Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2021, 10(2), 518-530
Published Online February 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2021.102056

Hans汉斯

含Hardy-Sobolev临界指数的分数阶Kirchhoff型方程多重解的存在性

李时雨，魏公明

上海理工大学理学院，上海
Email: 928736127@qq.com

收稿日期：2021年1月23日；录用日期：2021年2月17日；发布日期：2021年2月25日

摘　要

本文主要研究了一类Kirchhoff型临界分数阶椭圆方程：

$$\left[a+b\left(\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\left(u(x)-u(y)\right)^2}{|x-y|^{3+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_{\mathbb{R}^3}\mu\frac{u^2}{|x|^{2s}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{s}{3-2s}}\right]\left[(-\Delta)^s u-\mu\frac{u}{|x|^{2s}}\right]$$
$$=|u|^{2_s^*-2}u+\lambda f(x)|u|^{q-2}u,$$

其中 $a,b>0,\frac{3}{4}<s<1,\mu\in\left[0,2^{2s}\Gamma^2\left(\frac{3+2s}{4}\right)\Big/\Gamma^2\left(\frac{3-2s}{4}\right)\right)$ 和 $q\in(1,2)$ 为常数，且 $2_s^*=\frac{6}{3-2s}$ 为 $\mathbb{R}^3$ 上的Hardy-Sobolev指数。对 $f(x)$ 提供合适的假设后，利用Nehari流形和纤维映射法证明方程多重解的存在性。

关键词

Hardy-Sobolev指数，Kirchhoff型，多重解，Nehari流形

Existence of Multiple Solutions for Fractional Kirchhoff Equations with Hardy-Sobolev Critical Exponents

Shiyu Li, Gongming Wei

College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai
Email: 928736127@qq.com

文章引用：李时雨，魏公明．含 Hardy-Sobolev 临界指数的分数阶 Kirchhoff 型方程多重解的存在性[J]．应用数学进展，2021, 10(2): 518-530. DOI: 10.12677/aam.2021.102056

Received: Jan. 23rd, 2021; accepted: Feb. 17th, 2021; published: Feb. 25th, 2021

Abstract

In this paper, we study a class of critical fractional elliptic problems of Kirchhoff type:

$$\left[a+b\left(\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\left(u(x)-u(y)\right)^2}{|x-y|^{3+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_{\mathbb{R}^3}\mu\frac{u^2}{|x|^{2s}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{s}{3-2s}}\right]\left[(-\Delta)^s u-\mu\frac{u}{|x|^{2s}}\right]$$
$$=|u|^{2_s^*-2}u+\lambda f(x)|u|^{q-2}u,$$

where $a,b>0$, $\frac{3}{4}<s<1$, $\mu\in\left[0,2^{2s}\Gamma^2\left(\frac{3+2s}{4}\right)\Big/\Gamma^2\left(\frac{3-2s}{4}\right)\right)$ **and** $q\in(1,2)$ **are constants, and** $2_s^*=\frac{6}{3-2s}$ **is the Hardy-Sobolev exponent in** $\mathbb{R}^3$**. For a suitable function** $f(x)$**, we use Nehari manifold and fibering maps to prove the existence of multiple solutions.**

Keywords

Hardy-Sobolev Exponent, Kirchhoff, Multiple Solutions, Nehari Manifold

1. 引言

分数阶Laplace算子最早由Liouville在1832年提出，但是之后的近百年里，关于分数阶Laplace算子的研究几乎一直处于停滞状态。直到二十世纪七十年代，关于它的研究现状才得以改善，在理论和应用上都取得了长足的发展，作为一类非局部算子，分数阶Laplace算子与整数阶Laplace算子相比不仅有本质区别也有共同之处，例如：基本解、Possion核、Harnack不等式、极值原理等。其中，含有Hardy项类型的问题也受到许多学者的重视，并得到了大量重要的结论，见文献[1] [2] [3]。

文[2]研究了如下带有Hardy项的临界分数阶Laplace方程：

$$(-\Delta)^s u-\mu\frac{u}{|x|^{2s}}=u^{2_s^*-1},\quad u\in\dot{H}^s\left(\mathbb{R}^N\right),$$

其中 $N>2s$，$0<s<1$，$2_s^*=\frac{2N}{N-2s}$，$0<\mu<\Lambda_{N,s}$ 且 $\Lambda_{N,s}$ 是Hardy-Sobolev不等式的最佳嵌入常数。文[2]运用了约束极小方法和Lagrange乘子技巧得到了该方程正解的存在性。

文[3]研究了如下带有Hardy-Sobolev临界指数的椭圆方程：

$$\left[a+b\left(\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2-\mu\frac{u^2}{|x|^2}\mathrm{d}x\right)^{\frac{2-\alpha}{2}}\right]\left(-\Delta u-\mu\frac{u}{|x|^2}\right)=\frac{|u|^{2^*(\alpha)-2}u}{|x|^\alpha}+\lambda\frac{f(x)|u|^{q-2}u}{|x|^\beta},$$

其中 $a,b>0,\mu\in[0,1/4),\alpha,\beta\in[0,2)$ 和 $q\in(1,2)$ 是常数，且 $2^*(\alpha)=6-2\alpha$ 为 $\mathbb{R}^3$ 上的Hardy-Sobolev指数。文[3]运用了Nehari流形和纤维映射方法证明方程多重解的存在性。

结合[2]中带Hardy项的临界分数阶Laplace方程的结果与[3]中带Kirchhoff项整数阶Laplace方程的结果，我们运用了Nehari流形、集中紧性原理和纤维映射方法证明了一类Kirchhoff型临界分数阶椭圆该方程正解的存在性和多重解的存在性。

本文主要研究的一类Kirchhoff型临界分数阶椭圆方程为：

$$\left[a+b\left(\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{(u(x)-u(y))^2}{|x-y|^{3+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_{\mathbb{R}^3}\mu\frac{u^2}{|x|^{2s}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{s}{3-2s}}\right]\left[(-\Delta)^s u-\mu\frac{u}{|x|^{2s}}\right] \tag{1.1}$$
$$=|u|^{2_s^*-2}u+\lambda f(x)|u|^{q-2}u,$$

其中 $a,b>0,\frac{3}{4}<s<1,\mu\in\left[0,2^{2s}\Gamma^2\left(\frac{3+2s}{4}\right)\Big/\Gamma^2\left(\frac{3-2s}{4}\right)\right)$ 和 $q\in(1,2)$ 为常数，且 $2_s^*=\frac{6}{3-2s}$ 为 $\mathbb{R}^3$ 上的Hardy-Sobolev指数。

本文的主要创新点和难点在于临界指标下 $(PS)_c$ 序列的紧性证明，为此我们需要运用集中紧性原理并且精细估计收敛的泛函能量水平的阈值。据我们所知很少有文章提及问题(1.1)，因此本文的结果是对Kirchhoff型临界分数阶椭圆方程已有结论的扩展和补充。

