Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(9), 2725-2736
Published Online September 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.139280

分裂可行性问题的超松弛投影算法及其强收敛性

薛中会*，**陈 昱**

上海出版印刷高等专科学校，信息与智能工程系，上海

收稿日期：2023年8月17日；录用日期：2023年9月19日；发布日期：2023年9月26日

摘 要

分裂可行性问题(Split feasibility problem, SFP)是寻找与非空闭凸集距离最近的点，并使得该点在线性变换下的像与另一非空闭凸集的距离最近。作为一类产生于工程实践的重要优化问题，在医学、信号处理和图像重建领域中被广泛应用。本文在Hilbert空间中，提出一种求解分裂可行性问题的超松弛投影算法。首先在CQ算法上引入改造的Halpern迭代序列和多个参数；然后在一定条件下，证明算法的强收敛性；数值实验结果验证了提出算法的有效性。

关键词

分裂可行性问题，投影算法，强收敛，Hilbert空间

Strong Convergence of Over Relaxation Projection Algorithms for Solving Split Feasibility Problems

Zhonghui Xue*, **Yu Chen**

Department of Information and Intelligent Engineering, Shanghai Publishing and Printing College, Shanghai

Received: Aug. 17th, 2023; accepted: Sep. 19th, 2023; published: Sep. 26th, 2023

Abstract

The splitting feasible problem is to find the point closest to a non-empty closed convex set and make the image of the point under linear transformation closest to another non-empty closed

*通讯作者。

文章引用: 薛中会, 陈昱. 分裂可行性问题的超松弛投影算法及其强收敛性[J]. 理论数学, 2023, 13(9): 2725-2736.
DOI: 10.12677/pm.2023.139280

convex set. Split feasible problem is an important optimization problem, arising from engineering practice, and is widely used in the fields of medicine, signal processing and image reconstruction. In this paper, an over-relaxed projection algorithm is presented for solving the split feasible problem in Hilbert space. Firstly, the modified Halpern iteration sequence and several parameters are introduced into the CQ algorithm. Then, under certain conditions, the strong convergence of the algorithm is proved. Finally, the numerical results show that the proposed algorithm is effective.

Keywords

Split Feasibility Problem, Projection Algorithm, Strong Convergence, Hilbert Spaces

1. 引言

设 C、Q 分别是 Hilbert 空间 H_1、H_2 上的非空闭凸子集，$A: H_1 \to H_2$ 是一个有界线性算子。所谓分裂可行性问题(Split Feasibility Problem, SFP)就是要找到一点 x，满足

$$x \in C, Ax \in Q. \tag{1.1}$$

该问题是由 Censor 和 Elfving [1]首次在有限维 Hilbert 空间中提出的，且在医学、信号处理、图像重建等方面被广泛应用[2] [3] [4] [5]。本文中，I 表示恒定算子，定义 $f: H_1 \to \mathbb{R}$ 为

$$f\left(x^k\right) = \frac{1}{2}\left\|\left(I - P_Q\right)Ax^k\right\|^2,$$

其中 P_Q 表示在闭凸集 Q 上的投影。凸函数 $f(x)$ 是可微的其梯度为

$$\nabla f(x) = A^*\left(I - P_Q\right)Ax,$$

其中 A^* 是线性算子 A 的伴随算子。

为了解决 SFP 问题，很多学者提出各种各样的算法[6]-[11]。其中部分学者使用多重投影的方法得到求解 SFP 的迭代算法，但这些迭代算法需要计算矩阵的逆，矩阵逆的计算需要花费大量时间并且不容易求解，进而会影响算法的迭代效率。为了克服上述不足，Byrne [7]首先提出了 CQ 算法，迭代公式为

$$x^{k+1} = P_C\left(x^k - \lambda A^*\left(I - P_Q\right)Ax^k\right), \tag{1.2}$$

其中步长 $\lambda \in \left(0, \frac{2}{\|A\|^2}\right)$。受 CQ 算法的影响，Wang 和 Xu [12]通过引入系数 α_k，利用压缩算子去逼近一个非扩张算子，提出了修正的 CQ 算法

$$x^{k+1} = P_C\left[\left(1 - \alpha_k\right)\left(x^k - \lambda A^*\left(I - P_Q\right)Ax^k\right)\right]. \tag{1.3}$$

其中，$\{\alpha_k\} \subset (0,1)$，当 $\{\alpha_k\}$ 满足以下条件时：

1) $\lim_{k \to \infty} \alpha_k = 0$；

2) $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k = \infty$；

3) $\sum_{k=0}^{\infty}\left|\alpha_{k+1}-\alpha_k\right|<\infty$，或者 $\lim_{k\to\infty}\frac{\left|\alpha_{k+1}-\alpha_k\right|}{\alpha_k}=0$。

证明了(1.3)式强收敛于分裂可行性问题的最优解。López 等人[13]在 CQ 算法上引入新的选择步长的方法，步长 $\lambda_k=\frac{\rho_k f_k\left(x^k\right)}{\left\|\nabla f_k\left(x^k\right)\right\|^2}$，其中 $\rho_k\in(0,4)$，进而证明了具有此步长的算法(1.2)式弱收敛于 SFP 的解。在此基础上又引入 Halpern [14]迭代思想，迭代公式为

$$x^{k+1}=\alpha_k u+\left(1-\alpha^k\right)P_C\left(x^k-\lambda_k\nabla f_k\left(x^k\right)\right), \tag{1.4}$$

其中，u 是 C 的不动点，$\alpha_k\subset[0,1]$，$\nabla f(x)=A^*\left(I-P_Q\right)Ax$，$\lambda_k=\frac{\rho_k f_k\left(x^k\right)}{\left\|\nabla f_k\left(x^k\right)\right\|^2}$，并证明了(1.4)式强收敛于 SFP 的最优解。

