

n -边形的中心化子代数

赵 伟

河北地质大学数理教学部, 河北 石家庄

收稿日期: 2024年2月25日; 录用日期: 2024年3月20日; 发布日期: 2024年3月27日

摘 要

用符号 C_n 表示顶点集为 X 的 n -边形。任意取定顶点 $x \in X$, 用 $\mathcal{A} := \mathcal{A}(x)$ 表示关于点 x 的稳定子群(C_n 的自同构群中的子群)的中心化子代数。在本文中, 我们首先通过点 x 的稳定子群在集合 $X \times X$ 上的作用构造出 \mathcal{A} 的一组基。然后, 给出 \mathcal{A} 的三个子代数使得它们的向量空间直和恰好是 \mathcal{A} 。最后, 我们证明代数 \mathcal{A} 和代数 T 相等, 这里 $T := T(x)$ 表示 C_n 的关于点 x 的Terwilliger代数。

关键词

n -边形, 中心化子代数, Terwilliger代数

The Centralizer Algebra of the Ordinary n -Cycle

Wei Zhao

School of Mathematics and Science, Hebei GEO University, Shijiazhuang Hebei

Received: Feb. 25th, 2024; accepted: Mar. 20th, 2024; published: Mar. 27th, 2024

Abstract

Let C_n denote the Ordinary n -cycle with vertex set X . Fix any vertex $x \in X$, and let $\mathcal{A} := \mathcal{A}(x)$ denote the centralizer algebra of the stabilizer of x in the automorphism group of C_n . In this paper, we first give a basis of \mathcal{A} by this stabilizer acting on $X \times X$. Moreover, we give three subalgebras of \mathcal{A} such that their direct sum is just \mathcal{A} as vector space of matrices. Finally, we show that the two algebras \mathcal{A} and T coincide, where $T := T(x)$ denotes the Terwilliger algebra of C_n with respect to x .

Keywords

Ordinary n -Cycle, Centralizer Algebra, Terwilliger Algebra

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

设 $\Gamma=(Y, E)$ 为一距离正则图, 其顶点集为 Y , 边集为 E . 取定顶点 $x \in Y$, 则图 Γ 关于顶点 x 的稳定子群(Γ 的自同构群中的子群)的中心化子代数是由在点 x 的稳定子群作用下的全体不变矩阵所组成的矩阵集合, 这里矩阵的行标与列标由集合 Y 中元素所标定. 一般来说, 图 Γ 的中心化子代数 \mathcal{A} 的一组基可以通过关于点 x 的稳定子群作用在集合 $Y \times Y$ 上得到, 但有时也可能是比较困难的.

Terwilliger 代数(或次成分代数)对于距离正则图的研究十分重要, 并且已成为代数组合理论的重要研究内容[1] [2] [3]. 我们知道代数 Terwilliger 代数是中心化子代数的子代数. 一个重要的研究问题是对于哪些距离正则图其中心化子代数和 Terwilliger 代数相等. 事实上, 对于某些距离正则图, 其中心化子代数和 Terwilliger 代数已经被证明是相等的. 例如, 对于 Hamming 图, A. Schrijver 等人刻画了该图的中心化子代数的一组基, 并证明了其中心化子代数和 Terwilliger 代数相等[4] [5]; 对于 Johnson 图, 谭莹莹等人证明了其中心化子代数和 Terwilliger 代数相等[6]; 对于折叠 n -立方图, 侯利航等人刻画了该图的中心化子代数的一组基, 并证明了其中心化子代数和 Terwilliger 代数相等[7]. 基于上述文献, 本文研究了 n -边形的中心化子代数结构: 刻画了 n -边形的中心化子代数的一组基, 并证明了其中心化子代数和 Terwilliger 代数相等. 本文所用的方法可以看做是上述文献[7]中研究方法的一种推广.

n -边形是一类经典的有 Q -多项式结构的距离可迁图[8]. 但其中心化子代数还没有被完全刻画. 在本文中, 我们将刻画 n -边形的中心化子代数结构. 为了讨论方便, 用符号 C_n 来表示 n -边形, 其顶点集为 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. 任取两个不同的顶点 $x_p, x_q \in X$ ($1 \leq p, q \leq n$), 它们邻接当且仅当 $|p - q| = 1$ 或 $n - 1$. 由此可得图 C_n 的距离函数:

$$\partial(x_p, x_q) = \begin{cases} |p - q| & \text{如果 } 0 \leq |p - q| \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \\ n - |p - q| & \text{如果 } \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \leq |p - q| \leq n - 1. \end{cases} \quad (x_p, x_q \in X) \quad (1)$$

这里 $\lfloor a \rfloor$ 为小于或等于 a 的最大整数. 由(1)可知图 C_n 的直径为 $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.

在本文中, 取定 $x_1 \in X$ 并把该点作为图 C_n 的基点. 设 $\mathcal{A} := \mathcal{A}(x_1)$ 是关于点 x_1 的稳定子群(C_n 的自同构群中的子群)的中心化子代数. 我们首先给出了点 x_1 的稳定子群作用在集合 $X \times X$ 的所有轨道, 每个轨道只含有一个或两个元素. 通过在每个轨道上定义相应的 0-1 矩阵, 得到了 \mathcal{A} 的一组基(见定理 3.5). 然后, 我们给出 \mathcal{A} 的三个子代数并计算它们的维数(见命题 3.6~3.8). 此外, 这三个子代数的向量空间直和恰好是 \mathcal{A} (见引理 3.9). 最后我们证明代数 \mathcal{A} 和代数 T 相等并得到了 T 的一组基, 这里 $T := T(x_1)$ 表示图 C_n 关于点 x_1 的 Terwilliger 代数(见定理 3.11 和定理 3.12).