假设 $f(x)$ 满足下列条件：

(F) $0\lneqq f(x)\in L^\infty(\mathbb{R}^3)$ 且存在 $R_0>0$ 使得 $\operatorname{supp} f\in B_{R_0}(0)$。

本文主要结论如下：

定理 1.1: 假设(F)成立，且 $\frac{3}{4}<s<1,\mu\in\left[0,2^{2s}\Gamma^2\left(\frac{3+2s}{4}\right)\Big/\Gamma^2\left(\frac{3-2s}{4}\right)\right)$，$q\in(1,2)$，则对任意 $a,b>0$，我们有

1) 当 $\lambda\in(0,\Lambda_*)$ 时，问题(1.1)存在至少一个正解；
2) 当 $\lambda\in(0,\Lambda_{**})$ 时，问题(1.1)存在至少两个正解；

其中 Λ_* 和 Λ_{**} 在第二部分给出。

2. Nehari 流形和纤维映射

2.1. 预备知识和一些记号

定义 $L^p(\mathbb{R}^3)(1\le p\le+\infty)$ 是具有标准范数 $|u|_p$ 的一般Lebesgue空间，记 $\dot{H}^s(\mathbb{R}^3)$ 是 $C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$ 关于 $\|\cdot\|_{\dot{H}(\mathbb{R}^3)}$ 范数的完备化空间，其中：

$$\|u\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^3)}=\left(\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{(u(x)-u(y))^2}{|x-y|^{3+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{2}},$$
$$(u,v)_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^3)}=\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))}{|x-y|^{3+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

通过分数阶Hardy不等式[4]：

$$\Lambda_{N,s}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{u^2(x)}{|x|^{2s}}\mathrm{d}x\le\frac{C_{N,s}}{2}\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{(u(x)-u(y))^2}{|x-y|^{N+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\text{，其中 }\Lambda_{N,S}=2^{2s}\Gamma^2\left(\frac{N+2s}{4}\right)\Big/\Gamma^2\left(\frac{N-2s}{4}\right),$$

我们推出对任意 $\mu \in \left[0, 2^{2s}\Gamma^2\left(\frac{3+2s}{4}\right)\Big/\Gamma^2\left(\frac{3-2s}{4}\right)\right)$，$\dot{H}^s(\mathbb{R}^3)$ 中内积和范数为：

$$(u,v)=\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))}{|x-y|^{3+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_{\mathbb{R}^3}\mu\frac{uv}{|x|^{2s}}\mathrm{d}x,$$

$$\|u\|=\left(\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{(u(x)-u(y))^2}{|x-y|^{3+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_{\mathbb{R}^3}\mu\frac{u^2}{|x|^{2s}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}.$$

对任意 $\mu \in \left[0, 2^{2s}\Gamma^2\left(\frac{3+2s}{4}\right)\Big/\Gamma^2\left(\frac{3-2s}{4}\right)\right)$ 和 $\frac{3}{4}<s<1$，我们可以定义

$$S_{\mu,s}=\inf\left\{\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{(u(x)-u(y))^2}{|x-y|^{3+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_{\mathbb{R}^3}\mu\frac{u^2}{|x|^{2s}}\mathrm{d}x : u\in\dot{H}^s(\mathbb{R}^3)\text{和}\int_{\mathbb{R}^3}|u|^{2_s^*}\mathrm{d}x=1\right\}, \tag{2.1}$$

且存在正函数 $U\in\dot{H}^s(\mathbb{R}^3)$ 取到 $S_{\mu,s}$，并且满足：

$$\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{(U(x)-U(y))^2}{|x-y|^{3+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_{\mathbb{R}^3}\mu\frac{U^2}{|x|^{2s}}\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^3}U^{2_s^*}\mathrm{d}x=S_{\mu,S}^{\frac{3}{2s}}. \tag{2.2}$$

因此，本文主要研究问题(1.1)多重解的存在性，且(1.1)的对应泛函为：

$$J(u)=\frac{a}{2}\|u\|^2+\frac{3-2s}{6-2s}b\|u\|^{\frac{6-2s}{3-2s}}-\frac{1}{2_s^*}\int_{\mathbb{R}^3}u^{2_s^*}\mathrm{d}x-\frac{\lambda}{q}\int_{\mathbb{R}^3}f(x)|u|^q\,\mathrm{d}x.$$

相似于[5]中的证明，我们得到 $J(u)$ 被定义在 $\dot{H}^s(\mathbb{R}^3)$ 上并且 $J(u)$ 是 C^1 泛函。更进一步，因为(1.1)的任何解都是 $J(u)$ 的临界点。因此，我们通过求泛函 $J(u)$ 的临界点来找(1.1)的解。

因为 $\operatorname{supp} f\in B_{R_0}(0)$，通过 Hölder 不等式和(2.1)，可得

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3}f(x)|u|^q\,\mathrm{d}x&\le|f|_\infty\left(\int_{B_{R_0}(0)}1\mathrm{d}x\right)^{\frac{2_s^*-q}{2_s^*}}\left(\int_{B_{R_0}(0)}|u|^{2_s^*}\mathrm{d}x\right)^{\frac{q}{2_s^*}}\\&\triangleq|f|_\infty\left|B_{R_0}(0)\right|^{\frac{2_s^*-q}{2_s^*}}\left(\int_{B_{R_0}(0)}|u|^{2_s^*}\mathrm{d}x\right)^{\frac{q}{2_s^*}}\\&\triangleq|f|_\infty C_{R_0,s,q}\left(\int_{B_{R_0}(0)}|u|^{2_s^*}\mathrm{d}x\right)^{\frac{q}{2_s^*}}\triangleq|f|_\infty C_{R_0,s,q}S_{\mu,s}^{-\frac{q}{2}}\|u\|^q.\end{aligned} \tag{2.3}$$

为了方便，我们令

$$\lambda_1\triangleq\frac{4s\sqrt{2ab}S_{\mu,s}^{\frac{q}{2}}}{(3-2s)(2_s^*-q)|f^+|_\infty C_{R_0,s,q}}\left[\frac{2\sqrt{ab(2-q)\left(\frac{6-2s}{3-2s}-q\right)}S_{\mu,s}^{\frac{2_s^*}{2}}}{2_s^*-q}\right]^{\frac{3s}{3-2s}\left(\frac{6-3s}{3-2s}-q\right)}>0,$$

$$\lambda_2\triangleq\frac{a(2_s^*-2)S_{\mu,s}^{\frac{q}{2}}}{(2_s^*-q)|f^+|_\infty C_{R_0,s,q}}\left[\frac{a(2-q)S_{\mu,s}^{\frac{2_s^*}{2}}}{2_s^*-q}\right]^{\frac{3-2s}{4s}(2-q)}>0,$$

$$\lambda_3 \triangleq \frac{1}{2}\left(aS_{\mu,s}\right)^{\frac{3(2-q)}{4s}}\left(\frac{s}{3C_0}\right)^{\frac{2-q}{2}} > 0,\ \lambda_4 \triangleq \left(\frac{t_1\int_{\mathbb{R}_3} f(x)|U|^q \,\mathrm{d}x}{C_0 q}\right)^{\frac{2-q}{q}} > 0,$$

$$\Lambda_1 \triangleq \max\{\lambda_1,\lambda_2\},\ \Lambda_2 \triangleq \max\left\{q\lambda_1\Big/\sqrt{2\frac{6-2s}{3-2s}},\frac{q\lambda_2}{2}\right\},$$

$$\Lambda_* \triangleq \max\{\Lambda_1,\lambda_3,\lambda_4\},\ \Lambda_{**} \triangleq \max\{\Lambda_2,\lambda_3,\lambda_4\}.$$