本文通过在 CQ 算法上引入改造的 Halpern 迭代序列和多个参数，提出了一种求解分裂可行性问题的超松弛投影算法，并在一定条件下，证明了该算法的强收敛性。

2. 预备知识

本文中假设 SFP 有解，设 H 是 Hilbert 空间，$\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示内积，$\|\cdot\|$ 表示对应的范数，I 表示 Hilbert 空间上的单位算子，$Fix(T):=\{x|x=Tx\}$ 表示算子 T 的不动点集合。$\{x^k\}$ 是 H 中的一个序列，$x\in H$，$x^{k_j}\in x^k$ 是 $\{x^k\}$ 的子序列，“$\mapsto$”表示弱收敛，“$\to$”表示强收敛。$\omega_\omega\left(x^k\right):=\left\{z\in H\left|\lim_{j\to\infty}x^{k_j}\mapsto z\right.\right\}$ 表示 x^k 的弱收敛簇。

定义 2.1 [8]令 $F:H\to H$ 为非线性算子，称

F 是非扩张算子，如果

$$\|Fx-Fy\|\le\|x-y\|,\forall x,y\in H;$$

F 是固定非扩张算子，如果

$$\|Fx-Fy\|^2\le\langle x-y,Fx-Fy\rangle,\forall x,y\in H;$$

F 是 α-平均算子，如果

$$T=(1-\alpha)I+\alpha R,$$

其中 $\alpha\in(0,1)$，I 是单位算子，$R:H\to H$ 是非扩张算子。

F 是 L-Lipschitz 连续，其中 $L\ge 0$，如果 $\forall x,y\in H$

$$\|Fx-Fy\|\le L\|x-y\|,$$

如果，$0\le L<1$，则 F 称为 L-压缩映像

定义 2.2 设 $C\subseteq H$ 是非空闭凸集，对任意 $x\in H$，x 到 C 上的投影定义为：

$$P_C(x)=\arg\min\{\|y-x\|\,|\,y\in C\}.$$

显然，若 $x\in C$，则 $x=P_C(x)$。投影 P_C 具有下面重要的性质。

引理 2.1 设 $C\subseteq H$，是非空闭凸集，则对任意 $x,y\in H$，有

$$\langle x-P_C(x),z-P_C(x)\rangle\le 0,\forall z\in C;$$

$$\langle P_C(y)-P_C(x),y-x\rangle\ge\|P_C(y)-P_C(x)\|^2;$$

$$\|P_C(x)-z\|^2 \le \|x-z\|^2 - \|P_C(x)-x\|^2, \forall z \in C;$$

$$\|P_C(x)-P_C(y)\|^2 \le \|x-y\|^2 - \|(1-P_C)x-(1-P_C)y\|^2;$$

$$\|P_C(x)-P_C(y)\|^2 \le \|x-y\|.$$

引理 2.2 设 $x,y \in H$， $t,s \in R$。其中 R 是实数集。则有

$$\|x+y\|^2 \le \|x\|^2 + 2\langle y, x+y\rangle;$$

$$\|tx+sy\|^2 = t(t+s)\|x\|^2 + s(t+s)\|y\|^2 - st\|x-y\|^2;$$

$$\|tx+(1-t)y\|^2 = t\|x\|^2 + (1-t)\|y\|^2 - t(1-t)\|x-y\|^2.$$

引理 2.3 [15]设 $\nabla f(x) = A^*(I-P_Q)Ax$ 是 Lipschitz 连续，问题(1.1)的解集是非空的。当且仅当 $z = P_C(I-\alpha\nabla f)z$， $z \in H$ 时，z 是问题(1.1)的解。

引理 2.4 [16]设 $T: H \to H$ 是 $Fix(T) \ne \emptyset$ 的非扩张映射。如果 $\{x^k\}$ 是 H 中的一个弱收敛于 x^* 的序列，并且 $\{(1-T)x^k\}$ 强烈收敛到 0，则 $\lim_{k\to\infty}(1-T)x^k = 0$。

引理 2.5 [16]假设 $\{s^k\}$ 是满足以下条件的非负实数序列

$$s^{k+1} \le (1-\gamma_k)s^k + \gamma_k\delta_k + \beta_k, k \ge 0,$$

其中 $\{\gamma_k\}$，$\{\beta_k\}$，$\{\delta_k\}$ 满足条件

1) $\{\gamma_k\} \subset [0,1]$， $\sum_{k=0}^{\infty}\gamma_k = \infty$；

2) $\limsup_{k\to\infty}\delta_k \le 0$；

3) $\beta_k \ge 0$， $\sum_{k=0}^{\infty}\beta_k < \infty$。

则 $\lim_{k\to\infty} s^k = 0$。

引理 2.6 [15] [17]设 $f(x) := \frac{1}{2}\|Ax - P_Q Ax\|^2$， $\nabla f(x) = A^*(I-P_Q)Ax$，$L$ 是 $\nabla f(x)$ 的 Lipschitz 常数，有

$$\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\| \le L\|x-y\|, \forall x,y \in H,$$

对于任何 $\alpha \in \left(0, \frac{2}{L}\right)$， $P_C(I-\alpha\nabla f)$ 是 $\frac{2+\alpha L}{4}$-平均算子[14]，也是非扩张的。

证明： 设 $P_C(I-\alpha\nabla f) = \left(1-\frac{2+\alpha L}{4}\right)I + \frac{2+\alpha L}{4}$。

$$\begin{aligned}
&\|P_C(I-\alpha\nabla f)(x) - P_C(I-\alpha\nabla f)(y)\| \\
&= \left\|\left(1-\frac{2+\alpha L}{4}\right)(x) + \frac{2+\alpha L}{4}R(x) - \left(1-\frac{2+\alpha L}{4}\right)(y) - \frac{2+\alpha L}{4}R(y)\right\| \\
&\le \left(1-\frac{2+\alpha L}{4}\right)\|x-y\| + \frac{2+\alpha L}{4}\|R(x)-R(y)\| \\
&\le \|x-y\|.
\end{aligned}$$

其中 $R: H \to H$ 是非扩张的。

3. 超松弛投影算法及其强收敛性

以下将提出一种求解分裂可行问题的超松弛投影算法，并证明其强收敛性。该算法过程如下：

算法

设 C、Q 分别是 Hilbert 空间 H_1，H_2 上的非空闭凸子集，$A:H_1\to H_2$ 是一个有界线性算子。对于任意选取的初始点 $x^0\in H_1$，算法迭代序列为

$$x^{k+1}:=t_k h\left(x^k\right)+\gamma_k x^k+\lambda_k P_C\left(x^k-\alpha_k D\left(x^k\right)\nabla f\left(x^k\right)\right)+e_k, k\geq 0. \tag{3.1}$$

