

## (2 + 1)维Sawada-Kotera方程波的态转换

庞燕敏

华北电力大学, 北京

Email: 1799885644@qq.com

收稿日期: 2021年4月17日; 录用日期: 2021年5月2日; 发布日期: 2021年5月20日

---

### 摘要

本文研究了(2 + 1)维Sawada-Kotera方程的转换动力学特性。通过Hirato双线性方法和复数化参数, 我们给出孤立波解和一阶呼吸波解。基于转换条件, 我们得到了几种转换波, 包括(振荡) W型或M型孤子、和多峰孤子。接着, 我们研究了转换波的时变性质。

### 关键词

(2 + 1)维Sawada-Kotera方程, 态转换, 时变性质

---

## State Transition of the Wave for (2 + 1)-Dimensional Sawada-Kotera Equation

Yanmin Pang

North China Electric Power University, Beijing

Email: 1799885644@qq.com

Received: Apr. 17<sup>th</sup>, 2021; accepted: May 2<sup>nd</sup>, 2021; published: May 20<sup>th</sup>, 2021

---

### Abstract

Under investigation in this work is the (2 + 1)-dimensional Sawada-Kotera equation. By the Hirato bilinear method and complex parameters, we give the solitary-wave solution and the first-order breath-wave solution. Based on the transition condition, we obtained the transformed waves, including the (oscillating) M- and W-shaped solitons and multi-peak solitons. Next, we investigate the time-varying features.

## Keywords

### (2 + 1)-Dimensional Sawada-Kotera Equation, State Transition, Time-Varying Property

Copyright © 2021 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

众所周知, 所有可积方程都有孤子解, 这反映了自然界中一种常见的非线性现象[1]。孤立子[2] [3] [4] [5]理论的研究对非线性偏微分方程有重要意义。近来, 越来越多的研究者已经注意到精确解的研究, 如有理解、怪波解和呼吸波解[6] [7] [8] [9] [10], 它们可以在某些方向上指数地定位解。研究已经发现许多可积方程具有精确解, 例如 KP 方程[11], 非线性薛定谔方程[12]和 Boussinesq 方程[13]。本文研究的是(2 + 1)维 Sawada-Kotera 方程

$$u_t - \left( u_{xxx} + 5uu_{xx} + \frac{5}{3}u^3 + 5u_{xy} \right)_x - 5uu_y + 5 \int u_{yy} dx - 5u_x \int u_y dx = 0 \quad (1)$$

它由 Konopelchenko 和 Dubrovsky 首次提出[14], 其中  $u$  是变量  $x, y, t$  的函数。

本文的结构如下:

第 2 章给出了几种转换波。首先, 我们推导出(2 + 1)维 Sawada-Kotera 方程的孤立波解和一阶呼吸波解。然后, 我们利用转换条件得到转换波。第 3 章研究了方程(1~2)的转换波的时变性质。通过分析孤立波源和周期波源的相移, 我们发现叠加区域随时间而变化, 这导致了转换波形状的变化。第 4 章为结论。

## 2. 转换波

首先, 我们给出以下变换[1]

$$u = 6(\ln f)_{xx}, \quad (2)$$

其中,  $f = f(x, y, t)$  是一个未知的实函数。将方程(2)代入方程(1), 得到双线性式[1]:

$$\left( D_x^6 + 5D_x^3 D_y - 5D_y^2 + D_x D_t \right) f \cdot f = 0. \quad (3)$$

其中,  $D_x, D_y$  和  $D_t$  表示 Hirota 双线性算子被定义为[15]

$$D_x^m D_y^n D_t^s f \cdot g = \left( \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x'} \right)^m \left( \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y'} \right)^n \left( \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t'} \right)^s f(x, y, t) \cdot g(x', y', t') \Big|_{(x=x', y=y', t=t')}$$

它的  $N$ -孤立波解为

$$u_N = 6(\ln f_N(x, y, t))_{xx}, \quad f_N = \sum_{\mu=0,1} \exp \left( \sum_{i=1}^N \mu_i \eta_i + \sum_{i<j}^{(N)} \mu_i \mu_j A_{ij} \right), \quad (4)$$