2.2. 预备引理

因为$J(u)$在$\dot{H}^s(\mathbb{R}^3)$上没有下界，所以我们首先研究 Nehari 流形。定义：

$$\mathcal{N}=\left\{u\in \dot{H}^s(\mathbb{R}^3)\setminus\{0\}:\langle J'(u),u\rangle=0\right\},$$

则(1.1)的任何非平凡解都属于$\mathcal{N}$。明显地，$u\in\mathcal{N}$，当且仅当下式成立，

$$a\|u\|^2+b\|u\|^{\frac{6-2s}{3-2s}}-\int_{\mathbb{R}^3}|u|^{2_s^*}\,\mathrm{d}x-\lambda\int_{\mathbb{R}^3} f(x)|u|^q\,\mathrm{d}x=0\text{ 且 }u\neq 0.$$

引理 2.1 泛函$J(u)$在$\mathcal{N}$上是强制的并且有下界。

证明：对任意$u\in\mathcal{N}$，因为$s\in\left(\frac{3}{4},1\right)$和$q\in(1,2)$，我们得到

$$J(u)=J(u)-\frac{1}{2_s^*}\langle J'(u),u\rangle \geq \frac{as}{3}\|u\|^2-\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{2_s^*}\right)|f|_\infty C_{R_0,s,q}S_{\mu,s}^{-\frac{q}{2}}\|u\|^q,$$

这就得出$J(u)$在$\mathcal{N}$上是强制的并且有下界。证毕！

对于任意$t>0$，Nehari 流形$\mathcal{N}$与纤维映射$\varphi_u(t)=J(tu)$密切相关。众所周知，上述映射是由 Drabek 和 Pohozaev [6]提出，并且被 Brown 和 Zhang [7] (或 Chen 等[8])进一步讨论了。对于任意$u\in\dot{H}^s(\mathbb{R}^3)$我们有

$$\varphi_u(t)=\frac{a}{2}t^2\|u\|^2+\frac{3-2s}{6-2s}bt^{\frac{6-2s}{3-2s}}\|u\|^{\frac{6-2s}{3-2s}}-\frac{t^{2_s^*}}{2_s^*}\int_{\mathbb{R}^3}|u|^{2_s^*}\,\mathrm{d}x-\frac{\lambda}{q}t^q\int_{\mathbb{R}^3} f(x)|u|^q\,\mathrm{d}x,$$

$$\varphi_u'(t)=at\|u\|^2+bt^{\frac{3}{3-2s}}\|u\|^{\frac{6-2s}{3-2s}}-t^{2_s^*-1}\int_{\mathbb{R}^3}|u|^{2_s^*}\,\mathrm{d}x-\lambda t^{q-1}\int_{\mathbb{R}^3} f(x)|u|^q\,\mathrm{d}x,$$

$$\varphi_u''(t)=a\|u\|^2+\frac{3b}{3-2s}t^{\frac{2s}{3-2s}}\|u\|^{\frac{6-2s}{3-2s}}-\left(2_s^*-1\right)t^{2_s^*-2}\int_{\mathbb{R}^3}|u|^{2_s^*}\,\mathrm{d}x-\lambda(q-1)t^{q-2}\int_{\mathbb{R}^3} f(x)|u|^q\,\mathrm{d}x.$$

对于任意$u\in\dot{H}^s(\mathbb{R}^3)\setminus\{0\}$和$t>0$，可得

$$t\varphi_u'(t)=at^2\|u\|^2+bt^{\frac{6-2s}{3-2s}}\|u\|^{\frac{6-2s}{3-2s}}-t^{2_s^*}\int_{\mathbb{R}^3}|u|^{2_s^*}\,\mathrm{d}x-\lambda t^q\int_{\mathbb{R}^3} f(x)|u|^q\,\mathrm{d}x,$$

即当且仅当$tu\in\mathcal{N}$，有$\varphi_u'(t)=0$。特别地，当且仅当$u\in\mathcal{N}$时，有$\varphi_u'(1)=0$

相似于 Brown 和 Zhang [7]的方法，我们将$\mathcal{N}$分为三个部分：

$$\mathcal{N}^+=\left\{u\in\mathcal{N}:\varphi_u''(t)>0\right\},$$
$$\mathcal{N}^0=\left\{u\in\mathcal{N}:\varphi_u''(t)=0\right\},$$
$$\mathcal{N}^-=\left\{u\in\mathcal{N}:\varphi_u''(t)<0\right\}.$$

因此，对于任意$u\in\mathcal{N}$，可得

$$\varphi_u''(1)=a\|u\|^2+\frac{3b}{3-2s}\|u\|^{\frac{6-2s}{3-2s}}-\left(2_s^*-1\right)\int_{\mathbb{R}^3}|u|^{2_s^*}\,\mathrm{d}x-\lambda(q-1)\int_{\mathbb{R}^3}f(x)|u|^q\,\mathrm{d}x$$

$$=a(2-q)\|u\|^2+b\left(\frac{6-2s}{3-2s}-q\right)\|u\|^{\frac{6-2s}{3-2s}}-\left(2_s^*-q\right)\int_{\mathbb{R}^3}|u|^{2_s^*}\,\mathrm{d}x \tag{2.4}$$

$$=\frac{4as}{2s-3}\|u\|^2+\frac{2bs}{2s-3}\|u\|^{\frac{6-2s}{3-2s}}+\left(2_s^*-q\right)\lambda\int_{\mathbb{R}^3}f(x)|u|^q\,\mathrm{d}x. \tag{2.5}$$

这与 Brow 和 Zhang ([7]，定理 2.3)的论证相似，我们可以得到以下引理。

引理 2.2 假设 $u\in\dot{H}^s\left(\mathbb{R}^3\right)$ 是 $J(u)$ 在 $\mathcal{N}$ 上的局部极小点且 $u\notin\mathcal{N}^0$，则在 $\left(\dot{H}^s\left(\mathbb{R}^3\right)\right)^*$ 内有 $J'(u)=0$。

受上述引理启发，我们将在 $\mathcal{N}^0=\varnothing$ 成立下进行研究。

引理 2.3 假设 $0<\lambda<\Lambda_1\triangleq\max\{\lambda_1,\lambda_2\}$，则 $\mathcal{N}^0=\varnothing$。