其中 $\nabla f(x)=A^*\left(1-P_Q\right)Ax$，$\{t_k\}\subset(0,1)$，$\{\gamma_k\}\subset(-1,1)$，$\{\lambda_k\}\subset(0,2)$，$t_k+\gamma_k+\lambda_k=1$。$h:H_1\to\mathbb{R}$ 是 φ-压缩映射，且 $\varphi\in[0,1)$。$D(x):H_1\to\mathbb{R}$ 是线性有界算子且满足

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left\|\nabla f(x)-D\nabla f(x)\right\|:=\sum_{k=0}^{\infty}\left\|\nabla f(x)-D(x)\nabla f(x)\right\|=:\sum_{k=0}^{\infty}\left\|\theta(x)\right\|<\infty. \tag{3.2}$$

$\{e_k\}$ 表示误差项，且

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left\|e_k\right\|<\infty. \tag{3.3}$$

以下引理对于证明算法 3.1 的收敛性具有重要作用。

引理 3.1 设 $f:H_1\to\mathbb{R}$，$0<\alpha<\frac{2}{L}$，其中 $L\geq 0$ 为可微凸函数 $f(x)$ 的梯度 ∇f 的 Lipschitz 常数。设 $T:=P_C(I-\alpha\nabla f)$，则有

$$\|Tx-Ty\|^2\leq\|x-y\|^2-\frac{2-\alpha L}{2+\alpha L}\left\|(I-T)x-(I-T)y\right\|^2. \tag{3.4}$$

证明： 从引理 2.6 知 T 属于 $\frac{\alpha L+2}{4}$-平均算子。因此，存在一个非扩张算子 $R:H_1\to\mathbb{R}$，使得 $T=(1-\beta)I+\beta R$，其中 $\beta=(\alpha L+2)/4\in(0,1)$。因此，对于任何 $x,y\in H_1$，由引理 2.2 有

$$\begin{aligned}\|Tx-Ty\|^2&=\left\|(1-\beta)x+\beta R(x)-\left[\left((1-\beta)y+\beta R(y)\right)\right]\right\|^2\\&=\left\|(1-\beta)(x-y)+\beta\left(R(x)-R(y)\right)\right\|^2\\&=(1-\beta)\|x-y\|^2+\beta\left\|R(x)-R(y)\right\|^2-\beta(1-\beta)\left\|x-y-\left(R(x)-R(y)\right)\right\|^2\\&=(1-\beta)\|x-y\|^2+\beta\left\|R(x)-R(y)\right\|^2-\frac{1-\beta}{\beta}\left\|\beta(x-y)-\beta\left(R(x)-R(y)\right)\right\|^2\\&\leq\|x-y\|^2-\frac{2-\alpha L}{2+\alpha L}\left\|(I-T)x-(I-T)x\right\|^2.\end{aligned}$$

引理 3.2 设 $f:H_1\to\mathbb{R}$，$0<\alpha<\frac{2}{L}$，其中 $L\geq 0$ 为可微凸函数 $f(x)$ 的梯度 ∇f 的 Lipschitz 常数。设 $T:=P_C(I-\alpha\nabla f)$ 和 $b=\frac{4}{2+\alpha L}$。则 $bT+(1-b)I$ 是非扩张的。

证明： 对于任意 $x,y\in H_1$。由引理 2.2 和引理 3.1 有

$$\begin{aligned}&\left\|\left(bT+(1-b)I\right)x-\left(bT+(1-b)I\right)y\right\|^2\\&=\left\|b(Tx-Ty)+(1-b)(x-y)\right\|^2\\&=b\|Tx-Ty\|^2+(1-b)\|x-y\|^2-b(1-b)\left\|(I-T)x-(I-T)y\right\|^2\\&\leq b\left[\|x-y\|^2+(1-b)\left\|(I-T)x-(I-T)y\right\|^2\right]\\&\quad+(1-b)\|x-y\|^2-b(1-b)\left\|(I-T)x-(I-T)y\right\|^2\\&=\|x-y\|^2.\end{aligned}$$

接下来使用引理 3.1 和引理 3.2 证明算法 3.1 的强收敛性。

定理 3.3 假设 SFP 的解集 S 非空，(3.2)，(3.3)成立，且系数 $\{\alpha_k\}$，$\{t_k\}$，$\{\lambda_k\}$ 满足以下条件

$$0<\alpha_k \le \sup_k \alpha_k =: \bar{\alpha} < \frac{2}{L};$$

2) $\lim_{k\to\infty} t_k = 0$ 和 $\sum_{k=0}^{\infty} t_k = \infty$；

3) $\sup \frac{\lambda_k}{1-t_k} < \frac{4}{\bar{\alpha}L+2}$ 和 $\lim_{k\to\infty} \frac{t_k}{\lambda_k} = 0$。

则序列 $\{v^k\}$

$$v^{k+1} = t_k h(v^k) + \gamma_k v^k + \lambda_k P_C(I-\alpha_k \nabla f)v^k, \tag{3.5}$$

强收敛于点 $z \in S$。

证明： 设 $T_k = P_C(I-\alpha_k\nabla f)$，$\rho_k = \frac{\lambda_k}{1-t_k}$，$u_k = (1-\rho_k)v^k + \rho_k T_k v^k$，$\lambda_k = (1-t_k)\rho_k$，$\gamma_k = (1-t_k)(1-\rho_k)$。由条件 3)可得

$$0<\rho_k \le \sup_k \rho_k < \frac{4}{\bar{\alpha}L+2} \le \frac{4}{\alpha_k L+2}, \tag{3.6}$$