为了更好地理解本文，在本节的最后给出一些主要符号的说明：

\mathbb{C} ：复数域。

Y ：有限非空集合。

$\text{Mat}_Y(\mathbb{C})$ ：复数域 \mathbb{C} 上的全体 $|Y|$ 阶方阵构成的矩阵代数，其中矩阵的行标与列标 Y 的元素标定。

$\Gamma = (Y, E)$ ：有限无向的，没有环与重边的连通图， Y, E 分别为其顶点集和边集。

$\text{Aut}_x(\Gamma)$ ：点 x 在图 Γ 的自同构群中的稳定子群。

C_n ：顶点集为 X 的 n -边形，其中 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 。

$\mathcal{A} := \mathcal{A}(x_1)$ ：图 C_n 关于点 x_1 的中心化子代数。

$T := T(x_1)$ ：图 C_n 关于点 x_1 的 Terwilliger 代数。

2. 预备知识

在本节，我们将介绍有关距离正则图和中心化子代数的一些概念和基本事实。

设 \mathbb{C} 复数域， Y 是一个非零有限集合。由域 \mathbb{C} 上的全体 $|Y|$ 阶方阵构成的 \mathbb{C} -代数记为 $\text{Mat}_Y(\mathbb{C})$ ，称为全矩阵代数，其中矩阵的行标与列标由 Y 的元素标定。

设 $\Gamma = (Y, E)$ 为一个有限无向的，没有环与重边的连通图。用 ∂ 表示图 Γ 的距离函数。设 $D := \max\{\partial(x, y) \mid x, y \in Y\}$ ，称 D 为图 Γ 的直径。如果对于任意的整数 $i (0 \leq i \leq D)$ 和任意顶点对 (x, y) 和 (u, v) 满足 $\partial(x, y) = \partial(u, v) = i$ ，存在图 Γ 的自同构映射把 x 映到 u ， y 映到 v ，那么称图 Γ 是距离可迁的。对于任意的 $x, y \in Y$ 满足 $\partial(x, y) = h (0 \leq h \leq D)$ ，如果整数 $p_{ij}^h := |\{z \in Y \mid \partial(x, z) = i, \partial(z, y) = j\}|$ 与 x, y 的选取无关，那么我们称图 Γ 是距离正则的。注意到距离可迁图一定是距离正则图，反之不一定成立。在本节以下部分，假设图 Γ 是一距离正则图。

取定 $x \in Y$ ，并把点 x 作为基点。设 $\text{Aut}_x(\Gamma)$ 为点 x 在 Γ 的自同构群中的稳定子群。任取 $M \in \text{Mat}_Y(\mathbb{C})$ ， $\sigma \in \text{Aut}_x(\Gamma)$ 。如果对任意的 $y, z \in Y$ ，有 $M_{(\sigma y, \sigma z)} = M_{(y, z)}$ ，则称矩阵 M 在 σ 的作用下是不变的。由 $\text{Aut}_x(\Gamma)$ 作用下的全体不变矩阵所组成的矩阵集合称为 $\text{Aut}_x(\Gamma)$ 的中心化子代数(作为集合)。接下来，我们将介绍中心化子代数的一些子代数：Bose-Mesner 代数，对偶 Bose-Mesner 代数以及 Terwilliger 代数。

对于每一个 $i (0 \leq i \leq D)$ ，设矩阵 $A_i \in \text{Mat}_Y(\mathbb{C})$ ，其 (x, y) -位置元素 $(A_i)_{xy} = 1$ ，如果 $\partial(x, y) = i$ ； $(A_i)_{xy} = 0$ ，如果 $\partial(x, y) \neq i$ 。易知矩阵 A_0, A_1, \dots, A_D 张成了全矩阵代数 $\text{Mat}_Y(\mathbb{C})$ 的一个交换子代数，我们称这个代数为图 Γ 的 Bose-Mesner 代数。事实上，Bose-Mesner 代数可以由邻接矩阵 A_1 生成。

取定 $x \in Y$ ，并把点 x 作为基点。对于每一个 $i (0 \leq i \leq D)$ 。设 $E_i^* = E_i^*(x)$ 为 $\text{Mat}_Y(\mathbb{C})$ 中的对角矩阵，其 (y, y) -位置元素 $(E_i^*)_{yy} = 1$ ，如果 $\partial(x, y) = i$ ； $(E_i^*)_{yy} = 0$ ，如果 $\partial(x, y) \neq i$ 。易知矩阵 $E_0^*, E_1^*, \dots, E_D^*$ 张成了全矩阵代数 $\text{Mat}_Y(\mathbb{C})$ 的一个交换子代数，我们称这个代数为图 Γ 关于点 x 的对偶 Bose-Mesner 代数。