其中,

$$\begin{aligned} \eta_i &= k_i(x + l_i y + \omega_i t) + \eta_i^{(0)}, \quad \omega_i = -k_i^4 - 5k_i^2 l_i + 5l_i^2, \\ e^{A_{ij}} &= \frac{k_i^4 - 3k_i^3 k_j + k_j^4 + (l_i - l_j)^2 - 3k_i k_j (k_j^2 + l_i + l_j) + k_i^2 (4k_j^2 + 2l_i + l_j) + k_j^2 (l_i + 2l_j)}{k_i^4 + 3k_i^3 k_j + k_j^4 + (l_i - l_j)^2 + 3k_i k_j (k_j^2 + l_i + l_j) + k_i^2 (4k_j^2 + 2l_i + l_j) + k_j^2 (l_i + 2l_j)} \end{aligned} \quad (5)$$

$k_i, l_i, \omega_i$  和  $\eta_i^{(0)}$  是自由常数。

考虑  $N = 2$ ，取  $k_i, l_i$  和  $\eta_i^{(0)}$  为复常数，即

$$k_1 = m_1 + in_1 = k_2^*, \quad l_1 = p_1 + iq_1 = l_2^*, \quad \eta_1^{(0)} = \ln \frac{\lambda_1}{2} + \delta_1 + i\gamma_1 = (\eta_2^{(0)})^*, \quad (6)$$

其中，\*表示复共轭， $m_1, n_1, p_1, q_1, \lambda_1 (> 0), \delta_1$  和  $\gamma_1$  是实值的。把上式代入(4)，我们得到  $f_2$  为

$$f_2 \sim 2\sqrt{\lambda_2} \cosh(\xi_1 + \ln \sqrt{\lambda_2}) + \lambda_1 \cos \Lambda_1, \quad (7)$$

其中，

$$\xi_1 = m_1 x + (m_1 p_1 - n_1 q_1) y + (m_1 \omega_{1R} - n_1 \omega_{1I}) t + \delta_1, \quad (8)$$

$$\Lambda_1 = n_1 x + (m_1 q_1 + n_1 p_1) y + (m_1 \omega_{1I} + n_1 \omega_{1R}) t + \gamma_1, \quad (9)$$

$$K_1 = \frac{3n_1^4 - m_1^2 n_1^2 - 3n_1^2 p_1 - m_1 n_1 q_1 - q_1^2}{3m_1^4 - m_1^2 n_1^2 + 3m_1^2 p_1 - m_1 n_1 q_1 - q_1^2}, \quad (10)$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{4} \lambda_1^2 K_1, \quad (11)$$

$$\omega_{1R} = -m_1^4 + 6m_1^2 n_1^2 - n_1^4 - 5m_1^2 p_1 + 5n_1^2 p_1 + 5p_1^2 + 10m_1 n_1 q_1 - 5q_1^2, \quad (12)$$

$$\omega_{1I} = -4m_1^3 n_1 + 4m_1 n_1^3 - 10m_1 n_1 p_1 - 5m_1^2 q_1 + 5n_1^2 q_1 + 10p_1 q_1,$$

我们把方程(7)带入方程(4)得到呼吸波解

$$u = \frac{24\lambda_2 m_1^2 - 6\lambda_1^2 n_1^2 + 12\lambda_1 \sqrt{\lambda_2} (m_1^2 - n_1^2) \cosh(\xi_1 + \ln \sqrt{\lambda_2}) \cos \Lambda_1}{(2\sqrt{\lambda_2} \cosh(\xi_1 + \ln \sqrt{\lambda_2}) + \lambda_1 \cos \Lambda_1)^2} + \frac{24m_1 n_1 \lambda_1 \sqrt{\lambda_2} \sinh(\xi_1 + \ln \sqrt{\lambda_2}) \sin \Lambda_1}{(2\sqrt{\lambda_2} \cosh(\xi_1 + \ln \sqrt{\lambda_2}) + \lambda_1 \cos \Lambda_1)^2}. \quad (13)$$

呼吸波解由双曲函数以及三角函数组成。双曲函数和三角函数分别决定孤立波源和周期波源的行为。因此，呼吸波可以被认为它们的非线性组合。当波数满足

$$\begin{vmatrix} m_1 & m_1 p_1 - n_1 q_1 \\ n_1 & m_1 q_1 + n_1 p_1 \end{vmatrix} = 0.$$