(3.5)可改写为

$$v^{k+1} = t_k h(v^k) + (1-t_k)u_k. \tag{3.7}$$

接下来分三个步骤来完成证明。

步骤 1： 证明序列 $\{v^k\}$ 有界。

对于 $z \in S$，由引理 2.3 和引理 3.1 知

$$\begin{aligned}\|Tv^k - z\|^2 &= \|Tv^k - Tz\|^2 \\ &\le \|v^k - z\|^2 - \frac{2-\alpha L}{2+\alpha L}\|(I-T)v^k - (I-T)z\|^2 \\ &= \|v^k - z\|^2 - \frac{2-\alpha L}{2+\alpha L}\|Tv^k - v^k\|^2.\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}&\|u_k - z\|^2 \\ &= \|(1-\rho_k)v^k + \rho_k T_k v^k - z\|^2 \\ &= \|v^k - z\|^2 + (\rho_k)^2\|T_k v^k - v^k\|^2 - 2\rho_k\langle v^k - z, v^k - T_k v^k\rangle \\ &= \|v^k - z\|^2 + (\rho_k)^2\|T_k v^k - v^k\|^2 - \rho_k\left[\|v^k - z\|^2 + \|T_k v^k - v^k\|^2 - \|T_k v^k - z\|^2\right] \\ &= (1-\rho_k)\|v^k - z\|^2 - \rho_k(1-\rho_k)\|T_k v^k - v^k\|^2 + \rho_k\|T_k v^k - z\|^2 \\ &\le (1-\rho_k)\|v^k - z\|^2 - \rho_k(1-\rho_k)\|T_k v^k - v^k\|^2 + \rho_k\left[\|v^k - z\|^2 - \frac{2-\alpha L}{2+\alpha L}\|T_k v^k - v^k\|^2\right] \\ &= \|v^k - z\|^2 - \rho_k\left(1-\rho_k + \frac{2-\alpha L}{2+\alpha L}\right)\|T_k v^k - v^k\|^2 \\ &= \|v^k - z\|^2 - \rho_k\left(\frac{4}{2+\alpha L} - \rho_k\right)\|T_k v^k - v^k\|^2.\end{aligned} \tag{3.8}$$

因此可得，

$$\begin{aligned}
\left\|v^{k+1}-z\right\| &= \left\|t_k h\left(v^k\right)+\left(1-t_k\right)u_k-z\right\| \\
&= \left\|t_k\left(h\left(v^k\right)-z\right)+\left(1-t_k\right)\left(u_k-z\right)\right\| \\
&\le t_k\left\|h\left(v^k\right)-h(z)+h(z)-z\right\|+\left(1-t_k\right)\left\|u_k-z\right\| \\
&\le t_k\left\|h\left(v^k\right)-h(z)\right\|+t_k\left\|h(z)-z\right\|+\left(1-t_k\right)\left\|u_k-z\right\| \\
&\le t_k\varphi\left\|v^k-z\right\|+t_k\left\|h(z)-z\right\|+\left(1-t_k\right)\left\|v^k-z\right\| \\
&= \left(1-t_k(1-\varphi)\right)\left\|v^k-z\right\|+t_k(1-\varphi)\frac{\left\|h(z)-z\right\|}{1-\varphi} \\
&\le \max\left\{\left\|v^k-z\right\|,\frac{\left\|h(z)-z\right\|}{1-\varphi}\right\}.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

由上式得

$$\left\|v^{k+1}-z\right\|\le\max\left\{\left\|v^k-z\right\|,\frac{\left\|h(z)-z\right\|}{1-\varphi}\right\},$$

所以序列$\left\{v^k\right\}$是有界的。

步骤 2： 证明存在子序列$\left\{v^{k_j}\right\}\subset\left\{v^k\right\}$，使得$\left\{v^{k_j}\right\}$的任何弱收敛簇$\omega_\omega\left(v^{k_j}\right)$点都属于 S。

由(3.8)和引理 2.2，可得

$$\begin{aligned}
&\left\|v^{k+1}-z\right\|^2 \\
&= \left\|t_k\left(h\left(v^k\right)-z\right)+\left(1-t_k\right)\left(u_k-z\right)\right\|^2 \\
&= \left\|t_k\left(h\left(v^k\right)-h(z)+h(z)-z\right)+\left(1-t_k\right)\left(u_k-z\right)\right\|^2 \\
&= \left\|\left[t_k\left(h\left(v^k\right)-h(z)\right)+\left(1-t_k\right)\left(u_k-z\right)\right]+t_k\left(h(z)-z\right)\right\|^2 \\
&\le \left\|t_k\left(h\left(v^k\right)-h(z)\right)+\left(1-t_k\right)\left(u_k-z\right)\right\|^2+2\left\langle t_k\left(h(z)-z\right),v^{k+1}-z\right\rangle \\
&\le t_k\left\|h\left(v^k\right)-h(z)\right\|^2+\left(1-t_k\right)\left\|u_k-z\right\|^2+2t_k\left\langle h(z)-z,v^{k+1}-z\right\rangle \\
&\le t_k\varphi\left\|v^k-z\right\|^2+\left(1-t_k\right)\left[\left\|v^k-z\right\|^2-\rho_k\left(\frac{4}{2+\alpha_kL}-\rho_k\right)\left\|T_kv^k-v^k\right\|^2\right]+2t_k\left\langle h(z)-z,v^{k+1}-z\right\rangle \\
&= \left(1-t_k(1-\varphi)\right)\left\|v^k-z\right\|^2-\left(1-t_k\right)\rho_k\left(\frac{4}{2+\alpha_kL}-\rho_k\right)\left\|T_kv^k-v^k\right\|^2+2t_k\left\langle h(z)-z,v^{k+1}-z\right\rangle \\
&= \left(1-t_k(1-\varphi)\right)\left\|v^k-z\right\|^2-\lambda_k\left(\frac{4}{2+\alpha_kL}-\rho_k\right)\left\|T_kv^k-v^k\right\|^2+2t_k\left\langle h(z)-z,v^{k+1}-z\right\rangle \\
&=: \left(1-t_k(1-\varphi)\right)\left\|v^k-z\right\|^2+t_k(1-\varphi)g_k.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