图 Γ 的 Bose-Mesner 代数和对偶 Bose-Mesner 代数生成全矩阵代数的一个子代数，我们称这个子代数为图 Γ 关于点 x 的 Terwilliger 代数(或次成分代数)。

关于距离正则图和 Terwilliger 代数的更多知识，可参考文献[1] [2] [3] [8]。

3. C_n 的中心化子代数

回顾第一节中 n -边形 C_n 的定义。本节给出图 $C_n (n \geq 3)$ 的中心化子代数的一组具体的基。由于 C_n 是距离可迁图，因此可取定顶点 $x_1 \in X$ 作为基点。用符号 $\text{Aut}_{x_1}(C_n)$ 表示点 x_1 在 C_n 的自同构群中的稳定子群。易知稳定子群由集合 X 上的两个变换组成：

$$\text{Aut}_{x_1}(C_n) = \left\{ (\mathbf{1}), (2\ n)(3\ n-1) \cdots \left(\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + 1\ n - \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + 1 \right) \right\}. \quad (2)$$

这里 $(\mathbf{1})$ 表示恒等变换: $x_i \mapsto x_i (1 \leq i \leq n)$; $(i\ n-i+2)$ 表示集合 X 上的一个变换:

$$x_{n-i+2} \mapsto x_i, \quad x_{n-i+2} \mapsto x_i \left(2 \leq i \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + 1 \right).$$

对于每一个有序 2-元组 $(x_p, x_q) \in X \times X (1 \leq p, q \leq n)$, 定义相应的整数 3-元组 (i, j, t) 如下:

$$\rho(x_p, x_q) := (i, j, t), \quad \text{这里 } i = \partial(x_1, x_p), j = \partial(x_1, x_q), t = \partial(x_p, x_q). \quad (3)$$

注意到 $0 \leq i, j, t \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$. 易知所有满足(3)的整数 3-元组 (i, j, t) 构成如下集合 \mathcal{I} :

$$\mathcal{I} = \left\{ (i, j, t) \mid \rho(x_p, x_q) := (i, j, t), x_p, x_q \in X, 1 \leq p, q \leq n \right\}. \quad (4)$$

对于 \mathcal{I} 中任意整数 3-元组 (i, j, t) , 由(1), (3)可知, 满足 $\rho(x_p, x_q) := (i, j, t)$ 的 p, q 可以分为如下四种情况:

(i) 如果 $p = i+1, q = j+1$, 则 $0 \leq i, j \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$. 由(1)式可知, $t = \partial(x_{i+1}, x_{j+1}) = |i-j|$.

(ii) 如果 $p = i+1, q = n-j+1$, 则 $0 \leq i \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, 1 \leq j \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$. 由(1)可知, 当 $1 \leq i+j \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ 时, $t = \partial(x_{i+1}, x_{n-j+1}) = i+j$; 当 $\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor \leq i+j \leq n-1$ 时, $t = \partial(x_{i+1}, x_{n-j+1}) = n-(i+j)$.

(iii) 如果 $p = n-i+1, q = j+1$, 则 $1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor, 0 \leq j \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$. 由(1)可知, 当 $1 \leq i+j \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ 时, $t = \partial(x_{n-i+1}, x_{j+1}) = i+j$; 当 $\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor \leq i+j \leq n-1$ 时, $t = \partial(x_{n-i+1}, x_{j+1}) = n-(i+j)$.

(iv) 如果 $p = n-i+1, q = n-j+1$, 则 $1 \leq i, j \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$. 由(1)可知, $t = \partial(x_{n-i+1}, x_{n-j+1}) = |i-j|$.

根据上述四种情况, 定义 \mathcal{I} 的三个子集:

$$S_1 = \left\{ (i, j, t) \in \mathcal{I} \mid i = 0, 0 \leq j \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \text{ 且 } j = 0, 0 \leq i \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, t = |i-j| \right\}.$$

$$S_2 = \left\{ (i, j, t) \in \mathcal{I} \mid 1 \leq i, j \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor, t = |i-j| \text{ 且 } t = i+j, \text{ 如果 } 2 \leq i+j \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor, \right. \\ \left. t = n-(i+j), \text{ 如果 } \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor \leq i+j \leq 2 \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \right\}.$$

$$S_3 = \left\{ (i, j, t) \in \mathcal{I} \mid i = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, 1 \leq j \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \text{ 且 } j = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, 1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, t = |i-j| \right\}.$$

命题 3.1 对于 $n \geq 3$, 我们有

$$\mathcal{I} = \begin{cases} S_1 \cup S_2 \cup S_3 & \text{如果 } n \text{ 是偶数,} \\ S_1 \cup S_2 & \text{如果 } n \text{ 是奇数.} \end{cases} \quad (5)$$

并且 \mathcal{I} 的基数为

$$|\mathcal{I}| = \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil^2 + \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor^2. \quad (6)$$

这里的 $\lceil a \rceil$ 表示大于或等于 a 的最小整数。

证由集合 S_2, S_3 的定义易知, 当 n 为奇数时 $S_3 \subseteq S_2$, 即 $\mathcal{I} = S_1 \cup S_2$ 。当 n 为偶数时, $\mathcal{I} = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ 。所以有(5)成立。接下来, 我们计算集合 \mathcal{I} 的基数。由 S_1, S_2, S_3 是两两互不相交的, 所以有

$$|\mathcal{I}| = \begin{cases} |S_1| + |S_2| + |S_3| & \text{如果 } n \text{ 是偶数,} \\ |S_1| + |S_2| & \text{如果 } n \text{ 是奇数.} \end{cases} \quad (7)$$

