**Advances in Applied Mathematics** 应用数学进展, 2024, 13(4), 1334-1337
Published Online April 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2024.134123

# 利用群作用构造一类不可测集

**梁亚华**

云南师范大学数学学院，云南 昆明

收稿日期：2024年3月17日；录用日期：2024年4月11日；发布日期：2024年4月18日

## 摘 要

本文研究了群作用和Zermelo选择公理构造出一类一维不可测集，为了得到主要结果，进行了$n$维不可测集的构造，在群作用和Zermelo选择公理的前提下，用构造的方法给出了$n$维不可测集，从而证明了一类$n$维不可测集的存在性，且给出了该类型不可测集的内侧度为零。

## 关键词

不可测集，Zermelo选择公理，群作用

# A Class of Non-Measurable Sets Is Constructed by Using Group Action

**Yahua Liang**

School of Mathematics, Yunnan Normal University, Kunming Yunnan

Received: Mar. 17th, 2024; accepted: Apr. 11th, 2024; published: Apr. 18th, 2024

## Abstract

**In this paper, a class of one-dimensional unmeasurable sets is constructed by studying group action and Zermelo choice axiom. In order to get the main result, the dimensional unmeasurable sets are constructed. Under the premise of group action and Zermelo choice axiom, the dimensional unmeasurable sets are given by constructing method, thus proving the existence of a class of dimensional unmeasurable sets. The inner degree of this type of unmeasurable set is zero.**

## Keywords

**Non-Measurable Set, Zermelo Axiom of Choice, Group Action**

文章引用: 梁亚华. 利用群作用构造一类不可测集[J]. 应用数学进展, 2024, 13(4): 1334-1337.
DOI: 10.12677/aam.2024.134123

## 1. 基本概念

**定义 1.1** [1]设 $E$ 为 $R^n$ 中的点集，如果对于任何点集 $T$ 都有

$$m*T = m*(T \cap E) + m*(T \cap E^c)$$

则称 $E$ 为 Lebesgue 可测集，简称为可测集。这时 $E$ 的 Lebesgue 外侧度 $m*E$ 即称为 $E$ 的侧度，记为 $mE$ 。

**定义 1.2** [2]非空集合 $G$ 称为一个群，如果在 $G$ 中定义了一个代数运算，叫做乘法“$\cdot$”。若“$\cdot$”满足以下条件：

(1) “$\cdot$”符合结合律；

(2) 存在 $\mathrm{e} \in G$ ，使得对任意的 $a \in G$ ，有

$$a \cdot e = e \cdot a;$$

(3) 对于任意的 $a \in G$ ，存在 $b \in G$ ，使得

$$a \cdot b = b \cdot a = e.$$

**定理 1.3** [3] (Zermelo 选择公理)设 $S = \{A_\alpha \mid \alpha \in I\}$ 是一族两两不相交的非空集合，其中 $I$ 是指标集，则存在集合 $L$ 满足下列条件：

(1) $L \subset \bigcup\limits_{\alpha \in I} A_\alpha$ 。

(2) 集 $L$ 与 $S$ 中每个集 $A_\alpha$ 有且仅有一个公共元素。

## 2. *n* 维不可测集的构造

**定理 2.1** 如果存在一个群 $(G,\cdot)$ 满足 $G \subseteq R^n$ ， $m(G) > 0$ ，以及一个可列子群 $Q^n = \{r_1, r_2, r_3, \cdots, r_h, \cdots\}$ ，其中 $r_i = (r_{i1}, r_{i2}, \cdots, r_{in}) \in R^n$ ，对任意的 $r_i = (r_{i1}, r_{i2}, \cdots, r_{in}) \in Q^n$ ，任意的 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in G$ ，做一个变换 $x \to r_i \cdot x = (r_{i1}x_1, r_{i2}x_2, \cdots, r_{in}x_n)$ ，满足以下三个条件：

① 当集合 $E \subseteq G$ 是一个可测集时， $\forall r_i \in Q^n$ ， $T_{r_i}E =: \{r_i \cdot x | x \in E\}$ 仍然是一个可测集；

② 当 $mE = 0$ 的时，对任意的 $\forall r_i \in Q^n$ ，有 $m(T_{r_i}E) = 0$ ；

③ 当 $E \subseteq G$ ，且 $m(E) > 0$ 时，存在 $\delta > 0$ 和有限的 $n$ 维开区间

$$I =: \{(y_1, y_2, y_3, \cdots, y_n) \mid a_i \le y_i \le b_i, i = 1, 2, \cdots, n\},$$

以及 $Q^n$ 的可列子集，仍记为 $Q^n = \{r_1, r_2, r_3, \cdots, r_h, \cdots\}$ ，使得 $m(T_{r_i}E) \ge \delta m(E)$ ，其中 $i = 1, 2, 3, \cdots$ ，且 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}(T_{r_i}E) \subseteq I$ 。