其中$g_k=\frac{1}{1-\varphi}\left[2\left\langle h(z)-z,v^{k+1}-z\right\rangle-\frac{\lambda_k}{t_k}\left(\frac{4}{2+\alpha_kL}-\rho_k\right)\left\|T_kv_k-v_k\right\|^2\right]$。由于$0<\rho_k<\frac{4}{2+\alpha_kL}$（请参看(3.6)），显然

$$g_k\le\frac{2}{1-\varphi}\left\langle h(z)-z,v^{k+1}-z\right\rangle\le\frac{2}{1-\varphi}\left\|h(z)-z\right\|\left\|v^{k+1}-z\right\|<\infty.$$

又通过步骤 1 知$\left\{\left\|v^{k+1}-z\right\|\right\}$是有界的。因此$\sup_k g_k$是有界的。令$\left\{g_{k_j}\right\}\subset\left\{g_k\right\}$使得$\sup_k g_k=\lim_{j\to\infty} g_{k_j}$。在不失一般性的前提下，假设$\lim_{j\to\infty}\left\langle h(z)-z,v^{k_j+1}-z\right\rangle$和$\lim_{j\to\infty}\rho_{k_j}$存在，由于$\left\{\left\langle h(z)-z,v^{k+1}-z\right\rangle\right\}$和$\left\{\rho_k\right\}$都是有界序列的。因此有

$$\begin{aligned}
&(1-\varphi)\sup_k g_k=(1-\varphi)\lim_{j\to\infty} g_{k_j}\\
&=\lim_{j\to\infty}\left(2\left\langle h(z)-z,v^{k_j+1}-z\right\rangle-\frac{\lambda_{k_j}}{t_{k_j}}\left(\frac{4}{2+\alpha_{k_j}L}-\rho_{k_j}\right)\left\|T_{k_j}v^{k_j}-v^{k_j}\right\|^2\right)\\
&=2\lim_{j\to\infty}\left\langle h(z)-z,v^{k_j+1}-z\right\rangle-\lim_{j\to\infty}\frac{\lambda_{k_j}}{t_{k_j}}\left(\frac{4}{2+\alpha_{k_j}L}-\rho_{k_j}\right)\left\|T_{k_j}v^{k_j}-v^{k_j}\right\|^2.
\end{aligned}\tag{3.11}$$

由于，$0<\dfrac{4}{2+\bar{\alpha}L}-\sup_k\rho_k\le\dfrac{4}{2+\bar{\alpha}L}-\rho_k\le 2$表明$\left\{\dfrac{\lambda_{k_j}}{t_{k_j}}\left\|T_{k_j}v^{k_j}-v^{k_j}\right\|^2\right\}$具有收敛的子序列，也可用序列本身来表示。利用条件 3)，得出结论

$$\lim_{j\to\infty}\left\|T_{k_j}v^{k_j}-v^{k_j}\right\|=0.\tag{3.12}$$

接下来，证明当$j\to\infty$时$\left\|P_C\left(I-\bar{\alpha}\nabla f\right)v^{k_j}-v^{k_j}\right\|\to 0$。假设当$j\to\infty$时$\alpha_{k_j}\to\bar{\alpha}$且$0<\alpha<\dfrac{2}{L}$，已知$\left\{v^{k_j}\right\}$有界，所以有$\left\|\nabla f\left(v^{k_j}\right)\right\|\le M$，$M$为常数，通过引理 2.6 和(3.12)，得

$$\begin{aligned}
&\left\|P_C\left(I-\bar{\alpha}\nabla f\right)v^{k_j}-v^{k_j}\right\|\\
&=\left\|P_C\left(I-\bar{\alpha}\nabla f\right)v^{k_j}-T_{k_j}v^{k_j}+T_{k_j}v^{k_j}-v^{k_j}\right\|\\
&\le\left\|P_C\left(I-\bar{\alpha}\nabla f\right)v^{k_j}-T_{k_j}v^{k_j}\right\|+\left\|T_{k_j}v^{k_j}-v^{k_j}\right\|\\
&=\left\|P_C\left(I-\bar{\alpha}\nabla f\right)v^{k_j}-P_C\left(I-\alpha_{k_j}\nabla f\right)v^{k_j}\right\|+\left\|T_{k_j}v^{k_j}-v^{k_j}\right\|\\
&\le\left(\bar{\alpha}-\alpha_{k_j}\right)\left\|\nabla f\left(v^{k_j}\right)\right\|+\left\|T_{k_j}v^{k_j}-v^{k_j}\right\|\\
&\le\left(\bar{\alpha}-\alpha_{k_j}\right)M+\left\|T_{k_j}v^{k_j}-v^{k_j}\right\|\\
&\to 0\left(\text{当 } j\to\infty\text{时}\right)
\end{aligned}\tag{3.13}$$

由引理 2.4 知$\omega_\omega\left(v^{k_j}\right)\in S$。

步骤 3： 证明对于$z\in S$，$\lim_{k\to\infty}\left\|v^k-z\right\|\to 0$。

通过设$\bar{\gamma}_k=t_k(1-\varphi)$，$\beta_k=0$来证明(3.10)满足引理 2.5 中的条件。显然，$t_k(1-\varphi)\in[0,1]$和$\sum_{k=0}^{\infty}t_k(1-\varphi)=\infty$满足条件 2)。接下来证明$\limsup_{k\to\infty} g_k\le 0$。