证明： 对任意 $u\in\mathcal{N}^0$，由(2.4)和(2.5)可知

$$\begin{aligned}2\sqrt{ab(2-q)\left(\frac{6-2s}{3-2s}-q\right)}\|u\|^{\frac{6-3s}{3-2s}}&\le a(2-q)\|u\|^2+b\left(\frac{6-2s}{3-2s}-q\right)\|u\|^{\frac{6-2s}{3-2s}}\\&=\left(2_s^*-q\right)\int_{\mathbb{R}^3}|u|^{2_s^*}\,\mathrm{d}x\\&\le\left(2_s^*-q\right)S_{\mu,s}^{-\frac{2_s^*}{2}}\|u\|^{2_s^*},\end{aligned}$$

且由(2.3)可知

$$\begin{aligned}\frac{4s}{3-2s}\sqrt{2ab}\|u\|^{\frac{6-3s}{3-2s}}&\le\frac{4as}{3-2s}\|u\|^2+b\frac{2bs}{3-2s}\|u\|^{\frac{6-2s}{3-2s}}\\&=\left(2_s^*-q\right)\lambda\int_{\mathbb{R}^3}f(x)|u|^q\,\mathrm{d}x\\&\le\left(2_s^*-q\right)\lambda|f|_\infty C_{R_0,s,q}S_{\mu,s}^{-\frac{q}{2}}\|u\|^q,\end{aligned}$$

这意味着

$$\left[\frac{2\sqrt{ab(2-q)\left(\frac{6-2s}{3-2s}-q\right)}S_{\mu,s}^{\frac{2_s^*}{2}}}{2_s^*-q}\right]^{\frac{3s}{3-2s}}\le\|u\|\le\left[\frac{\left(2_s^*-q\right)\lambda|f|_\infty C_{R_0,s,q}}{\frac{4s}{3-2s}\sqrt{2ab}S_{\mu,s}^{\frac{q}{2}}}\right]^{\frac{3-2s}{6-3s-q(3-2s)}}. \tag{2.6}$$

另一方面，由(2.4)和(2.5)还可以得到

$$\begin{aligned}a(2-q)\|u\|^2&\le a(2-q)\|u\|^2+b\left(\frac{6-2s}{3-2s}-q\right)\|u\|^{\frac{6-2s}{3-2s}}\\&=\left(2_s^*-q\right)\int_{\mathbb{R}^3}|u|^{2_s^*}\,\mathrm{d}x\\&\le\left(2_s^*-q\right)S_{\mu,s}^{-\frac{2_s^*}{2}}\|u\|^{2_s^*},\end{aligned}$$

且由(2.3)还可知

$$\begin{aligned}\frac{4as}{3-2s}\|u\|^2&\le\frac{4as}{3-2s}\|u\|^2+\frac{2bs}{3-2s}\|u\|^{\frac{6-2s}{3-2s}}\\&=\left(2_s^*-q\right)\lambda\int_{\mathbb{R}^3}f(x)|u|^q\,\mathrm{d}x\\&\le\left(2_s^*-q\right)\lambda|f|_\infty C_{R_0,s,q}S_{\mu,s}^{-\frac{q}{2}}\|u\|^q,\end{aligned}$$

这意味着

$$\left[\frac{a(2-q)S_{\mu,s}^{\frac{2_s^*}{2}}}{2_s^*-q}\right]^{\frac{3-2s}{4s}}\le\|u\|\le\left[\frac{\left(2_s^*-q\right)\lambda|f|_\infty C_{R_0,s,q}}{a\dfrac{4s}{3-2s}S_{\mu,s}^{\frac{q}{2}}}\right]^{\frac{1}{2-q}}. \tag{2.7}$$

结合(2.6)和(2.7)，得到 $\lambda>\Lambda_1\triangleq\max\{\lambda_1,\lambda_2\}$，显然矛盾。因此对任意 $0<\lambda<\Lambda_1$，都有 $\mathcal{N}^0=\varnothing$。

为了寻找(1.1)的解，我们还需要证明 $\mathcal{N}^\pm$ 非空。

引理 2.4： 假设(F)成立且 $0<\lambda<\Lambda_1$，那么对任意 $u\in\dot{H}^s\left(\mathbb{R}^3\right)\setminus\{0\}$，存在 $t_0>0$ 和唯一的 t^+ 和 t^- ($0<t^+<t_0<t^-$)使得 $t^\pm u\in\mathcal{N}^\pm$，$J\left(t^+u\right)=\inf\limits_{0\le t\le t_0}J(tu)$ 和 $J\left(t^-u\right)=\sup\limits_{t\ge t_0}J(tu)$。

证明： 证明过程与([8] Lemma 4.2]类似，故这里省略。

从引理 2.3 可知对任意 $0<\lambda<\Lambda_1$，都有 $\mathcal{N}=\mathcal{N}^+\cup\mathcal{N}^-$。由引理 2.4 可得 $\mathcal{N}^\pm\ne\varnothing$ 且由引理 2.1 我们可以定义 $m=\inf\limits_{u\in\mathcal{N}}J(u)$，$m^+=\inf\limits_{u\in\mathcal{N}^+}J(u)$，$m^-=\inf\limits_{u\in\mathcal{N}^-}J(u)$。

引理 2.5： 在定理 1.1 的假设下，我们有

1) 若 $0<\lambda<\Lambda_1=\max\{\lambda_1,\lambda_2\}$，则 $m^+<0$；

2) 若 $0<\lambda<\Lambda_2\triangleq\max\left\{q\lambda_1\Big/\sqrt{2\dfrac{6-2s}{3-2s}},\dfrac{q\lambda_2}{2}\right\}$，则存在与 b 无关的 d_0 使得 $m^->d_0$。特别地，$m^+=m<0<m^-$。

证明： 1) 对任意 $u\in\mathcal{N}^+$，由(2.4)可得

$$a(2-q)\|u\|^2+b\left(\frac{6-2s}{3-2s}-q\right)\|u\|^{\frac{6-2s}{3-2s}}>\left(2_s^*-q\right)\int_{\mathbb{R}^3}|u|^{2_s^*}\,\mathrm{d}x,$$

我们可以得到

$$\begin{aligned}J(u)&=-\frac{a(2-q)}{2q}\|u\|^2-\frac{b\left[6-2s-q(3-2s)\right]}{q(6-2s)}\|u\|^{\frac{6-2s}{3-2s}}+\frac{2_s^*-q}{2_s^*q}\int_{\mathbb{R}^3}|u|^{2_s^*}\,\mathrm{d}x\\&<\frac{a(2-q)\left(2-2_s^*\right)}{2q2_s^*}\|u\|^2-\frac{2bs\left[6-2s-q(3-2s)\right]}{q2_s^*(6-2s)(3-2s)}\|u\|^{\frac{6-2s}{3-2s}}<0,\end{aligned}$$