则对任意的 $x, y \in R^n$ ，当 $x \cdot y^{-1} \in Q^n$ 时，记 $x \sim y$ 。那么“$\sim$”是一种等价关系，且将 $R^n$ 中的任意一个有界正测度集合 $B$ 分成若干个等价类，又由 Zermelo 选择公理，从每一个等价类中任意选取一个元素构成一个新的集合 $E$ ，那么集合 $E$ 就是 Lebesgue 不可测集。

证明：首先证明“$\sim$”是一种等价关系。因为 $Q^n$ 是一个可列子群，因此单位元素 $e \in Q^n$ ，所以对任意的 $x \in G$ ，有 $x \cdot x^{-1} = e \in Q^n$ ，即 $x \sim x$ ；当 $x \sim y$ 时，即 $x \cdot y^{-1} \in Q^n$ ，由子群的性质可知 $(x \cdot y^{-1})^{-1} = y \cdot x^{-1} \in Q^n$ ，有 $y \sim x$ ；同理当 $x \sim y$ ， $y \sim z$ 时，即 $x \cdot y^{-1} \in Q^n$ ， $y \cdot z^{-1} \in Q^n$ ，由子群的性质可知

$$(x \cdot y^{-1}) \cdot (y \cdot z^{-1}) = x \cdot z^{-1} \in Q^n,$$

即有 $x \sim z$，因此便证明了“$\sim$”是一种等价关系。

当 $i \neq j$ 时，有 $T_{r_i}E \cap T_{r_j}E = \varnothing$.若不然，假设 $T_{r_i}E \cap T_{r_j}E \neq \varnothing$，则存在 $e_1, e_2 \in E$，使得 $r_i \cdot e_1 = r_j \cdot e_2$，所以 $e_1 \cdot e_2{}^{-1} = r_i^{-1} \cdot r_j \in Q^n$，从而可知 $e_1, e_2$ 属于同一个等价类，这与集合 $E$ 的构造矛盾.所以当 $i \neq j$ 时，$T_{r_i}E$ 与 $T_{r_j}E$ 必定互不相交。

假设集合 $E$ 是可测集，那么集合 $E$ 只能是有界正测度集或者零测度集，下面分两种情况来证明。

当集合 $E$ 是有界正测度集时，从条件③可知，$\exists \delta > 0$ 和有限的 $n$ 维开区间

$$I =: \left\{ (y_1, y_2, y_3, \cdots, y_n) \mid a_i \le y_i \le b_i, i = 1, 2, \cdots, n \right\},$$

以及 $Q^n$ 的可列子集，仍记为 $Q^n = \{r_1, r_2, r_3, \cdots, r_h, \cdots\}$，使得 $m(T_{r_i}E) \ge \delta m(E)$，其中 $i = 1, 2, 3, \cdots$，且 $\bigcup_{i=1}^{\infty}(T_{r_i}E) \subseteq I$，又因为 $\{T_{r_i}E\}$ 是两两互不相交的集族，由测度的可加性和单调性可知

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} T_{r_i}E\right) \ge m\left(\bigcup_{i=1}^{l} T_{r_i}E\right) \ge l\delta m(E) > \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i) = |I|,$$

其中 $l = \left[\dfrac{|I|}{\delta m(E)}\right] + 1$，($[\cdot]$ 为取整运算)。

但是，由 $\bigcup_{i=1}^{\infty}(T_{r_i}E) \subseteq I$ 可得

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} T_{r_i}E\right) \le m(I) = \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i) = |I|,$$

上述两个不等式相互矛盾，所以集合 $E$ 不是有界正测度集。

当集合 $E$ 是零测度集时，从条件②可知，$m(T_{r_i}E) = 0$，其中 $r_i \in Q^n$，$i = 1, 2, \cdots$。又由测度的完全可加性可知，

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} T_{r_i}E\right) = 0.$$

又由集合 $E$ 的构造以及测度的单调性知：由 $\bigcup_{i=1}^{\infty}(T_{r_i}E) \supseteq B$ 可得 $m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} T_{r_i}E\right) \ge m(B) > 0$，由此导出矛盾，因此集合 $E$ 不是零测度集。

综上所述，$E$ 是不可测集。

**推论 2.2** 上述那样构造的不可测集 $E$ 的内测度为零。

**证明：**若 $E$ 的内测度不为零，由内测度定义可知，存在闭集 $F$，且 $F \subseteq E$，使得 $m(F) > 0$，由条件③可知，存在实数 $\delta' > 0$，有限的 $n$ 维开区间

$$I' =: \left\{ (y_1, y_2, y_3, \cdots, y_n) \middle| a'_i \le y_i \le b'_i, i = 1, 2, \cdots, n \right\},$$

和 $Q^n$ 的一个可列子集，仍记为 $Q^n = \{r_1, r_2, r_3, \cdots, r_h, \cdots\}$，使得

$$m(T_{r_i}F) \ge \delta' m(F), i = 1, 2, 3, \cdots,\quad \bigcup_{i=1}^{\infty}(T_{r_i}F) \subseteq I'$$