由式(3.13)，有

$$\begin{aligned}
&\left\|v^{k_j+1}-v^{k_j}\right\|\\
&=\left\|t_{k_j}h\left(v^{k_j}\right)+\left(1-t_{k_j}\right)\left(u_{k_j}-v^{k_j}\right)\right\|\\
&=\left\|t_{k_j}h\left(v^{k_j}\right)-t_{k_j}v^{k_j}-\left(1-t_{k_j}\right)v^{k_j}+\left(1-t_{k_j}\right)u_{k_j}\right\|\\
&=\left\|t_{k_j}\left(h\left(v^{k_j}\right)-v^{k_j}\right)+\left(1-t_{k_j}\right)\left(u_{k_j}-v^{k_j}\right)\right\|\\
&=\left\|t_{k_j}\left(h\left(v^{k_j}\right)-v^{k_j}\right)+\left(1-t_{k_j}\right)\left(\left(1-\rho_{k_j}\right)v^{k_j}+\rho_{k_j}T_{k_j}v^{k_j}-v^{k_j}\right)\right\|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left\| t_{k_j}\left(h\left(v^{k_j}\right)-v^{k_j}\right)+\left(1-t_{k_j}\right)\rho_{k_j}\left(T_{k_j}v^{k_j}-v^{k_j}\right)\right\| \\
&\le t_{k_j}\left\| h\left(v^{k_j}\right)-v^{k_j}\right\|+\frac{4}{2+\bar{\alpha}L}\left(1-t_{k_j}\right)\left\|T_{k_j}v^{k_j}-v^{k_j}\right\| \\
&\le t_{k_j}\left\| h\left(v^{k_j}\right)-v^{k_j}\right\|+\frac{4}{2+\bar{\alpha}L}\left\|T_{k_j}v^{k_j}-v^{k_j}\right\| \\
&\le t_{k_j}\left[\left\| h\left(v^{k_j}\right)\right\|+\left\|v^{k_j}\right\|\right]+\frac{4}{2+\bar{\alpha}L}\left\|T_{k_j}v^{k_j}-v^{k_j}\right\| \\
&\to 0\left(\text{当 } j\to\infty \text{时}\right)
\end{aligned}
\tag{3.14}
$$

由(3.14)和 $\omega_\omega\left(v^{k_j}\right)\in S$ 可得 $\omega_\omega\left(v^{k_j+1}\right)\in S$。随着 $j\to\infty$ 令 $v^{k_j}\to v^*$ （则 $v^*\in S$），因此

$$\limsup_{k\to\infty}\left\langle h(z)-z, v^{k+1}-z\right\rangle=\lim_{j\to\infty}\left\langle h(z)-z, v^{k_j+1}-z\right\rangle.$$

从而，

$$
\begin{aligned}
\limsup_{k\to\infty} g_k &\le \frac{2}{1-\varphi}\limsup_{k\to\infty}\left\langle h(z)-z, v^{k+1}-z\right\rangle \\
&= \frac{2}{1-\varphi}\limsup_{j\to\infty}\left\langle h(z)-z, v^{k_j+1}-z\right\rangle \\
&= \frac{2}{1-\varphi}\left\langle h(z)-z, v^{*}-z\right\rangle=0.
\end{aligned}
\tag{3.15}
$$

通过将引理 2.5 带入(3.10)，得到 $\lim_{k\to\infty}\left\|v^k-z\right\|\to 0$，证毕。

定理 3.4 假设问题(1.1)的解集 S 不为空，式(3.2)、(3.3)成立并且 $\{\alpha_k\}$，$\{t_k\}$，$\{\lambda_k\}$ 满足以下条件

$$0<\alpha_k\le \sup_k \alpha_k =: \bar{\alpha}<\frac{2}{L};$$

2) $\lim_{k\to\infty} t_k=0$ 和 $\sum_{k=0}^{\infty} t_k=\infty$；

3) $\sup\frac{\lambda_k}{1-t_k}<\frac{4}{\bar{\alpha}L+2}$ 和 $\lim_{k\to\infty}\frac{t_k}{\lambda_k}=0$.

则由算法(3.1)生成的序列 $\left\{x^k\right\}$ 强收敛于点 $z\in S$。

证明：令序列 $\left\{x^k\right\}$，$\left\{v^k\right\}$ 分别由(3.1)和(3.5)产生。然后，根据定理 3.3 知 $\left\{v^k\right\}$ 强收敛于问题(1.1)的解。只需证明当 $k\to\infty$ 时，$\left\|x^k-v^k\right\|\to 0$。

令 $V_k=P_C\left(I-\alpha_k D\nabla f\right)$，$T_k=P_C\left(I-\alpha_k\nabla f\right)$ 和 $R_k=g_kT_k+\left(1-g_k\right)I$，其中 $g_k=\frac{4}{2+\alpha_kL}$，$\theta\left(x^k\right)=V_kx^k-T_kx^k$ （参见(3.2)）。由引理 3.2 可知 R_k 是非扩张的。此外，$\rho_k=\frac{\lambda_k}{1-t_k}$ 满足 $\frac{\rho_k}{g_k}<1$ （参见(3.6)）。可得

$$
\begin{aligned}
&\left\|x^{k+1}-v^{k+1}\right\| \\
&=\left\|\left[t_kh\left(x^k\right)+\gamma_kx^k+\lambda_kP_C\left(I-\alpha_kD\nabla f\right)x^k\right]-\left[t_kh\left(v^k\right)+\gamma_kv^k+\lambda_kP_C\left(I-\alpha_k\nabla f\right)v^k\right]+e_k\right\| \\
&=\left\|t_k\left(h\left(x^k\right)-h\left(v^k\right)\right)+\gamma_k\left(x^k-v^k\right)+\lambda_k\left[P_C\left(I-\alpha_kD\nabla f\right)x^k-P_C\left(I-\alpha_k\nabla f\right)v^k\right]+e_k\right\| \\
&=\left\|t_k\left(h\left(x^k\right)-h\left(v^k\right)\right)+\gamma_k\left(x^k-v^k\right)+\lambda_k\left(V_kx^k-T_kx^k+T_kx^k-T_kv^k\right)+e_k\right\| \\
&\le\left\|t_k\left(h\left(x^k\right)-h\left(v^k\right)\right)+\gamma_k\left(x^k-v^k\right)+\lambda_k\left(T_kx^k-T_kv^k\right)\right\|+\lambda_k\left\|V_kx^k-T_kx^k\right\|+\left\|e_k\right\|
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\le \left\| t_k\left(h\left(x^k\right)-h\left(v^k\right)\right)+\left(1-t_k\right)\left[\left(1-\rho_k\right)\left(x^k-v^k\right)+\rho_k\left(T_k x^k-T_k v^k\right)\right]\right\|+\lambda_k\alpha_k\left\|\theta\left(x^k\right)\right\|+\left\|e_k\right\| \\
&\le t_k\varphi\left\|x^k-v^k\right\|+\left(1-t_k\right)\left\|\left(1-\frac{\rho_k}{g_k}\right)\left(x^k-v^k\right)+\frac{\rho_k}{g_k}\left(R_k x^k-R_k v^k\right)\right\|+\lambda_k\alpha_k\left\|\theta\left(x^k\right)\right\|+\left\|e_k\right\| \\
&\le t_k\varphi\left\|x^k-v^k\right\|+\left(1-t_k\right)\left\|x^k-v^k\right\|+\lambda_k\alpha_k\left\|\theta\left(x^k\right)\right\|+\left\|e_k\right\| \\
&=\left(1-t_k\left(1-\varphi\right)\right)\left\|x^k-v^k\right\|+t_k\left(1-\varphi\right)\alpha_k\left\|\theta\left(x^k\right)\right\|+\left\|e_k\right\|.
\end{aligned}
\tag{3.16}
$$

