xi$ 且 $\|u\|_\infty > \rho_0\}, U_2 = \{u \mid (\lambda, u) \in \xi \backslash U_1\}$, 则 U_1, U_2 都是有限集.

证明 由文献 [14]得, $U_1,\ U_2 \neq \emptyset$ 且 $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. 首先证明 U_1 是一个有限集. 假设 U_1 是一个无限集, 取任意点 $u_1 \in U_1$, 并令 $A_1 := \{u_1\}, B_1 := U_1 \backslash A_1$, 则 $A_1,\ B_1$ 是 Σ 的闭子集且 $A_1 \cap B_1 = \emptyset$. 由文献 [15], 存在两个不相交的紧集 $\widetilde{A_1},\ \widetilde{B_1} \subset U_1$, 使得 $A_1 \subset \widetilde{A_1},\ B_1 \subset \widetilde{B_1}$ 且 $d(\widetilde{A_1}, \widetilde{B_1}) > 0$.

再取任意点 $u_2 \in \widetilde{B_1}$, 并令 $A_2 := \{u_2\},\ B_2 := \widetilde{B_1} \setminus A_2$. 类似地, 存在两个不相交的紧集 $\widetilde{A_2},\ \widetilde{B_2} \subset U_1$, 使得 $A_2 \subset \widetilde{A_2},\ B_2 \subset \widetilde{B_2}$ 且 $d(\widetilde{A_2}, \widetilde{B_2}) > 0$.

重复上述操作, 可得到一个序列 $\{\widetilde{A}_n\}$, 满足 $\widetilde{A}_{n+1} \subset \widetilde{A}_n,\ d(\widetilde{A_n}, \widetilde{A}_{n+1}) > 0$. 这与 U_1 是无限集矛盾. 同理可证得, U_2 是一个有限集.

由引理 3.1 可知, 总能找到两个解 $u_1 \in U_1, u_2 \in U_2$, 进而由文献 [15] 可得, 存在 u_1 的邻域 V_1 和 u_2 的邻域 V_2 满足 $V_1 \subset U_{\alpha_1}^{\beta_1},\ V_2 \subset U_{\beta_2}^{\alpha_2}$ 且 $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ 使得

$$\deg(I - L(0, \cdot), V_1, 0) = 1,\ \deg(I - L(0, \cdot), V_2, 0) = -1,$$

$$\deg(I - L(0, \cdot), \partial V_1, 0) = \deg(I - L(0, \cdot), \partial V_2, 0) = 0.$$

命题 3.1 存在 $\varepsilon_1 > 0$, 使得

$$\deg(I - L(\epsilon, \cdot), V_1, 0) = 1, \quad 0 \leq \epsilon \leq \epsilon_1.$$

证明 易证当 $u \in \partial V_1$ 且 $0 \leq \epsilon \leq \epsilon_1$ 时, $(I - M)(\epsilon, u) \neq 0$. 否则, 存在一个序列 $\{(\epsilon_j, u_j)\}$ 且 $\epsilon_j \to 0,\ u_j \in \partial V_1$, 使得 $u_j = M(\epsilon_j, u_j)$. 根据 Arzèla-Ascoli 定理得, 如果有必要再取子序列并重新标记, $u_j \to u,\ u \in \partial V_1$. 因为 $M(\epsilon, \cdot)$ 是紧算子, 所以 $u = M(0, u)$, 这与 $\deg(I - L(0, \cdot),\ \partial V_1, 0) = 0$ 矛盾.

类似地, 可得如下结果.

命题 3.2 存在 $\varepsilon_2 > 0$, 使得

$$\deg(I - L(\epsilon, \cdot), V_2, 0) = -1, \quad 0 \leq \epsilon \leq \epsilon_2.$$

定理 1.1 的证明 结合上述命题及 Leray-Schauder 延拓定理可得, 存在 $M(\epsilon, u) = u,\ \epsilon > 0$ 的解的两个连通子集 $\Gamma_1,\ \Gamma_2$ 使得 $(0, u_1) \in \overline{\Gamma}_1$ 且 $(0, u_2) \in \overline{\Gamma}_2$. 此外, 存在 $\wedge := \min\{\epsilon_1, \epsilon_2\} > 0$ 使得当 $0 \leq \epsilon \leq \wedge$ 时这些解都是正的.

4. 应用

例 考虑二阶 Dirichlet 边值问题

$$\begin{cases} -u''(t) = \lambda u^{\frac{1}{2}} \sin u - \epsilon, \quad t \in (0, 1), \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \tag{4.1}$$

解的存在性, 其中 $\lambda > 0$ 是参数, ϵ 是充分小的正数.