即

$$q_1 = 0. \quad (14)$$

此时，呼吸波发展成了另一种叫做转换波的波。在这种情况下，方程(7)中的函数  $f_2$  被改写为

$$f_2 = 2\sqrt{\lambda_2} \cosh(\xi_1^* + \ln \sqrt{\lambda_2}) + \lambda_1 \cos \Lambda_1^*, \quad (15)$$

其中，

$$\xi_1^* = m_1 x + m_1 p_1 y + (m_1 \omega_{1R}^* - n_1 \omega_{1I}^*) t + \delta_1, \quad (16)$$

$$\Lambda_1^* = n_1 x + n_1 p_1 y + (m_1 \omega_{1I}^* + n_1 \omega_{1R}^*) t + \gamma_1, \quad (17)$$

$$K_1^* = \frac{3n_1^4 - m_1^2 n_1^2 - 3n_1^2 p_1}{3m_1^4 - m_1^2 n_1^2 + 3m_1^2 p_1}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{4} \lambda_1^2 K_1^*, \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \omega_{1R}^* &= -m_1^4 + 6m_1^2 n_1^2 - n_1^4 - 5m_1^2 p_1 + 5n_1^2 p_1 + 5p_1^2, \\ \omega_{1I}^* &= -4m_1^3 n_1 + 4m_1 n_1^3 - 10m_1 n_1 p_1, \end{aligned} \quad (19)$$

我们将方程(15)代入方程(4)得到转换波解的表达式为

$$\begin{aligned} u &= \frac{24\lambda_2 m_1^2 - 6\lambda_1^2 n_1^2 + 12\lambda_1 \sqrt{\lambda_2} (m_1^2 - n_1^2) \cosh(\xi_1^* + \ln \sqrt{\lambda_2}) \cos \Lambda_1^*}{(2\sqrt{\lambda_2} \cosh(\xi_1^* + \ln \sqrt{\lambda_2}) + \lambda_1 \cos \Lambda_1^*)^2} \\ &+ \frac{24m_1 n_1 \lambda_1 \sinh \sqrt{\lambda_2} (\xi_1^* + \ln \sqrt{\lambda_2}) \sin \Lambda_1^*}{(2\sqrt{\lambda_2} \cosh(\xi_1^* + \ln \sqrt{\lambda_2}) + \lambda_1 \cos \Lambda_1^*)^2}. \end{aligned} \quad (20)$$

当参数满足一定的物理条件时，转换波可以被展示为 M 型孤子(见图 1)、振荡 W 型(M 型)孤子(见图 2, 图 3)、多峰孤子(见图 4)。(a)表示几种转换波的三维结构，(b)表示它们在  $y = 0$  处的截面图。

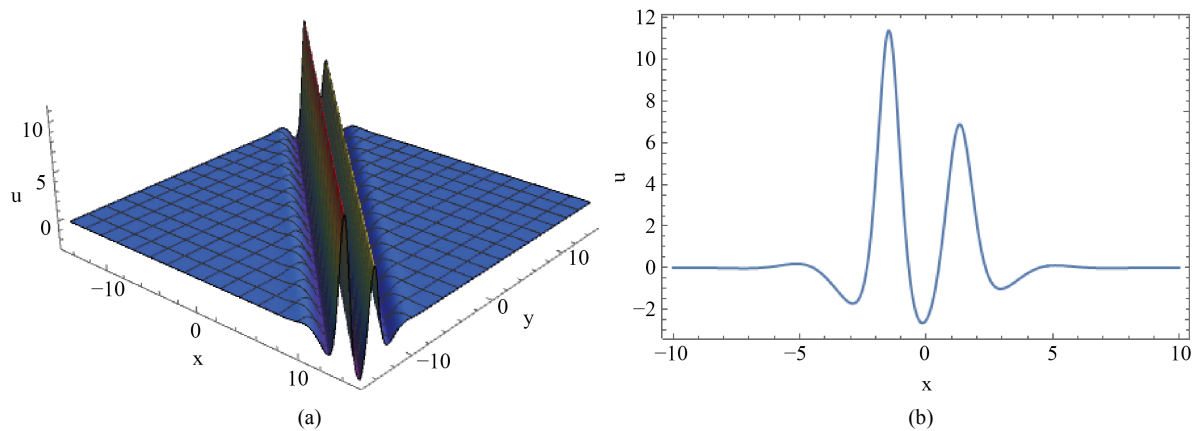


Figure 1. M-shaped soliton. The parameters are  $m_1 = 1, n_1 = 1.5, p_1 = 1, \delta_1 = 0, \gamma_1 = 0, \lambda_1 = 2$