通过计算可得

$$|S_1| = 2 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1, |S_2| = 2 \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor^2, |S_3| = 2 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1. \quad (8)$$

将(8)代入到(7)中得到(6)。

对于每一个 $(i, j, t) \in \mathcal{I}$, 定义如下集合:

$$X_{i,j,t} = \left\{ (x_p, x_q) \in X \times X \mid \rho(x_p, x_q) = (i, j, t), 1 \leq p, q \leq n \right\}. \quad (9)$$

接下来, 对于每一个 $(i, j, t) \in \mathcal{I}$, 我们将给出集合 $X_{i,j,t}$ 的意义。为此, 我们先分别给出集合 S_1 的一个子集:

$$S_1' = \begin{cases} \left\{ (0, 0, 0), \left(0, \frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right), \left(\frac{n}{2}, 0, \frac{n}{2}\right) \right\} & \text{如果 } n \text{ 是偶数,} \\ \{(0, 0, 0)\} & \text{如果 } n \text{ 是奇数.} \end{cases} \quad (10)$$

和 S_3 (n 为偶数时)的一个子集: $S_3' = \left\{ \left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}, 0\right) \right\}$ 。

命题 3.2 对于每一个 $(i, j, t) \in \mathcal{I}$, 以下(i)~(iii)成立。

(i) 对于 $(i, j, t) \in S_1$, 我们有

(ia) 如果 $(i, j, t) \in S_1'$, 则 $X_{0,0,0} = \{(x_1, x_1)\}$; 当 n 为偶数时,

$$X_{0, \frac{n}{2}, \frac{n}{2}} = \left\{ (x_1, x_{\frac{n}{2}+1}) \right\}, X_{\frac{n}{2}, 0, \frac{n}{2}} = \left\{ (x_{\frac{n}{2}+1}, x_1) \right\};$$

(ib) 如果 $(i, j, t) \in S - S_1'$, 则

$$X_{i,j,t} = \begin{cases} \left\{ (x_1, x_{j+1}), (x_1, x_{n-j+1}) \right\} & \text{如果 } i = 0, \\ \left\{ (x_{i+1}, x_1), (x_{n-i+1}, x_1) \right\} & \text{如果 } j = 0. \end{cases}$$

(ii) 对于 $(i, j, t) \in S_2$, 我们有

$$X_{i,j,t} = \begin{cases} \left\{ (x_{i+1}, x_{j+1}), (x_{n-i+1}, x_{n-j+1}) \right\} & \text{如果 } t = |i - j|, \\ \left\{ (x_{i+1}, x_{n-j+1}), (x_{n-i+1}, x_{j+1}) \right\} & \text{如果 } t = i + j \text{ 或 } t = n - (i + j). \end{cases}$$

(iii) 对于 $(i, j, t) \in S_3$ 并且 n 为偶数, 我们有

(iiia) 如果 $(i, j, t) \in S_3'$, 则 $X_{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}, 0} = \left\{ (x_{\frac{n}{2}+1}, x_{\frac{n}{2}+1}) \right\}$ 。

(iiib) 如果 $(i, j, t) \in S_3 - S_3'$, 则

$$X_{i,j,t} = \begin{cases} \left\{ \left(x_{\frac{n}{2}+1}, x_{j+1} \right), \left(x_{\frac{n}{2}+1}, x_{j+1} \right) \right\} & \text{如果 } i = \frac{n}{2}, \\ \left\{ \left(x_{i+1}, x_{\frac{n}{2}+1} \right), \left(x_{n-i+1}, x_{\frac{n}{2}+1} \right) \right\} & \text{如果 } j = \frac{n}{2}. \end{cases}$$

证 根据集合 $X_{i,j,t}$, $(i, j, t) \in \mathcal{I}$ 的定义, 以及上述有关 p, q 的四种情况的讨论可得。

命题 3.3 集合 $X_{i,j,t}$, $(i, j, t) \in \mathcal{I}$ 是稳定子群 $\text{Aut}_{x_i}(C_n)$ 作用在集合 $X \times X$ 上的所有轨道。

证 由定义可知 $X_{i,j,t}$, $(i, j, t) \in \mathcal{I}$ 构成了集合 $X \times X$ 的一个分拆。任取 $x_p, x_q \in X$, $(1 \leq p, q \leq n)$, 设 $\rho(x_p, x_q) = (i, j, t)$, $(i, j, t) \in \mathcal{I}$, 容易证明当映射 σ 取遍稳定子群 $\text{Aut}_{x_i}(C_n)$ 时, $(\sigma x_p, \sigma x_q)$ 能够取遍集合 $X_{i,j,t}$ 。事实上, 任取 $\sigma \in \text{Aut}_{x_i}(C_n)$, $x_i \in X$ ($1 \leq i \leq n$)。由(2)可知, 变换 σ 为 $x_i \mapsto x_i$ ($1 \leq i \leq n$), 或者 σ 为 $x_i \mapsto x_{n-i+2}, x_{n-i+2} \mapsto x_i$ ($2 \leq i \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1$)。基于此事实可知, 对于给定的 $(i, j, t) \in \mathcal{I}$, 稳定子群 $\text{Aut}_{x_i}(C_n)$ 可迁地作用在集合 $X_{i,j,t}$ 上。