将条件 2)，(3.2)，(3.3)和引理 2.5 应用于最后一个不等式，得到当 $k\to\infty$ 时 $\left\|x^k-v^k\right\|\to 0$。从而由定理 3.3 推出结论。

4. 数值实验

以下将通过两个数值实验来验证所提出的超松弛投影算法的可行性。所有代码程序由 MATLAB(R2017a)编写，在 Windows 10 Inter(R) Core(TM) i5-8500 CPU @3.00GHz 3.0GHz 和 8GB 内存的 Dell 电脑上运行。

例 4.1 设 $C=\left\{x\in R^3 \middle| x_1+x_2^2+2x_3\le 0\right\}$；$Q=\left\{x\in R^3 \middle| x_1^2+x_2-x_3\le 0\right\}$；

$$A=\begin{bmatrix} 8 & 4 & 2 \\ 9 & 6 & 5 \\ 1 & 2 & 9 \end{bmatrix}$$

找一点 x，使 $x\in C$，$Ax\in Q$。令 $\varepsilon=10^{-4}$，$t_k=\frac{1}{4k}$，$\gamma_k=0.01+\frac{1}{10k}$，$\lambda_k=1-t_k-\gamma_k=0.99-\frac{7}{20k}$，同时取，$h\left(x^k\right)=0.1x^k$，$\alpha_k=\frac{k}{L(k+1)}$，$D(x)=diag(9x)$。在数值实验中，采用了 $\left\|x^{k+1}-x^k\right\|<\varepsilon$ 作为停止准则。

例 4.1 的数值实验结果如表 1 所示。在表 1 中，“CQ”和“OP”分别表示 CQ 算法和超松弛投影算法。“Iter”，“Cpu”和“x^*”分别表示迭代次数，以秒为单位的运行时间和最优解。x^0 是初始值。

Table 1. Comparison between Algorithm and CQ Algorithm at Different Initial Values
表 1. OP 算法与 CQ 算法在不同初始值下的对比

初始值	CQ	OP
$x^0=(0\ \ 1\ \ 2)'$	Iter = 103，Cpu = 0.016 $x^*=[-0.4653,0.5435,0.0849]$	Iter = 34，Cpu = 0.015 $x^*=[0.0515,-0.0046,0.1029]$
$x^0=(-2\ \ 5\ \ 7)'$	Iter = 626，Cpu = 0.069 $x^*=[-0.4038,0.7585,-0.0858]$	Iter = 23，Cpu = 0.015 $x^*=[0.0499,-0.0041,0.0997]$
$x^0=(8\ \ 6\ \ 9)'$	Iter = 59，Cpu = 0.016 $x^*=[-0.1608,-0.0544,0.0789]$	Iter = 33，Cpu = 0.015 $x^*=[0.0514,-0.0046,0.1029]$
$x^0=(11\ \ 13\ \ 16)'$	Iter = 485，Cpu = 0.038 $x^*=[-0.4038,0.7585,-0.0858]$	Iter = 36，Cpu = 0.006 $x^*=[0.0516,-0.0047,0.1032]$

例 4.2 设 $C=\left\{x\in R^3 \middle| x_1^2+x_2-x_3\le 0\right\}$；$Q=\left\{x\in R^3 \middle| x_1+x_2^2-3\le 0\right\}$；

$$A=\begin{bmatrix} 8 & 4 & 2 \\ 9 & 6 & 5 \\ 1 & 2 & 9 \end{bmatrix}$$

求 $x \in C$，$Ax \in Q$。取 $\varepsilon = 10^{-4}$，$t_k = \frac{1}{3k}$，$\gamma_k = 0.01 + \frac{1}{10k}$，$\lambda_k = 1 - t_k - \gamma_k = 0.99 - \frac{13}{30k}$，同时取，$h(x^k) = 0.3x^k$，$\alpha_k = \frac{k}{L(k+1)}$，$D(x) = diag(0.6x)$。在数值实验中，采用了 $\left\| x^{k+1} - x^k \right\| < \varepsilon$ 作为停止准则。

例 4.2 的数值实验结果如图 1 所示。在图 1 中，“*CQ*”和“*OP*”分别表示 *CQ* 算法和超松弛投影算法。

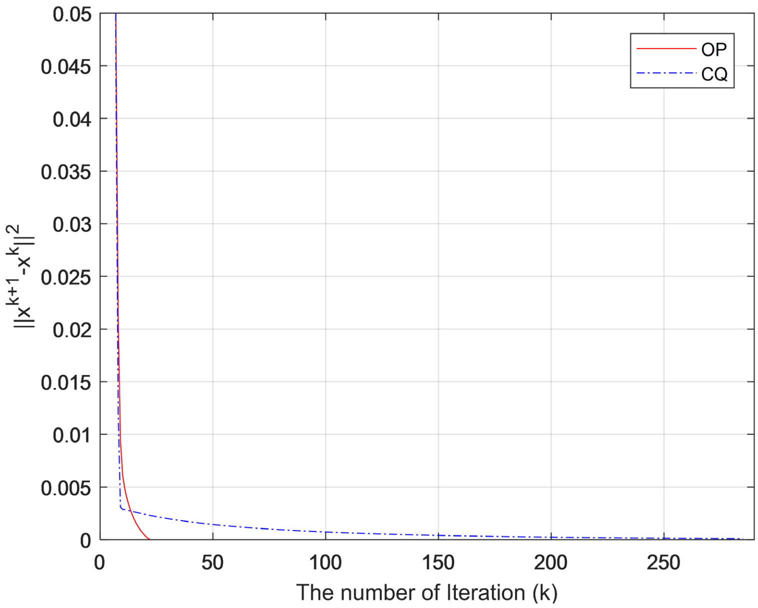

Figure 1. Comparison of numerical experimental results between OP algorithm and CQ algorithm
图 1. OP 算法与 CQ 算法数值实验结果对比图