图 1. M 型孤子。参数为  $m_1 = 1, n_1 = 1.5, p_1 = 1, \delta_1 = 0, \gamma_1 = 0, \lambda_1 = 2$

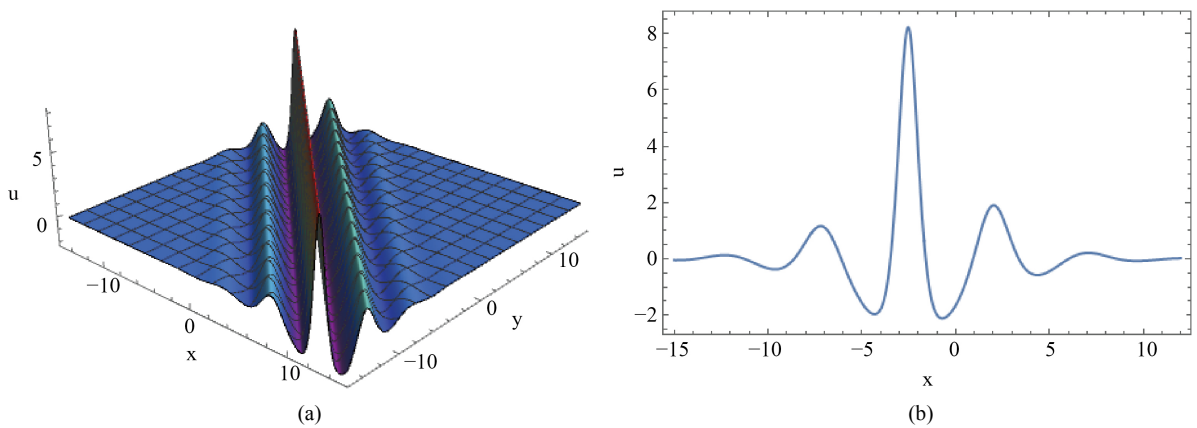
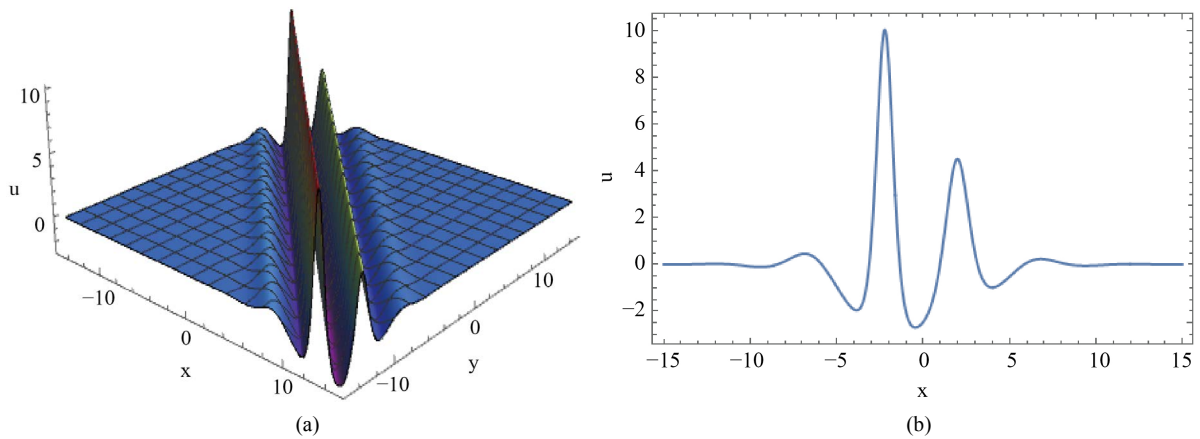