定义 3.4 对于每一个 $(i, j, t) \in \mathcal{I}$, 定义矩阵 $M_{i,j}^t \in \text{Mat}_X(\mathbb{C})$ 如下:

$$(M_{i,j}^t)_{x_p, x_q} = \begin{cases} 1 & \text{如果 } (x_p, x_q) \in X_{i,j,t}, \\ 0 & \text{否则.} \end{cases} \quad (x_p, x_q \in X).$$

注意到矩阵 $M_{i,j}^t$ 的转置为 $M_{j,i}^t$, 并且矩阵 $M_{i,j}^t$, $(i, j, t) \in \mathcal{I}$ 是线性无关的。由命题 3.3 可知, 矩阵 $M_{i,j}^t$ 在 $\text{Aut}_{x_i}(C_n)$ 的作用下是不变的。以矩阵 $M_{i,j}^t$, $(i, j, t) \in \mathcal{I}$ 为一组基张成的域 \mathbb{C} 上的线性空间记为 \mathcal{A} 。事实上, \mathcal{A} 就是稳定子群 $\text{Aut}_{x_i}(C_n)$ 的中心化子代数。因此, $M_{i,j}^t$, $(i, j, t) \in \mathcal{I}$ 构成了代数 \mathcal{A} 的一组基。

定理 3.5 集合 $\{M_{i,j}^t \mid (i, j, t) \in \mathcal{I}\}$ 是代数 \mathcal{A} 的一组基, 其维数为

$$\dim(\mathcal{A}) = \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil^2 + \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor^2.$$

证 由命题 3.1 和命题 3.3 可证。

接下来, 我们将给出 \mathcal{A} 的三个子代数, 并计算它们的维数。为此, 下面先给出 \mathcal{A} 的三个子空间: 以矩阵 $\{M_{i,j}^t \mid (i, j, t) \in \mathcal{I}_1\}$, 如果 $\mathcal{I}_1 = \{(i, j, t) \in \mathcal{I} \mid i, j \text{ 都为偶数}\}$, 为一组基张成 \mathcal{A} 的一个子空间, 记为 \mathcal{A}_1 ; 以矩阵 $\{M_{i,j}^t \mid (i, j, t) \in \mathcal{I}_2\}$, 如果 $\mathcal{I}_2 = \{(i, j, t) \in \mathcal{I} \mid i, j \text{ 都为奇数}\}$, 为一组基张成 \mathcal{A} 的一个子空间, 记为 \mathcal{A}_2 ; 以矩阵 $\{M_{i,j}^t \mid (i, j, t) \in \mathcal{I}_3\}$, 如果 $\mathcal{I}_3 = \{(i, j, t) \in \mathcal{I} \mid i+j \text{ 为奇数}\}$, 为一组基张成 \mathcal{A} 的一个子空间, 记为 \mathcal{A}_3 。

命题 3.6 子空间 \mathcal{A}_1 是 \mathcal{A} 的子代数, 其维数为

$$\dim(\mathcal{A}_1) = \begin{cases} \frac{n^2}{8} + 2 & \text{如果 } n \equiv 0 \pmod{4}, \\ 2 \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor^2 + 2 \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + 1 & \text{如果 } n \not\equiv 0 \pmod{4}. \end{cases} \quad (11)$$

证 易知 \mathcal{A}_1 对矩阵加法, 数乘, 共轭转置和矩阵乘法封闭。因此 \mathcal{A}_1 是 \mathcal{A} 的子代数。为了计算 \mathcal{A}_1 的维数, 只需计算 \mathcal{I}_1 的基数。定义 \mathcal{I}_1 三个的子集如下:

$$\mathcal{I}_{11} = \left\{ (i, j, t) \in \mathcal{I}_1 \mid i = 0, 0 \leq j \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \text{ 且 } j = 0, 0 \leq i \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, t = |i - j| \right\}.$$

$$\mathcal{I}_{12} = \left\{ (i, j, t) \in \mathcal{I}_1 \mid 1 \leq i, j \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor, t = |i-j| \text{ 且 } t = i+j \text{ 如果 } 2 \leq i+j \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor, \right. \\ \left. t = n - (i+j) \text{ 如果 } \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor \leq i+j \leq 2 \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \right\}.$$

$$\mathcal{I}_{13} = \left\{ (i, j, t) \in \mathcal{I}_1 \mid i = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, 1 \leq j \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \text{ 且 } j = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, 1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, t = |i-j| \right\}.$$

易知 $\mathcal{I}_{11} \subset S_1$, $\mathcal{I}_{12} \subset S_2$, $\mathcal{I}_{13} \subset S_3$. 所以有

$$|\mathcal{I}_1| = \begin{cases} |\mathcal{I}_{11}| + |\mathcal{I}_{12}| + |\mathcal{I}_{13}| & \text{如果 } n \equiv 0 \pmod{4}, \\ |\mathcal{I}_{11}| + |\mathcal{I}_{12}| & \text{如果 } n \not\equiv 0 \pmod{4}. \end{cases} \quad (12)$$