所以 $m^+<0$。

2) 我们分两种情形进行讨论。

情形 1：$0<\lambda<q\lambda_1\Big/\sqrt{2\dfrac{6-2s}{3-2s}}$

由(2.6)可知，对任意 $u\in\mathcal{N}^-$，我们有

$$\|u\|>\left[\frac{2\sqrt{ab(2-q)\left(\dfrac{6-2s}{3-2s}-q\right)}S_{\mu,s}^{\frac{2_s^*}{2}}}{2_s^*-q}\right]^{\frac{3s}{3-2s}}. \tag{2.8}$$

则对任意 $u\in\mathcal{N}^-\subset\mathcal{N}$ 和(2.3)可得

$$
\begin{aligned}
J(u) &= \frac{a\left(2_s^*-2\right)}{2\cdot 2_s^*}\|u\|^2+\frac{s}{(3-s)2_s^*}b\|u\|^{\frac{6-2s}{3-2s}}-\frac{\lambda\left(2_s^*-q\right)}{q2_s^*}\int_{\mathbb{R}^3}f(x)|u|^q\,\mathrm{d}x \\
&\geq \|u\|^q\left[\frac{2\sqrt{ab\left(2_s^*-2\right)s}}{2_s^*\sqrt{6-2s}}\|u\|^{\frac{6-3s}{3-2s}-q}-\frac{\lambda\left(2_s^*-q\right)}{q2_s^*}|f|_\infty C_{R_0,s,q}S_{\mu,s}^{-\frac{q}{2}}\right].
\end{aligned} \tag{2.9}
$$

结合(2.8)和(2.9)，可得若$0<\lambda<q\lambda_1\Big/\sqrt{2\frac{6-2s}{3-2s}}$，存在与$b$无关的$d_0$使得$m^->d_0$。

情形2： $0<\lambda<q\lambda_2/2$

由(2.7)可知，对任意$u\in\mathcal{N}^-$，我们有

$$
\|u\|>\left[\frac{a(2-q)S_{\mu,s}^{\frac{2_s^*}{2}}}{2_s^*-q}\right]^{\frac{3-2s}{4s}}. \tag{2.10}
$$

则对任意$u\in\mathcal{N}^-\subset\mathcal{N}$和(2.3)可得

$$
\begin{aligned}
J(u) &= \frac{a\left(2_s^*-2\right)}{2\cdot 2_s^*}\|u\|^2+\frac{s}{(3-s)2_s^*}b\|u\|^{\frac{6-2s}{3-2s}}-\frac{\lambda\left(2_s^*-q\right)}{q2_s^*}\int_{\mathbb{R}^3}f(x)|u|^q\,\mathrm{d}x \\
&\geq \|u\|^q\left[\frac{a\left(2_s^*-2\right)}{2\cdot 2_s^*}\|u\|^{2-q}-\frac{\lambda\left(2_s^*-q\right)}{q2_s^*}|f|_\infty C_{R_0,s,q}S_{\mu,s}^{-\frac{q}{2}}\right].
\end{aligned} \tag{2.11}
$$

结合(2.10)和(2.11)，可得若$0<\lambda<q\lambda_2/2$，存在与b无关的d_0使得$m^->d_0$。

3. 定理1.1的证明

利用Ekeland变分原理[9]和([8]，引理5.2)，我们得到如下结果。

引理3.1： 在定理1.1的假设下，我们有

1) 若$0<\lambda<\Lambda_1$，则$J(u)$有$(PS)_m$序列$\{u_n\}\subset\mathcal{N}$；

2) 若$0<\lambda<\Lambda_2$，则$J(u)$有$(PS)_{m^-}$序列$\{u_n\}\subset\mathcal{N}^-$。

下面引理给出了$J(u)$的$(PS)_c$条件成立的区间。

引理3.2： 若$\lambda\in(0,\Lambda_*)$，当$c<c_{\mu,s}^*-C_0\lambda^{2/(2-q)}$，$J(u)$的任何$(PS)_c$序列都包含一个强收敛的子序列，其中

$$
\begin{aligned}
c_{\mu,s}^* = {} & \frac{as}{3}S_{\mu,s}\left(\frac{bS_{\mu,s}^{\frac{3-s}{3-2s}}+\sqrt{b^2S_{\mu,s}^{\frac{6-2s}{3-2s}}+4aS_{\mu,s}}}{2}\right)^{\frac{3-2s}{s}} \\
&+\frac{bs(3-2s)}{3(6-2s)}S_{\mu,s}^{\frac{3-s}{3-2s}}\left(\frac{bS_{\mu,s}^{\frac{3-s}{3-2s}}+\sqrt{b^2S_{\mu,s}^{\frac{6-2s}{3-2s}}+4aS_{\mu,s}}}{2}\right)^{\frac{3-s}{s}},
\end{aligned} \tag{3.1}
$$

C_0由引理3.3给出的正常数。

证明： 设$\{u_n\}\subset\dot{H}^s\left(\mathbb{R}^3\right)$是$J(u)$的一个$(PS)_c$序列。因为$q\in(1,2)$和

$$c+1+o(1)\|u_n\| \ge J(u_n)-\frac{3-2s}{6-2s}\langle J'(u_n),u_n\rangle$$
$$\ge \frac{as}{6-2s}\|u_n\|^2-\frac{6-2s-q(3-2s)}{(6-2s)q}\lambda|f|_\infty C_{R_0,s,q}S_{\mu,s}^{-\frac{q}{2}}\|u_n\|^q,$$

因此$\{u_n\}$在$\dot{H}^s(\mathbb{R}^3)$上有界。因此存在子序列仍记为$\{u_n\}$和$u\in\dot{H}^s(\mathbb{R}^3)$，使得当$r\in[1,2_s^*)$时在$\dot{H}^s(\mathbb{R}^3)$内$u_n \rightharpoonup u$，在$L_{loc}^r(\mathbb{R}^3)$内$u_n\to u$，在$\mathbb{R}^3$内$u_n$几乎处处收敛到$u$，且

$$|D_su_n(x)|^2=\int_{\mathbb{R}^3}\frac{|u_n(x)-u_n(y)|^2}{|x-y|^{3+2s}}\mathrm{d}y.$$

由集中紧性原理[10] [11]可知，存在一个可数集合Γ，一组不同的点$\{x_j\}\subset\mathbb{R}^3/\{0\}$，非负实数$\mu_{x_j}$，$\nu_{x_j}$($j\in\Gamma$)和非负实数$\mu_0$，$\gamma_0$和$\nu_0$使得

$$|D_su_n|^2 \rightharpoonup \mathrm{d}\tilde{\mu}\ge|D_su|^2+\sum_{j\in\Gamma}\mu_{x_j}\delta_{x_j}+\mu_0\delta_0,$$
$$u_n^2|x|^{-2}\rightharpoonup \mathrm{d}\gamma=u^2|x|^{-2}+\gamma_0\delta_0,$$
$$|u_n|^{2_s^*}\rightharpoonup \mathrm{d}\nu=|u|^{2_s^*}+\sum_{j\in\Gamma}\nu_{x_j}\delta_{x_j}+\nu_0\delta_0,$$