首先证明当 $i \neq j$ 时，有 $T_{r_i}F \cap T_{r_j}F = \varnothing$。若不然，假设 $T_{r_i}F \cap T_{r_j}F \neq \varnothing$，则存在 $e'_1, e'_2 \in F \subset E$，使得 $r_i \cdot e'_1 = r_j \cdot e'_2$，所以 $e'_1 \cdot e'^{-1}_2 = r_i^{-1} \cdot r_j \in Q^n$，从而可知 $e'_1, e'_2$ 属于同一个等价类，这与集合 $E$ 的构造矛盾。所以当 $i \neq j$ 时，$T_{r_i}F$ 与 $T_{r_j}F$ 必定互不相交。

再次，由测度单调性和可加性知

$$\left(m\bigcup_{i=1}^{\infty}T_{r_i}F\right)\geq\left(m\bigcup_{i=1}^{l'}T_{r_i}F\right)\geq l'\delta'm(F)>\prod_{i=1}^{n}\left(b_i'-a_i'\right)=|I'|,$$

其中 $l'=\left[\dfrac{|I'|}{\delta'm(F)}\right]+1$。

另外，由测度单调性知，$m\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}T_{r_i}F\right)\leq m(I')=|I'|=\prod\limits_{i=1}^{n}\left(b_i'-a_i'\right)$。

上述两个不等式相互矛盾，所以假设 $m(F)>0$ 不成立。

因此 $m(F)=0,$ 从而 $E$ 的内测度为零。

事实上，由定理 2.1 构造的不可测集是存在的。

例 2.3 群 $(R^n,+)$，其中“+”表示通常的两个向量的加法，对于处处稠密的可列子群

$$Q^n=\left\{\overrightarrow{r_i}=\overrightarrow{p_i}+\lambda\overrightarrow{\xi_i}\,\middle|\,i=1,2,3,\cdots\right\},$$

其中 $\overrightarrow{p_i}=(p_{i1},p_{i2},\cdots,p_{in})$，$\overrightarrow{\xi_i}=(\xi_{i1},\xi_{i2},\cdots,\xi_{in})$，$p_{ij},\lambda$ 为有理数，$\xi_{ij}$ 为确定的某一无理数或零，$i=1,2,3,\cdots;j=1,2,\cdots,n.$ 且满足

$$\overrightarrow{p_i}+\lambda\overrightarrow{\xi_i}=\left(p_{i1}+\lambda\xi_{i1},p_{i2}+\lambda\xi_{i2},\cdots,p_{in}+\lambda\xi_{in}\right).$$

显然定理 2.1 中的条件①，②成立。

下面验证条件③也成立。

如果 $E\subseteq I=\left\{(y_1,y_2,y_3,\cdots,y_n)\,\middle|\,c_i\leq y_i\leq d_i,i=1,2,\cdots,n\right\}$ 是正测度集，取 $\delta=1$，$a_i=c_i$，$b_i=d_i+1$，取群 $Q^n$ 中的一个可列子集为

$$\left\{\overrightarrow{r_{k_1}},\overrightarrow{r_{k_2}},\cdots,\overrightarrow{r_{k_i}},\cdots\right\},$$

其中 $\overrightarrow{r_{k_i}}=\overrightarrow{p_{k_i}}+\lambda\overrightarrow{\xi_{k_i}}=\left(p_{k_i1}+\lambda\xi_{k_i1},p_{k_i2}+\lambda\xi_{k_i2},\cdots,p_{k_in}+\lambda\xi_{k_in}\right)$，且满足 $0\leq p_{k_ij}+\lambda\xi_{k_ij}\leq1,\ i=1,2,3,\cdots$；$j=1,2,\cdots,n$。

由此可得定理 2.1 中的条件③成立。

因此，由定理 2.1 构造的不可测集 $E$ 是存在的。

## 3. 结论

证明了 $E$ 维不可测集的构造在群作用和 Zermelo 选择公理的前提下，说明了 $n$ 维不可测集的存在性；并根据测度的可加性和单调性证明集合 $E$ 不是有界正测度集；最后，构造的 $n$ 维不可测集 $E$ 是存在的且该类型不可测集的内侧度为零。就 $n$ 维不可测集来说依然存在许多问题尚未解决，比如延伸在线性空间或者欧氏空间上，此类不可测集的构造是否还成立呢？对于未解决的问题而言，本文仅仅是对 $n$ 维不可测集构造进行的一些浅显的探讨，更深层次的探讨还需要再进一步的研究学习。

## 基金项目

国家自然科学基金青年科学基金项目(11801499)。

## 参考文献

[1] 周民强. 实变函数论[M]. 北京: 北京大学出版社, 2001.

[2] 聂灵沼, 丁石孙. 代数学引论[M]. 第二版. 北京: 高等教育出版社, 2000.

[3] 杨旭. 选择公理的等价命题及应用[J]. 四平师院学报(自然科学版), 1982(1): 27-45.