通过计算得到

$$|\mathcal{I}_{11}| = \begin{cases} \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 & \text{如果 } n \equiv 0 \text{ 或 } 1 \pmod{4}, \\ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor & \text{如果 } n \equiv 2 \text{ 或 } 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

$$|\mathcal{I}_{12}| = \begin{cases} \frac{(n-4)^2}{8} & \text{如果 } n \equiv 0 \pmod{4}, \\ 2 \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor^2 & \text{如果 } n \not\equiv 0 \pmod{4}. \end{cases}$$

$$|\mathcal{I}_{13}| = \frac{n}{2} - 1, \text{ 这里的 } n \equiv 0 \pmod{4}.$$

将上述结果代入(12)中得到(11)成立。

命题 3.7 子空间 \mathcal{A}_2 是 \mathcal{A} 的子代数, 其维数为

$$\dim(\mathcal{A}_2) = \begin{cases} \frac{n^2 + 4}{8} & \text{如果 } n \equiv 2 \pmod{4}, \\ 2 \left\lfloor \frac{n+1}{4} \right\rfloor^2 & \text{如果 } n \not\equiv 2 \pmod{4}. \end{cases} \quad (13)$$

证类似于命题 3.6 的证明, 可知 \mathcal{A}_2 是 \mathcal{A} 的子代数且

$$\dim(\mathcal{A}_2) = |\mathcal{I}_2|$$

为了计算 \mathcal{I}_2 的基数, 定义 \mathcal{I}_2 两个子集如下:

$$\mathcal{I}_{21} = \left\{ (i, j, t) \in \mathcal{I}_2 \mid 1 \leq i, j \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor, t = |i-j| \text{ 且 } t = i+j \text{ 如果 } 2 \leq i+j \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor, \right. \\ \left. t = n - (i+j) \text{ 如果 } \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor \leq i+j \leq 2 \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \right\}.$$

$$\mathcal{I}_{22} = \left\{ (i, j, t) \in \mathcal{I}_2 \mid i = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, 1 \leq j \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \text{ 且 } j = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, 1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, t = |i-j| \right\}.$$

由定义可知

$$|\mathcal{I}_2| = \begin{cases} |\mathcal{I}_{21}| + |\mathcal{I}_{22}| & \text{如果 } n \equiv 2 \pmod{4}, \\ |\mathcal{I}_{22}| & \text{如果 } n \not\equiv 2 \pmod{4}. \end{cases}$$

通过计算得到

$$|\mathcal{I}_{21}| = \begin{cases} \frac{(n-2)^2}{8} & \text{如果 } n \equiv 2 \pmod{4}, \\ 2 \left\lfloor \frac{n+1}{4} \right\rfloor^2 & \text{如果 } n \not\equiv 2 \pmod{4}. \end{cases} \quad |\mathcal{I}_{22}| = \frac{n}{2}, \text{ 当 } n \equiv 2 \pmod{4} \text{ 时.}$$

因此(13)成立。

命题 3.8 子空间 \mathcal{A}_3 是 \mathcal{A} 的子代数, 其维数为

$$\dim(\mathcal{A}_3) = \begin{cases} \frac{n^2}{4} & \text{如果 } n \equiv 0 \pmod{4}, \\ \frac{n^2}{4} + 1 & \text{如果 } n \equiv 2 \pmod{4}, \\ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor^2 + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor & \text{如果 } n \equiv 1 \text{ 或 } 3 \pmod{4}. \end{cases} \quad (14)$$

证类似于命题 3.6 的证明, 可知 \mathcal{A}_3 是 \mathcal{A} 的子代数且

$$\dim(\mathcal{A}_3) = |\mathcal{I}_3|$$

为了计算 \mathcal{I}_3 的基数, 定义 \mathcal{I}_3 三个子集如下:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{31} &= \left\{ (i, j, t) \in \mathcal{I}_3 \mid i = 0, 0 \leq j \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \text{ 且 } j = 0, 0 \leq i \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, t = |i - j| \right\}. \\ \mathcal{I}_{32} &= \left\{ (i, j, t) \in \mathcal{I}_3 \mid 1 \leq i, j \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor, t = |i - j| \text{ 且 } t = i + j \text{ 如果 } 2 \leq i + j \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor, \right. \\ &\quad \left. t = n - (i + j) \text{ 如果 } \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor \leq i + j \leq 2 \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \right\}. \\ \mathcal{I}_{33} &= \left\{ (i, j, t) \in \mathcal{I}_3 \mid i = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, 1 \leq j \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \text{ 且 } j = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, 1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, t = |i - j| \right\}. \end{aligned}$$

易知当 $n \equiv 1$ 或 $3 \pmod{4}$ 时, $\mathcal{I}_{33} \subseteq \mathcal{I}_{32}$, 所以我们有

$$|\mathcal{I}_3| = \begin{cases} |\mathcal{I}_{31}| + |\mathcal{I}_{32}| + |\mathcal{I}_{33}| & \text{如果 } n \equiv 0 \text{ 或 } 2 \pmod{4}, \\ |\mathcal{I}_{31}| + |\mathcal{I}_{32}| & \text{如果 } n \equiv 1 \text{ 或 } 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