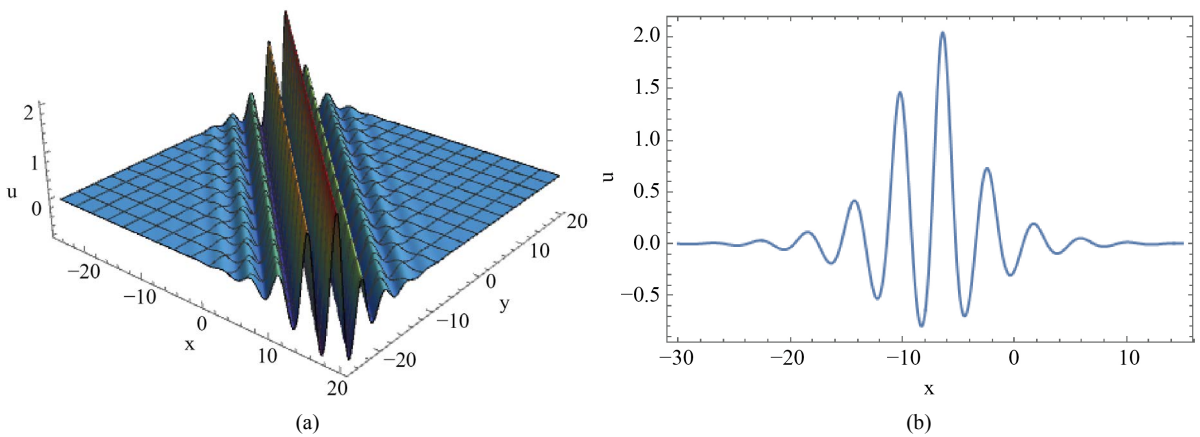
Figure 2. The oscillating W-shaped soliton. The parameters are  $m_1 = 0.4, n_1 = 1.2, p_1 = 1, \delta_1 = 0, \gamma_1 = 0, \lambda_1 = 2$

图 2. 振荡 W 型孤子。参数为  $m_1 = 0.4, n_1 = 1.2, p_1 = 1, \delta_1 = 0, \gamma_1 = 0, \lambda_1 = 2$ 。



**Figure 3.** The oscillating M-shaped soliton. The parameters are  $m_1 = 0.55, n_1 = 1.2, p_1 = 1, \delta_1 = 0, \gamma_1 = 0, \lambda_1 = 2$

**图 3.** 振荡 M 型孤子。参数为  $m_1 = 0.55, n_1 = 1.2, p_1 = 1, \delta_1 = 0, \gamma_1 = 0, \lambda_1 = 2$



**Figure 4.** The multi-peak soliton. The parameters are  $m_1 = 0.3, n_1 = 1.5, p_1 = 1, \delta_1 = 0, \gamma_1 = 0, \lambda_1 = 2$

**图 4.** 多峰孤子。参数为  $m_1 = 0.3, n_1 = 1.5, p_1 = 1, \delta_1 = 0, \gamma_1 = 0, \lambda_1 = 2$

### 3. 时变性质

转换波的孤立波源和周期波源的相位如下

$$\varphi_s(t) = (m_1 \omega_{1R} - n_1 \omega_{1I})t + \delta_1 + \ln \sqrt{\lambda_2}, \tag{21}$$