其中δ_x是$x\in\mathbb{R}^3$处的 Dirac 测度。不失一般性，我们只考虑在奇点$0\in\mathbb{R}^3$处集中的可能性。因此，对任意$\varepsilon>0$，我们令$x_j\notin B_\varepsilon(0)$ ($j\in\Gamma$)并选择一个光滑的分段函数φ^ε，φ^ε且满足这样$0\le\varphi^\varepsilon\le1$，当$x\in B_\varepsilon^c(0)$时$\varphi^\varepsilon\equiv0$，当$x\in B_{\varepsilon/2}(0)$时$\varphi^\varepsilon\equiv1$以及$|D_s\varphi^\varepsilon|\le 4/\varepsilon$。则

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\to0}\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{|u_n(x)-u_n(y)|^2}{|x-y|^{3+2s}}\varphi^\varepsilon\mathrm{d}y\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\mathbb{R}^3}\varphi^\varepsilon\mathrm{d}\tilde{\mu}\ge\mu_0,\\
&\lim_{\varepsilon\to0}\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^3}u_n^2|x|^{-2}\varphi^\varepsilon\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\mathbb{R}^3}\varphi^\varepsilon\mathrm{d}\gamma=\gamma_0,\\
&\lim_{\varepsilon\to0}\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^3}u_n^{2_s^*}\varphi^\varepsilon\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\mathbb{R}^3}\varphi^\varepsilon\mathrm{d}\nu=\nu_0,\\
&\lim_{\varepsilon\to0}\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^3}f(x)|u_n|^q\varphi^\varepsilon\mathrm{d}x=0,\\
&\lim_{\varepsilon\to0}\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^3}u_n(x)\int_{\mathbb{R}^3}\frac{(u_n(x)-u_n(y))(\varphi^\varepsilon(x)-\varphi^\varepsilon(y))}{|x-y|^{3+2s}}\mathrm{d}y\mathrm{d}x=0.
\end{aligned}\tag{3.2}$$

因为$\{u_n\}$是有界的，由(3.2)知

$$\begin{aligned}
0&=\lim_{\varepsilon\to0}\lim_{n\to\infty}\langle J'(u_n),u_n\varphi^\varepsilon\rangle\\
&=\lim_{\varepsilon\to0}\lim_{n\to\infty}\Bigg\{\left(a+b\|u_n\|^{\frac{2s}{3-2s}}\right)\Bigg(\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{|u_n(x)-u_n(y)|^2}{|x-y|^{3+2s}}\varphi^\varepsilon\mathrm{d}y\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^3}u_n(x)\int_{\mathbb{R}^3}\frac{(u_n(x)-u_n(y))(\varphi^\varepsilon(x)-\varphi^\varepsilon(y))}{|x-y|^{3+2s}}\mathrm{d}y\mathrm{d}x\\
&\quad-\int_{\mathbb{R}^3}u_n^2|x|^{-2}\varphi^\varepsilon\mathrm{d}x\Bigg)-\int_{\mathbb{R}^3}|u_n|^{2_s^*}\varphi^\varepsilon\mathrm{d}x-\lambda\int_{\mathbb{R}^3}f(x)|u_n|^q\varphi^\varepsilon\mathrm{d}x\Bigg\}\\
&\ge a(\mu_0-\mu\gamma_0)+b(\mu_0-\mu\gamma_0)^{\frac{3-s}{3-2s}}-\nu_0.
\end{aligned}$$

由(2.1)，即$S_{\mu,s}^{2_s^*/2}\nu_0\le(\mu_0-\mu\gamma_0)^{2_s^*/2}$，可得

$$S_{\mu,s}^{-3/(3-2s)}\left(\mu_0-\mu\gamma_0\right)^{2s/(3-2s)}-b\left(\mu_0-\mu\gamma_0\right)^{s/(3-2s)}-a\geq 0,$$

也就是说，

$$\left(\mu_0-\mu\gamma_0\right)\geq S_{\mu,s}\left(\frac{bS_{\mu,s}^{\frac{3-s}{3-2s}}+\sqrt{b^2S_{\mu,s}^{\frac{6-2s}{3-2s}}+4aS_{\mu,s}}}{2}\right)^{\frac{3-2s}{s}},$$

因此，我们有

$$\begin{aligned}
c+o_n(1)&=J(u_n)-\frac{3-2s}{6-2s}\left\langle J'(u_n),u_n\right\rangle\\
&=\frac{as}{6-2s}\|u_n\|^2+\frac{s(3-2s)}{3(6-2s)}\int_{\mathbb{R}^3}u_n^{2_s^*}\mathrm{d}x-\lambda\frac{6-2s-q(3-2s)}{q(6-2s)}\int_{\mathbb{R}^3}f(x)|u_n|^q\,\mathrm{d}x\\
&\geq\frac{as}{6-2s}\left(\mu_0-\mu\gamma_0+\|u\|^2\right)+\frac{s(3-2s)}{3(6-2s)}\nu_0-\lambda\frac{6-2s-q(3-2s)}{q(6-2s)}|f|_\infty C_{R_0,s,q}S_{\mu,s}^{-\frac{q}{2}}\|u\|^q\\
&\geq\frac{as}{6-2s}\left(\mu_0-\mu\gamma_0\right)+\frac{s(3-2s)}{3(6-2s)}\left[a\left(\mu_0-\mu\gamma_0\right)+b\left(\mu_0-\mu\gamma_0\right)^{\frac{3-s}{3-2s}}\right]-C_0\lambda^{\frac{2}{2-q}}\\
&=\frac{as}{3}\left(\mu_0-\mu\gamma_0\right)+\frac{bs(3-2s)}{3(6-2s)}\left(\mu_0-\mu\gamma_0\right)^{\frac{3-s}{3-2s}}-C_0\lambda^{\frac{2}{2-q}}\geq C_{\mu,s}^*-C_0\lambda^{\frac{2}{2-q}},
\end{aligned}$$

这矛盾于我们的假设。因此我们有 $\int_{\mathbb{R}^3}|u_n|^{2_s^*}\mathrm{d}x\to\int_{\mathbb{R}^3}|u|^{2_s^*}\mathrm{d}x$，结合(2.3)可得

$$\int_{\mathbb{R}^3}f(x)|u_n|^q\,\mathrm{d}x\to\int_{\mathbb{R}^3}f(x)|u|^q\,\mathrm{d}x.$$

