Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2018, 7(5), 501-503
Published Online May 2018 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2018.75060

Hans汉斯

Research on High-Precision Model of Hyper-Geometric Distribution

Renshu Piao

Institute of Xi'an Microelectronics and Technology, Xi'an Shaanxi
Email: renshu2015@126.com

Received: Apr. 25th, 2018; accepted: May 11th, 2018; published: May 18th, 2018

Abstract

In order to derive the hyper-geometric distribution and multiplicative model, this paper classifies random variables according to their fractional properties. One is 0, and the other is 1, 2, ⋯, *n*. Through the combined hyper-geometric branching model of two groups of elements, mathematical transformations were respectively performed, and a hyper-geometric distribution continuous multiplication model with no computer overflow was deduced. This model accurately calculates the probability value of all elements 0, 1, ⋯, *n* of the hyper-geometric distribution, and the computer will not overflow when *N* is large.

Keywords

Hyper Geometric Distribution, Mathematical Transformation, Derivation, Random Variable, Branch, Model, Element

超几何分布高精度模型研究

朴仁淑

西安微电子技术研究所，陕西 西安
Email: renshu2015@126.com

收稿日期：2018年4月25日；录用日期：2018年5月11日；发布日期：2018年5月18日

摘　要

本文为了推导超几何分布连乘模型，根据它的分式性质，对随机变量进行了两种分类。一种为0的情况，另一种为1, 2, ⋯, *n*情况。通过对两组元素的组合式超几何分支模型，分别进行了数学变换，推导出计算机不会溢出的超几何分布连乘模型。此模型准确地计算超几何分布全元素0, 1, ⋯, *n*的概率值，并*N*大时计算机不会溢出。

文章引用：朴仁淑. 超几何分布高精度模型研究[J]. 应用数学进展, 2018, 7(5): 501-503.
DOI: 10.12677/aam.2018.75060

关键词

超几何分布，数学变换，推导，随机变量，分支，模型，元素

1. 引言

目前为止，超几何分布的计算变量 N 大时，只能用近似方法算出一个近似的概率值。但此方法计算复杂精度差，且应用也难，获得超几何分布的两个接收概率联立方程的解困难，无法设计抽样检查表[1] [2] [3]。而常用的超几何分布计算方法是用二项分布概率代替超几何分布概率，应用条件为变量比 $N/n > 10$。此时二项分布概率接近超几何分布概率，能得到的两个接收概率联立方程的解$(n \cdot c)$，并可设计出抽样检查表，但是二项分布与超几何分布相比，其精度较差[4] [5] [6]。本文针对此问题，分析了超几何分布，提出了高精度的分布模型，解决了利用二项分布替代超几何分布的情况，提高了精度。

2. 超几何分布模型建立

因随机变量部分元素 $1,2,\cdots,n$ 的超几何分支连乘模型，不能包含 0 元素的超几何分支连乘模型，所以由一个超几何分支连乘模型表达不了全元素超几何分布连乘模型，只能由两个超几何分支连乘模型才能表达全元素的超几何分布模型。为了分析方便，本文进行了两种情况的分析。一种为 $d = 0$ 的特殊情况和 $d = 1,2,\cdots,n$ 情况。

2.1. 随机变量元素 $d = 1, 2, \cdots, n$ 的超几何模型推导

用 L_{d1} 表示随机变量部分元素 $d = 1,2,\cdots,n$ 的超几何分支模型，为了便于区分，本文将 $d = 1,2,\cdots,n$ 的情况变量设为 d_1，推导连乘模型，展开组合式超几何分支模型 L_{dl} 如下：

$$L_{d1} = \frac{C_D^{d_1} C_{N-D}^{n-d_1}}{C_N^n} = \frac{(N-D)!}{N!} \cdot \frac{(N-n)!}{(N-D-n+d_1)!} \cdot \frac{n!}{(n-d_1)!} \cdot \frac{D!}{d_1!(D-d_1)!} \quad d_1 = 1,2,\cdots,n \tag{1}$$