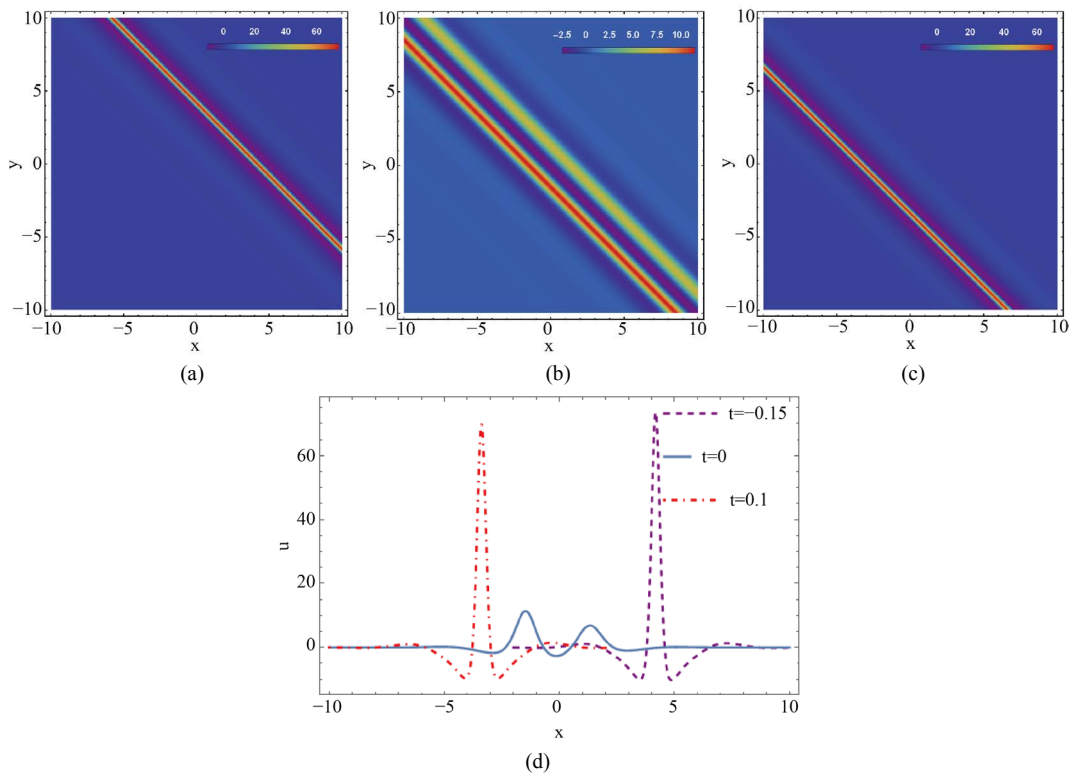
$$\varphi_p(t) = (m_1 \omega_{1I} + n_1 \omega_{1R})t + \gamma_1, \tag{22}$$

它们之间的相位差是

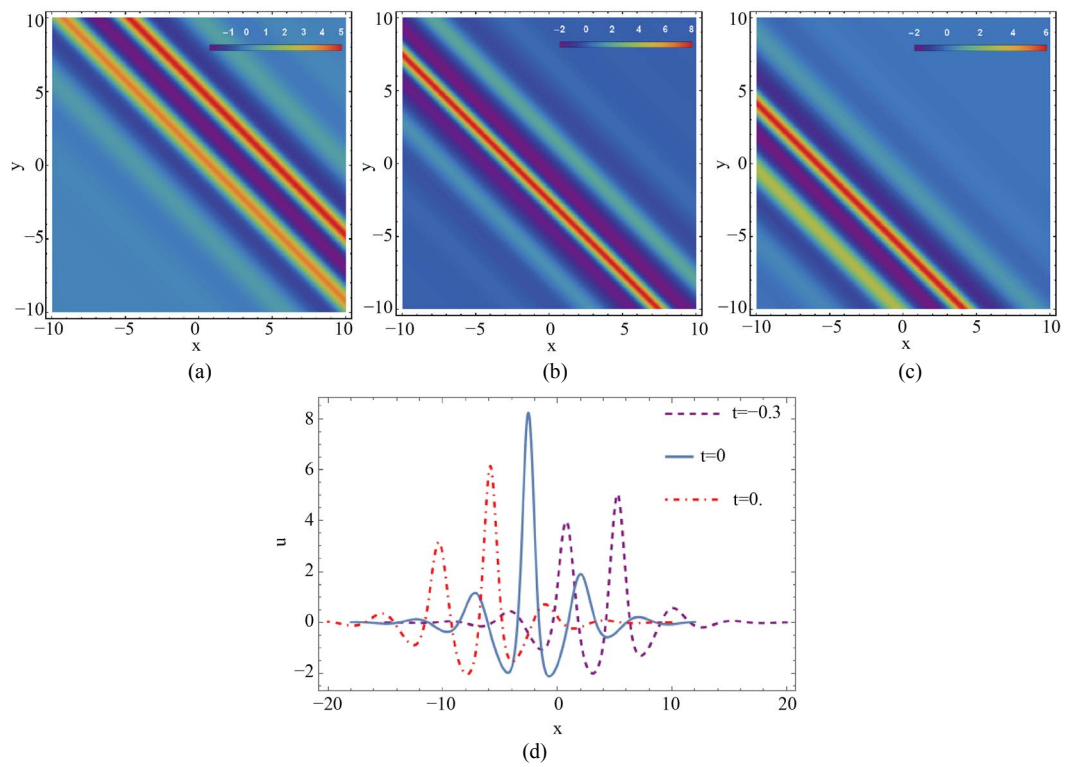
$$\varphi_d = [(m_1 - n_1) \omega_{1R} - (m_1 - n_1) \omega_{1I}]t + \delta_1 + \ln \sqrt{\lambda_2} - \gamma_1,$$