通过计算得到

$$\begin{aligned} |\mathcal{I}_{31}| &= \begin{cases} \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor & \text{如果 } n \equiv 0 \text{ 或 } 1 \pmod{4}, \\ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 & \text{如果 } n \equiv 2 \text{ 或 } 3 \pmod{4}. \end{cases} \\ |\mathcal{I}_{33}| &= \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{如果 } n \equiv 0 \pmod{4}, \\ \frac{n}{2} - 1 & \text{如果 } n \equiv 2 \pmod{4}. \end{cases} \end{aligned}$$

$$|\mathcal{I}_{32}| = \begin{cases} \frac{n^2}{4} - n & \text{如果 } n \equiv 0 \pmod{4}, \\ \left(\frac{n-2}{2}\right)^2 & \text{如果 } n \equiv 2 \pmod{4}, \\ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor^2 & \text{如果 } n \equiv 1 \pmod{4}, \\ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor^2 - 1 & \text{如果 } n \equiv 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

因此(14)成立。

引理 3.9 我们有 $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3$ (向量空间直和)。

证 由定理 3.5 和命题 3.6~3.8 可知, $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3$ 是 \mathcal{A} 的子代数, 并且 $\dim(\mathcal{A}) = \dim(\mathcal{A}_1) + \dim(\mathcal{A}_2) + \dim(\mathcal{A}_3)$, 从而该引理成立。

对于图 C_n , 用 A_k 和 $E_k^* := E_k^*(x_1)$ ($0 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$) 分别表示它的第 k 个距离矩阵和第 k 个对偶幂等元,

用 $T := T(x_1)$ 表示由 A_k 和 E_k^* ($k = 0, 1, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$) 生成的 Terwilliger 代数。

引理 3.10 以下(i)~(iii)成立。

(i) 对于每一个 $k, 0 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ 有

$$A_k = \sum_{\substack{(i,j,t) \in \mathcal{I} \\ t=k}} M_{i,j}^t. \quad (15)$$

(ii) 任意 $(i,j,t) \in \mathcal{I}$ 有

$$E_i^* A_t E_j^* = M_{i,j}^t. \quad (16)$$

(iii) 对于每一个 $k, 0 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ 有

$$E_k^* = M_{k,k}^0. \quad (17)$$

证 (i) 当 $0 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ 时, 考虑等式(15)两端矩阵的 (x_p, x_q) -位置元素。容易验证当 $\partial(x_p, x_q) = k$ 时,

$$(A_k)_{x_p x_q} = \sum_{\substack{(i,j,t) \in \mathcal{I} \\ t=k}} (M_{i,j}^t)_{x_p x_q} = 1, \text{ 否则 } (A_k)_{x_p x_q} = \sum_{\substack{(i,j,t) \in \mathcal{I} \\ t=k}} (M_{i,j}^t)_{x_p x_q} = 0.$$

(ii) 在(15)式的等号两端左乘 E_i^* , 右乘 E_j^* 得到(16)。

(iii) 将 $i = j = k, t = |i - j| = 0$ 代入(16)可得(17)。

定理 3.11 代数 $\mathcal{A} = T$ 。

证 要证明两个代数相等, 只需证明这两个代数互相包含即可。因为 $M_{i,j}^t, (i,j,t) \in \mathcal{I}$ 是代数 \mathcal{A} 的一组基, 所有矩阵 A_k, E_k^* ($k = 0, 1, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$) 生成了代数 T 。一方面, 由引理 3.10 (i) (iii)可知代数 T 的每一个元素都属于代数 \mathcal{A} , 因此有 $T \subseteq \mathcal{A}$ 。另一方面, 由引理 3.10 (ii)可知代数 \mathcal{A} 的每一个元素都属于代数 T , 因此有 $\mathcal{A} \subseteq T$ 。所以, 代数 $\mathcal{A} = T$ 。

定理 3.12 集合 $\{M'_{i,j} \mid (i,j,t) \in \mathcal{I}\}$ 构成了代数 T 的一组基, 其维数为

$$\dim(T) = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor^2 + \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor^2.$$

证 由定理 3.5 和定理 3.11 得证。

接下来以 5-边形 C_5 为例来说明本文的方法和结论。

对于 C_5 , 顶点集为 $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ 。由公式(2)可知图 C_5 顶点 x_1 的稳定子群 $\text{Aut}_{x_1}(C_5) = \{(1), (25), (34)\}$ 。根据(4)有

$$\mathcal{I} = \{(0,0,0), (0,1,1), (0,2,2), (1,0,1), (1,1,0), (1,1,2), (1,2,1), (1,2,2), (2,0,2), (2,1,1), (2,1,2), (2,2,0), (2,2,1)\}.$$

由此可以得到稳定子群 $\text{Aut}_{x_1}(C_5)$ 作用在集合 $X \times X$ 上的轨道

$$X_{i,j,t} = \{(x_1, x_1), (x_1, x_2), (x_1, x_3), (x_2, x_1), (x_2, x_2), (x_2, x_3), (x_2, x_4), (x_2, x_5), \\ (x_3, x_1), (x_3, x_2), (x_3, x_3), (x_3, x_4), (x_3, x_5)\}$$