因此，

$$\begin{aligned}
o(1)&=\left\langle J'(u_n)-J'(u),u_n-u\right\rangle\\
&=\left(a+b\|u_n\|^{\frac{2s}{3-2s}}\right)(u_n,u_n-u)-\left(a+b\|u\|^{\frac{2s}{3-2s}}\right)(u,u_n-u)+o(1)\\
&=\left(a+b\|u_n\|^{\frac{2s}{3-2s}}\right)(u_n-u,u_n-u)+b\left(\|u_n\|^{\frac{2s}{3-2s}}-\|u\|^{\frac{2s}{3-2s}}\right)(u,u_n-u)+o(1)\\
&\geq a\|u_n-u\|^2+o(1),
\end{aligned}$$

故在 $\dot{H}^s(\mathbb{R}^3)$ 内 $u_n\to u$。证毕！

为了应用引理 3.2，我们需要以下结果

引理 3.3： 在定理 1.1 的假设下，对任意 $\lambda\in(0,\Lambda_*)$ 我们有

$$\sup_{t\geq 0}J(tu)<c_{\mu,s}^*-C_0\lambda^{\frac{2}{2-q}},\ C_0=\frac{as(2-q)}{q(3-s)}\left[\frac{\left[6-2s-q(3-2s)\right]|f|_\infty C_{R_0,s,q}}{2asS_{\mu,s}^{\frac{q}{2}}}\right]^{\frac{2}{2-q}}.$$

特别地，对任意 $\lambda\in(0,\Lambda_*)$，都有 $m^-<C_{\mu,s}^*-C_0\lambda^{\frac{2}{2-q}}$。

证明： 由(3.1)可知，对任意 $\lambda\in(0,\lambda_3)$ 都有 $c_{\mu,s}^*-C_0\lambda^{\frac{2}{2-q}}>0$。我们定义

$$g(t)=\frac{a}{2}t^2\|U\|^2+\frac{3-2s}{6-2s}bt^{\frac{6-2s}{3-2s}}\|U\|^{\frac{6-2s}{3-2s}}-\frac{t^{2_s^*}}{2_s^*}\int_{\mathbb{R}^3}|U|^{2_s^*}\mathrm{d}x$$
$$\triangleq C_1t^2+C_2t^{\frac{6-2s}{3-2s}}-C_3t^{2_s^*},\quad t\ge 0.$$

根据(2.2)可知，$C_1=\frac{a}{2}S_{\mu,s}^{\frac{3}{2s}}$，$C_2=b\frac{3-2s}{6-2s}S_{\mu,s}^{\frac{3(3-s)}{2s(3-2s)}}$，$C_3=\frac{1}{2_s^*}S_{\mu,s}^{\frac{3}{2s}}$。

通过一些基本的计算，我们得到

$$g'(t)=2C_1t+\frac{6-2s}{3-2s}C_2t^{\frac{3}{3-2s}}-2_s^*C_3t^{\frac{3+2s}{3-2s}},\quad t\ge 0.$$

当 $g'(t)=0$ 时，它有唯一解，该解为

$$\tilde{t}=S_{\mu,s}^{-\frac{3-2s}{4s}}\left(\frac{bS_{\mu,s}^{\frac{3-s}{3-2s}}+\sqrt{b^2S_{\mu,s}^{\frac{6-2s}{3-2s}}+4aS_{\mu,s}}}{2}\right)^{\frac{3-2s}{2s}}.$$

因此，可得

$$\max_{t\ge 0}g(t)=g(\tilde{t})=C_1\tilde{t}^2+C_2\tilde{t}^{\frac{6-2s}{3-2s}}-\frac{2C_1\tilde{t}^2+\frac{6-2s}{3-2s}C_2\tilde{t}^{\frac{6-2s}{3-2s}}}{2_s^*}$$
$$=\frac{2s}{3}C_1\tilde{t}^2+\frac{s}{3}C_2\tilde{t}^{\frac{6-2s}{3-2s}}=c_{\mu,s}^*,$$

也就是说对任意 $t\ge 0$，都有

$$J(tU)=g(t)-\frac{t^q}{q}\lambda\int_{\mathbb{R}^3}f(x)|U|^q\,\mathrm{d}x\le c_{\mu,s}^*-\frac{t^q}{q}\lambda\int_{\mathbb{R}^3}f(x)|U|^q\,\mathrm{d}x.\tag{3.3}$$

因为 $J(0)=0$，则存在仅依赖于 λ_3 的 $t_1\in(0,1)$ 使得对任意 $\lambda\in(0,\lambda_3)$ 都有

$$\max_{0\le t\le t_1}J(tU)<c_{\mu,s}^*-C_0\lambda^{\frac{2}{2-q}}.$$

另一方面，由(3.3)可知，$\max_{t\ge t_1}J(tU)\le c_{\mu,s}^*-\frac{t_1^q}{q}\lambda\int_{\mathbb{R}^3}f(x)|U|^q\,\mathrm{d}x$，即对任意 $\lambda\in(0,\lambda_4)$，都有 $\max_{t>t_1}J(tU)<c_{\mu,s}^*-C_0\lambda^{\frac{2}{2-q}}$。

综上所述，对任意 $\lambda\in(0,\Lambda_*)$，都有 $\max_{t\ge 0}J(tU)<c_{\mu,s}^*-C_0\lambda^{\frac{2}{2-q}}$。

因为 $U\in\dot{H}^s(\mathbb{R}^3)\setminus\{0\}$，由引理 2.4 可知存在唯一的 $t_U^{\pm}$ 使得 $t_U^{\pm}U\in\mathcal{N}^{\pm}$。因此我们得到 $m^-\le J(t_U^-U)\le\max_{t\ge 0}J(tU)$。证毕！

命题 3.4： 在定理 1.1 的假设下，对任意 $\lambda\in(0,\Lambda_*)$，则存在 $u_\lambda\in\dot{H}^s(\mathbb{R}^3)$ 使得

1) u_λ 是(1.1)的正解且 $J(u_\lambda)=m=m^+$；

2) 当 $\lambda\to 0^+$ 时，$\|u_\lambda\|\to 0$。

证明： 1) 由 Ekland 变分原理知，m 的任意极小化序列 $\{u_n\}\in\mathcal{N}$ 能转化为 $J(u)$ 的 $(PS)_m$ 序列，也就