解 这里取 $f(u(t)) = u^{\frac{1}{2}} \sin u$.

显然 $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ 连续, 且 $\lim\limits_{u\to\infty} u^{\frac{1}{2}} \sin u = \infty$, 则 (A1) 成立.

又

$$f_0 = \lim_{u\to 0^+} \frac{u^{\frac{1}{2}} \sin u}{u} = \lim_{u\to 0^+} \frac{\sin u}{u^{\frac{1}{2}}} = 0, \quad f_\infty = \lim_{u\to +\infty} \frac{u^{\frac{1}{2}} \sin u}{u} = \lim_{u\to +\infty} \frac{\sin u}{u^{\frac{1}{2}}} = 0,$$

则 (A2) 成立. 根据定理 1.1 可知, 存在 $\lambda^* > 0$, 使得当 $\lambda > \lambda^*$ 时, 问题 (4.1) 至少存在两个正解.

基金项目

国家自然科学基金资助项目(批准号: 12061064).

参考文献

[1] Erbe, L.H. and Wang, H.Y. (1994) On the Existence of Positive Solutions of Ordinary Differential Equations. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **120**, 743-748. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1994-1204373-9

[2] Li, Y.X. (2003) Positive Solutions of Second-Order Boundary Value Problems with Sign-Changing Nonlinear Terms. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **282**, 232-240. https://doi.org/10.1016/S0022-247X(03)00141-0

[3] Efendiev, B.I. (2018) The Dirichlet Problem for an Ordinary Continuous Second-Order Differential Equation. *Matematicheskie Zametki*, **103**, 295-302. https://doi.org/10.4213/mzm11010

[4] Zhao, J. and Wang, Y.C. (2017) Nontrivial Solutions of Second-Order Singular Dirichlet Systems. *Boundary Value Problems*, **2017**, Article No. 180. https://doi.org/10.1186/s13661-017-0911-9

[5] Alkhutov, Y. and Borsuk, M. (2017) The Dirichlet Problem in a Cone for Second-Order Elliptic Quasi-Linear Equation with The p-Laplacian. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **449**, 1351-1367. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2016.12.064

[6] Gritsans, A., Sadyrbaev, F. and Yermachenko, I. (2016) Dirichlet Boundary Value Problem for the Second-Order Asymptotically Linear System. *International Journal of Differential Equations*, **2016**, Article ID: 5676217. https://doi.org/10.1155/2016/5676217

[7] Wan, H.T. (2015) The Second-Order Expansion of Solutions to a Singular Dirichlet Boundary Value Problem. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **427**, 140-170. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2015.02.031

[8] Dumanyan, V.Z. (2014) On the Solvability of the Dirichlet Problem for a Second-Order Elliptic Equation. Doklady. *Natsional'naya Akademiva Nauk Armenii*, **114**, 295-308.

[9] Zhou, J.W. and Li, Y.K. (2009) Existence and Multiplicity of Solutions for Some Dirichlet Problems with Impulsive Effects. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods Applications*, **71**, 2856-2865. https://doi.org/10.1016/j.na.2009.01.140

[10] Castro, A. and Shivaji, R. (1988) Non-Negative Solutions for a Class of Non-Positone Problems. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, **108**, 291-302. https://doi.org/10.1017/S0308210500014670

[11] Lions, P.L. (1982) On the Existence of Positive Solutions of Semilinear Elliptic Equations. *Society of Industry and Applied Mathematics*, **24**, 441-467. https://doi.org/10.1137/1024101

[12] Guo, D. and Lakshmikantham, V. (1988) Nonlinear Problems in Abstract Cones. Academic Press, Orlando, FL.

[13] Habets, P. and Zanolin, F. (1994) Upper and Lower Solutions for a Generalized Emden-Fowler Equation, *Journal of Mathematics Analysis and Applications*, **181**, 684-700. https://doi.org/10.1006/jmaa.1994.1052

[14] Zhang, X. and Feng, M. (2019) Bifurcation Diagrams and Exact Multiplicity of Positive Solutions of One-Dimensional Prescribed Mean Curvature Equation in Minkowski Space. *Communications in Contemporary Mathematics*, **21**, Article 1850003. https://doi.org/10.1142/S0219199718500037

[15] Whyburn, G.T. (1958) Topological Analysis. Princeton Mathematical Series, No. 23. Princeton University Press, Princeton, NJ.