由定理 3.5 可知, 图 C_5 的中心化子代数 $\mathcal{A} := \mathcal{A}(x_1)$ 的一组基为

$$M_{0,0}^0, M_{0,1}^1, M_{0,2}^2, M_{1,0}^1, M_{1,1}^0, M_{1,1}^2, M_{1,2}^1, M_{1,2}^2, M_{2,0}^2, M_{2,1}^1, M_{2,1}^2, M_{2,2}^0, M_{2,2}^1.$$

其维数为

$$\dim(\mathcal{A}) = \left\lfloor \frac{5+1}{2} \right\rfloor^2 + \left\lfloor \frac{5-1}{2} \right\rfloor^2 = 13$$

相应地, 由命题 3.6~3.8 可知。

\mathcal{A}_1 的一组基为 $M_{0,0}^0, M_{0,2}^2, M_{2,0}^2, M_{2,2}^0, M_{2,2}^1$, 其维数为 $\dim(\mathcal{A}_1) = 2 \left\lfloor \frac{5}{4} \right\rfloor^2 + 2 \left\lfloor \frac{5}{4} \right\rfloor + 1 = 5$ 。

\mathcal{A}_2 的一组基为 $M_{1,1}^0, M_{1,1}^2$, 其维数为 $\dim(\mathcal{A}_2) = 2 \left\lfloor \frac{4+1}{4} \right\rfloor^2 = 2$ 。

\mathcal{A}_3 的一组基为 $M_{0,1}^1, M_{1,0}^1, M_{1,2}^1, M_{1,2}^2, M_{2,1}^1, M_{2,1}^2$, 其维数为 $\dim(\mathcal{A}_3) = \left\lfloor \frac{5}{2} \right\rfloor^2 + \left\lfloor \frac{5}{2} \right\rfloor = 6$ 。

另一方面, 图 C_5 的所有距离矩阵为 A_0, A_1, A_2 。所有对偶幂等元为 E_0^*, E_1^*, E_2^* 。由引理 3.10 可知

$$A_0 = M_{0,0}^0 + M_{1,1}^0 + M_{2,2}^0, \\ A_1 = M_{0,1}^1 + M_{1,0}^1 + M_{1,2}^1 + M_{2,1}^1 + M_{2,2}^1, \\ A_2 = M_{0,2}^2 + M_{1,1}^2 + M_{1,2}^2 + M_{2,0}^2 + M_{2,1}^2, \\ E_0^* = M_{0,0}^0, E_1^* = M_{1,1}^0, E_2^* = M_{2,2}^0,$$

并且

$$E_0^* A_0 E_0^* = M_{0,0}^0, E_0^* A_1 E_1^* = M_{0,1}^1, E_0^* A_2 E_2^* = M_{0,2}^2, E_1^* A_1 E_0^* = M_{1,0}^1, E_1^* A_0 E_1^* = M_{1,1}^0, E_1^* A_2 E_1^* = M_{1,1}^2, \\ E_1^* A_1 E_2^* = M_{1,2}^1, E_1^* A_2 E_2^* = M_{1,2}^2, E_2^* A_2 E_0^* = M_{2,0}^2, E_2^* A_1 E_1^* = M_{2,1}^1, E_2^* A_2 E_1^* = M_{2,1}^2, E_2^* A_0 E_2^* = M_{2,2}^0, E_2^* A_1 E_2^* = M_{2,2}^1.$$

因此对于图 C_5 有代数 $\mathcal{A} = T$, 这里 $T := T(x_1)$ 表示图 C_5 关于点 x_1 的 Terwilliger 代数。

参考文献

- [1] Terwilliger, P. (1992) The Subconstituent Algebra of an Association Scheme I. *Journal of Algebraic Combinatorics*, **1**,

-
- 363-388. <https://doi.org/10.1023/A:1022494701663>
- [2] Terwilliger, P. (1993) The Subconstituent Algebra of an Association Scheme II. *Journal of Algebraic Combinatorics*, **2**, 73-103.
- [3] Terwilliger, P. (1993) The Subconstituent Algebra of an Association Scheme III. *Journal of Algebraic Combinatorics*, **2**, 177-210. <https://doi.org/10.1023/A:1022415825656>
- [4] Gijswijt, D., Schrijver, A. and Tanaka, H. (2006) New Upper Bounds for Nonbinary Codes. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, **13**, 1719-1731. <https://doi.org/10.1016/j.jcta.2006.03.010>
- [5] Schrijver, A. (2005) New Code Upper Bounds from the Terwilliger Algebra and Semi definite Programming. *IEEE Transactions on Information Theory*, **51**, 2859-2866. <https://doi.org/10.1109/TIT.2005.851748>
- [6] Tan, Y., Fan, Y., Ito, T. and Liang, X. (2019) The Terwilliger Algebra of the Johnson Scheme $J(N,D)$ Revisited from the Viewpoint of Group Representations. *European Journal of Combinatorics*, **80**, 157-171. <https://doi.org/10.1016/j.ejc.2018.02.029>
- [7] Hou, L., Hou, B., Kang, N. and Gao, S. (2022) The Terwilliger Algebra of the Halved N -Cube from the Viewpoint of Its Automorphism Group Action. *European Journal of Combinatorics*, **101**, 103480. <https://doi.org/10.1016/j.ejc.2021.103480>
- [8] Brouwer, A.E., Cohen, A.M. and Neumaier, A. (1989) *Distance-Regular Graphs*. Springer, Berlin. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-74341-2>