对公式(1)的阶乘因式,进行展开和变换如下所示：

$$\begin{aligned} L_{d1} &= \frac{(N-D)!}{(N-D)! \cdot (N-D+1) \cdot (N-D+2) \cdots N} \\ &\cdot \frac{\left[(N-D)-(n-d_1)\right]! \cdot (N-D-n+d_1+1) \cdot (N-D-n+d_1+2) \cdots (N-n)}{\left[(N-D)-(n-d_1)\right]!} \\ &\cdot \frac{(n-d_1)! \cdot (n-d_1+1) \cdot (n-d_1+2) \cdots n}{(n-d_1)!} \cdot \frac{(n-d_1)! \cdot (n-d_1+1) \cdot (n-d_1+2) \cdots n}{(n-d_1)! \cdot d_1!} \\ &= \left(1-\frac{n-d_1}{N-D+1}\right) \cdot \left(1-\frac{n-d_1}{N-D+2}\right) \cdots \left(1-\frac{n-d_1}{N-D+D-d_1}\right) \cdot \left(1-\frac{N-n}{N-d_1+1}\right) \\ &\cdot \left(1-\frac{N-n}{N-d_1+2}\right) \cdots \left(1-\frac{N-n}{N-d_1+d_1}\right) \cdot \left(1+\frac{D-d_1}{1}\right) \cdot \left(1+\frac{D-d_1}{2}\right) \cdots \left(1+\frac{D-d_1}{d_1}\right) \end{aligned}$$

对公式(1)进行分解变换后，经重新组合，得到如下表达式：

$$L_{d1}=\prod_{k=1}^{D-d}\left(1-\frac{n-d}{N-D+k}\right)\cdot\prod_{k=1}^{d}\left(1-\frac{N-n}{N-d+k}\right)\cdot\prod_{k=1}^{d}\left(1+\frac{D-d}{k}\right)\quad d=1,2,3,\cdots,n \tag{2}$$

公式(2)的特点在于，前面两个连乘式的分母大于分子，其乘积总是小于“1”，第三连乘式没包含变量 N, 变量 N 大也计算不会产生溢出现象。

公式(2)中的变量为 $d=1,2,\cdots,n$，而未考虑 $d=0$ 的情况，而在实际应用中经常出现 $d=0$ 的情况。

2.2. 特殊随机变量 $d=0$ 的超几何分布模型

同理可推出，$d=0$ 的超几何分支模型 L_{d2}，模型如下：

$$L_{d2}=\frac{C_{N-D}^{n}}{C_{N}^{n}}=\frac{(N-D)}{N!}\cdot\frac{(N-n)!}{(N-D-n)!} \tag{3}$$

对上述的阶乘因式，进行数学变换，得到了 **0** 元素的超几何分支 L_{d2} 模型如下：

$$L_{d2}=\prod_{k=1}^{D}\left(1-\frac{n}{N-D+k}\right) \tag{4}$$

2.3. 超几何分布完整模型

针对变量的两种情况的特殊推导，可得出完整的超几何分布的数学模型，其表达式如下：

$$L_{d}=\frac{C_{D}^{d}C_{N-D}^{n-d}}{C_{D}^{n}}=\begin{cases}\prod_{k=1}^{D-d}\left(1-\frac{n-d}{N-D+k}\right)\cdot\prod_{k=1}^{d}\left(1-\frac{N-n}{N-d+k}\right)\cdot\prod_{k=1}^{d}\left(1+\frac{D-d}{k}\right) & d=1,2,\cdots,n\\ \prod_{k=1}^{D}\left(1-\frac{n}{N-D+k}\right) & d=0\end{cases} \tag{5}$$

从公式(5)可看出，该式计算不受 N 大小限制、计算准确，能获得全元素 $0,1,\cdots,n$ 的概率值。

3. 结束语

本文提出的超几何分布高精度模型，可进行准确计算，解决了超几何分布计算精度问题和在特殊情况下的应用，通过本模型可设计出计数抽样检查表，为产品抽样检查提供了准确的数学模型。

参考文献

[1] 马彦恒, 韩九强, 等. 测试性评估与验证的超几何分布法[J]. 西安交通大学学报, 2009, 43(3): 42-45.

[2] 范晓冬, 孙蕾. 计数抽样检验方案批接收概率的计算方法[J]. 渤海大学学报, 2005, 26(2): 102-104.

[3] 杨玉梅, 李峰. 超几何分布概率任意精度算法及其实现[J]. 徐州师范大学学报(自然科学版), 2010, 28(2): 20-25.

[4] 仲崇新. 二项概率和超几何概率的近似计算及其误差[J]. 数学的实践与认识, 1991(1): 55-61.

[5] 王学民. 概率论与数理统计[M]. 上海: 复旦大学出版社, 2011.

[6] 肖明森. 关于超几何分布简化计算方法的探讨[J]. 数理统计与管理, 1988(4): 34-37.

知网检索的两种方式：

1. 打开知网页面 http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD
   下拉列表框选择：[ISSN]，输入期刊 ISSN：2324-7991，即可查询
2. 打开知网首页 http://cnki.net/
   左侧“国际文献总库”进入，输入文章标题，即可查询

投稿请点击：http://www.hanspub.org/Submission.aspx
期刊邮箱：aam@hanspub.org