是说，当$n\to\infty$，

$$J(u_n)\to m+o(1)\text{ 和 }J'(u_n)\to o(1)。$$

由引理 2.1 可知，$\{u_n\}$在$\dot{H}^s(\mathbb{R}^3)$内有界。则存在子序列$u_\lambda\in\dot{H}^s(\mathbb{R}^3)$使得在$\dot{H}^s(\mathbb{R}^3)$内$u_n\rightharpoonup u_\lambda$。根据 m 和 $m^{\pm}$ 的定义可得$m\le m^{\pm}$。因此由引理 3.2 和引理 3.3 可知，在$\dot{H}^s(\mathbb{R}^3)$内$u_n\to u_\lambda$，故$J(u_\lambda)=m$，$J'(u_\lambda)=0$。又因为$m\le m^{\pm}<0$，所以由引理 2.2 可得u_λ是(1.1)的一个非平凡解。由于$J(u)$的对称性可知，$J(|u_\lambda|)=J(u_\lambda)=m$，$J'(|u_\lambda|)=J'(u_\lambda)=0$。利用 Harnack's 不等式[12]可得，在$\mathbb{R}^3$内$u_\lambda(x)>0$，所以u_λ是(1.1)的一个正解。我们现在可以断定$u_\lambda\in\mathcal{N}^+$。通过反证法，引理 2.3 假定$u_\lambda\in\mathcal{N}^-$。由引理 2.4 知存在唯一的$t_\lambda^+$和$t_\lambda^-$且$0<t_\lambda^+<t_\lambda^-\equiv1$使得$t_\lambda^{\pm}u_\lambda\in\mathcal{N}^{\pm}$。根据([8]，引理 4.2]中相同方法，可知$\varphi_{u_\lambda}(t)=J(tu_\lambda)$在$(t_\lambda^+,t_\lambda^-)$上严格递增，因此

$$m^+\le J(t_\lambda^+u_\lambda)<J(t_\lambda^-u_\lambda)=J(u_\lambda)=m\le m^+,$$

矛盾！因此，我们可得$u_\lambda\in\mathcal{N}^+$，这意味着$m^+\le J(u_\lambda)=m\le m^+$。(i)证毕。

2) 因为$u_\lambda\in\mathcal{N}^+$，由(2.6)和(2.7)可得，

$$\|u_\lambda\|<\min\left\{\left[\frac{(2_s^*-q)\lambda|f|_\infty C_{R_0,s,q}}{\frac{4s}{3-2s}\sqrt{2ab}S_{\mu,s}^{\frac{q}{2}}}\right]^{\frac{3-2s}{6-3s-q(3-2s)}},\left[\frac{(2_s^*-q)\lambda|f|_\infty C_{R_0,s,q}}{a\frac{4s}{3-2s}S_{\mu,s}^{\frac{q}{2}}}\right]^{\frac{1}{2-q}}\right\},$$

这意味着当$\lambda\to0^+$，$\|u_\lambda\|\to0$。证毕！

接下来，我们证明$\mathcal{N}^-$上$J(u)$存在局部极小点。

命题 3.5： 在定理 1.1 的假设下，对任意$\lambda\in(0,\Lambda_{**})$，则存在$U_\lambda\in\dot{H}^s(\mathbb{R}^3)$使得

1) $J(U_\lambda)=m^-$；

2) U_λ是(1.1)的一个正解。

证明： 1) 根据命题 3.1(2)可知，存在$J(u)$的一个$(PS)_{m^-}$序列，使得当$n\to\infty$，$J(u_n)\to m^-+o(1)$和$J'(u_n)\to o(1)$。由引理 2.1 可知，$\{u_n\}$在$\dot{H}^s(\mathbb{R}^3)$内有界。则存在元素$U_\lambda\in\dot{H}^s(\mathbb{R}^3)$使得在$\dot{H}^s(\mathbb{R}^3)$内$u_n\rightharpoonup U_\lambda$。因此由引理 3.2 和引理 3.3 可知，在$\dot{H}^s(\mathbb{R}^3)$内$u_n\to U_\lambda$，故$J(U_\lambda)=m^-$，$J'(U_\lambda)=0$。所以由引理 2.2 和引理 2.5(2)可得$U_\lambda$是(1.1)的一个非平凡解。类似于命题 3.4，可知U_λ是正解。证毕！

最后，我们给出定理 1.1 的证明。

定理 1.1 证明： 定理 1.1 的 1)是命题 3.4 的一个推论。如果$\lambda\in(0,\Lambda_{**})$，由命题 3.4 和 3.5，我们可以得到(1.1)存在两个正解$u_\lambda\in\mathcal{N}^+$和$U_\lambda\in\mathcal{N}^-$。根据$\mathcal{N}^{\pm}$的定义可知$\mathcal{N}^+\cap\mathcal{N}^-=\varnothing$，所以$u_\lambda$和$U_\lambda$是(1.1)的两个不同正解。

参考文献

[1] Barrios, B., Medina, B. and Peral, I. (2013) Some Remarks on the Solvability of Non-Localelliptic Problems with the Hardy Potential. *Communications in Contemporary Mathematics*, **16**, Article ID: 1350046. https://doi.org/10.1142/S0219199713500466

[2] Dipierro, S., Montoro, L., Peral, I. and Sciunzi, B. (2016) Qualitative Properties of Positive Solutions to Nonlocal Critical Problems Involving the Hardy-Leray Potential. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, **55,** 99. https://doi.org/10.1007/s00526-016-1032-5

[3] Shen, L. (2013) Multiplicity and Asymptotic Behavior of Solutions for Kirchhoff Type Equations Involving the Hardy-Sobolev Exponent and Singular Nonlinearity. *Journal of Inequalities and Applications*, **2018**, 213. https://doi.org/10.1186/s13660-018-1806-8

[4] Frank, R.L., Lieb, E.H. and Seiringer, R. (2008) Hardy-Lieb-Thirring Inequalities for Fractional Schrödinger Operators. *Journal of the American Mathematical Society*, **21**, 924-950. https://doi.org/10.1090/S0894-0347-07-00582-6

[5] Willem, M. (1996) Minimax Theorems. Birkhäuser, Boston. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-4146-1

[6] Drábek, P. and Pohozaev, S. (1997) Positive Solutions for the p-Laplacian: Application of the Fibering Method. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A*, **127**, 703-726. https://doi.org/10.1017/S0308210500023787

[7] Brown, K. and Zhang, Y. (2003) The Nehari Manifold for a Semilinear Elliptic Equation with a Sign-Changing Weight Function. *Journal of Differential Equations*, **193**, 481-499. https://doi.org/10.1016/S0022-0396(03)00121-9

[8] Chen, C., Kuo, Y. and Wu, T. (2011) The Nehari Manifold for a Kirchhoff Type Problem Involving Sign-Changing Weight Functions. *Journal of Differential Equations*, **250**, 1876-1908. https://doi.org/10.1016/j.jde.2010.11.017

[9] Ekeland, I. (1979) Nonconvex Minimization Problems. *Bulletin of the American Mathematical Society*, **1**, 443-473. https://doi.org/10.1090/S0273-0979-1979-14595-6

[10] 李娜, 贺小明. 一类具有临界指数增长的分数阶 p-Laplace 方程的变分问题[J]. 中央民族大学学报(自然科学版), 2020, 28(2): 88-96.

[11] Lions, P.L. (1984) The Concentration-Compactness Principle in the Calculus of Varition. The Locally Compact Case. Part I. *Annales de l'Institut Henri Poincare* (*C*) *Non Linear Analysis*, **1**, 109-145. https://doi.org/10.1016/S0294-1449(16)30428-0

[12] Castro, A.D., Kuusi, T. and Palatucci, G. (2014) Nonlocal Harnack Inequalities. *Journal of Functional Analysis*, **267**, 1807-1836. https://doi.org/10.1016/j.jfa.2014.05.023