图 1 中的数值实验结果为当初始值 $x^1 = 10 * rand(3,1)$ 时的 *OP* 算法和 *CQ* 算法的迭代次数对比图。其中 *OP* 算法和 *CQ* 算法的迭代次数分别为 22 和 283。

由以上数值实验结果可知，超松弛投影算法(*OP*)在处理分裂可行性问题时具有有效性，而且由对比结果可知，*OP* 算法因其需要较少的迭代次数而优于 *CQ* 算法。

5. 结束语

本文主要研究了求解分裂可行性问题的超松弛投影算法。为了证明其强收敛性，引入了 t_k, γ_k, λ_k 和 e_k 这 4 个参数，并利用改进的 Halpern 迭代，构建了求解分裂可行性问题的新算法，在一定假设条件下证明了该算法的强收敛性。同时数值实验的结果也表明了所提出的 *OP* 算法的有效性。但本文算法的步长为固定步长，其取值范围的算子范数难以估计，因此结合其它方法，优化迭代步长，将是我们下一步的研究内容或方向。

基金项目

国家社科基金重大项目(20&ZD199、21&ZD200)；教育部人文社科青年基金项目(20YJC820030)；国家新闻出版署“智能与绿色柔板印刷”重点实验室招标课题(KLIGFP-02)。

参考文献

[1] Censor, Y. and Elfving, T. (1994) A Multiprojection Algorithm Using Bregman Projections in a Product Space. *Nu-*

merical Algorithms, **8**, 221-239. https://doi.org/10.1007/BF02142692

[2] Suantai, S., Kesornprom, S. and Cholamjiak, P. (2019) A New Hybrid CQ Algorithm for the Split Feasibility Problem in Hilbert Spaces and Its Applications to Compressed Sensing. *Mathematics*, **7**, Article No. 789. https://doi.org/10.3390/math7090789

[3] Ansari, Q.H., Rehan, A. and Yao, J.C. (2017) Split Feasibility and Fixed Point Problems for Asymptotically k-Strict Pseudo-Contractive Mappings in Intermediate Sense. *Fixed Point Theory*, **18**, 57-68. https://doi.org/10.24193/fpt-ro.2017.1.06

[4] Padcharoen, A., Kumam, P. and Cho, Y.J. (2018) Split Common Fixed Point Problems for Demicontractive Operators. *Numerical Algorithms*, **82**, 297-320. https://doi.org/10.1007/s11075-018-0605-0

[5] Censor, Y., Bortfeld, T., Martin, B., *et al*. (2006) A Unified Approach for Inversion Problems in Intensity-Modulated Radiation Therapy. *Physics in Medicine and Biology*, **51**, 2353-2365. https://doi.org/10.1088/0031-9155/51/10/001

[6] Dang, Y.Z. and Gao, Y. (2011) The Strong Convergence of a KM-CQ-Like Algorithm for a Split Feasibility Problem. *Inverse Problem*, **27**, Article ID: 015007. https://doi.org/10.1088/0266-5611/27/1/015007

[7] Byrne, C. (2002) Iterative Oblique Projection onto Convex Subsets and the Split Feasibility Problem. *Inverse Problem*, **18**, 441-453. https://doi.org/10.1088/0266-5611/18/2/310

[8] Vinh, N.T., Cholamjiak, P. and Suantai, S. (2018) A New CQ Algorithm for Solving Split Feasibility Problems in Hilbert Spaces. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, **42**, 2517-2534. https://doi.org/10.1007/s40840-018-0614-0

[9] Zhao, J., Zhang, Y. and Yang, Q. (2012) Modified Projection Methods for the Split Feasibility Problem and the Multiple-Sets Split Feasibility Problem. *Applied Mathematics & Computation*, **219**, 1644-1653. https://doi.org/10.1016/j.amc.2012.08.005

[10] Kesornprom, S., Pholasa, N. and Cholamjiak, P. (2020) On the Convergence Analysis of the Gradient-CQ Algorithms for the Split Feasibility Problem. *Numerical Algorithms*, **84**, 997-1017. https://doi.org/10.1007/s11075-019-00790-y

[11] Pan, X., Kang, S.M. and Kwun, Y.C. (2014) Iterative Computation for Solving the Variational Inequality and the Generalized Equilibrium Problem. *Journal of Applied Mathematics*, **2014**, Article ID: 478172. https://doi.org/10.1155/2014/478172

[12] Wang, F. and Xu, H.K. (2010) Approximating Curve and Strong Convergence of the CQ Algorithm for the Split Feasibility Problem. *Journal of Inequalities & Applications*, **2010**, Article ID: 102085. https://doi.org/10.1155/2010/102085

[13] López, G., Martín-Márquez, V., Wang, F., *et al*. (2012) Solving the Split Feasibility Problem without Prior Knowledge of Matrix Norms. *Inverse Problems*, **28**, 374-389. https://doi.org/10.1088/0266-5611/28/8/085004

[14] Halpern, B. (1967) Fixed Points of Nonexpanding Maps. *Bulletin of the American Mathematical Society*, **73**, 957-961. https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1967-11864-0

[15] Byrne, C. (2004) A Unified Treatment of Some Iterative Algorithms in Signal Processing and Image Reconstruction. *Inverse Problems*, **20**, 103-120. https://doi.org/10.1088/0266-5611/20/1/006

[16] Goebel, K. and Kirk, W.A. (1990) Topics in Metric Fixed Point Theory. Cambridge University Press, Cambridge. https://doi.org/10.1017/CBO9780511526152

[17] Martinez-Yanes, C. and Xu, H.K. (2006) Strong Convergence of the CQ Method for Fixed Point Process. *Nonlinear Analysis*, **64**, 2400-2411. https://doi.org/10.1016/j.na.2005.08.018