与时间变量  $t$  有关。因此，这些转换波的形状随时间而变化。

本节介绍 W 型或 M 型孤子和振荡 W 型或 M 型孤子的时变性质。图 5(a)~(c) 是 M 型或 W 型孤子在三个不同时刻的密度图。图 5(d) 是它们在三个不同时刻的截面图，从中我们看到 W 型孤子和 M 型孤子交替变换。图 6(a)~(c) 是振荡 M 型或振荡 W 型孤子在三个不同时刻的密度图。图 6(d) 是它们在三个不同时刻的截面图，从中我们看出转换波有明显的时变性质。



**Figure 5.** The time-varying property of M-shaped solitons  
**图 5.** M 型孤子的时变性质



**Figure 6.** The time-varying property of oscillating W-shaped solitons  
**图 6.** 振荡 W 型孤子的时变性质

## 4. 结论

本文研究了(2 + 1)维 Sawada-Kotera 方程的不同类型的转换波, 包括 M 型孤子(见图 1)、振荡 W 型或 M 型孤子(见图 2 和图 3)和多峰孤子(见图 4)。另外, 我们讨论了几种转换波的时变性质(见图 5 和图 6)。我们发现叠加区域随时间而变化, 这造成转换波发生形变。

## 致 谢

本文作者衷心感谢审稿人的意见和建议。

## 参考文献

- [1] Chen, Y., Huang, L.L., *et al.* (2017) Lump Solutions and Interaction Phenomenon for (2 + 1)-Dimensional Sawada-Kotera Equation. *Communications in Theoretical Physics*, **67**, 473. <https://doi.org/10.1088/0253-6102/67/5/473>
- [2] 李翊神. 孤子与可积系统[M]. 上海: 上海科技教育出版社, 1999.
- [3] 黄景宁, 徐济仲, 熊吟涛. 孤子: 概念、原理和应用[M]. 北京: 高等教育出版社, 2004.
- [4] 陈登远. 孤子引论[M]. 北京: 科学出版社, 2006.
- [5] 広田良吾, 王红艳, 李春霞, 等. 孤子理论中的直接方法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2008.
- [6] Akhmediev, N., Ankiewicz, A. and Taki, M. (2009) Waves That Appear from Nowhere and Disappear without a Trace. *Physics Letters A*, **373**, 675-678.
- [7] Osborne, A.R. (2010) *Nonlinear Ocean Waves and the Inverse Scattering Transform*. Academic Press Inc., Cambridge.
- [8] Kuznetsov, E.A. (1977) Solitons in Parametrically Unstable Plasma. *Doklady Akademiinauk SSSR*, **22**, 507-508.
- [9] Falcon, É., Laroche, C. and Fauve, S. (2002) Observation of Depression Solitary Surface Waves on a Thin Fluid Layer. *Physical Review Letters*, **89**, Article ID: 204501. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.89.204501>
- [10] Pelinovsky, D.E., Stepanyants, Y.A. and Kivshar, Y.S. (1995) Self-Focusing of Plane Dark Solitons in Nonlinear Defocusing Media. *Physical Review E, Statistical Physics, Plasmas, Fluids, and Related Interdisciplinary Topics*, **51**, 5016-5026. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.51.5016>
- [11] Manakov, S.V., Zakharov, V.E., Bordag, L.A., *et al.* (1977) Two-Dimensional Solitons of the Kadomtsev-Petviashvili Equation and Their Interaction. *Physics Letters A*, **63**, 205-206. [https://doi.org/10.1016/0375-9601\(77\)90875-1](https://doi.org/10.1016/0375-9601(77)90875-1)
- [12] Peregrine, D.H. (1983) Water Waves, Nonlinear Schrödinger Equations and Their Solutions. *The ANZIAM Journal*, **25**, 16-43. <https://doi.org/10.1017/S0334270000003891>
- [13] Ma, H.C. and Deng, A.P. (2016) Lump Solution of (2 + 1)-Dimensional Boussinesq Equation. *Communications in Theoretical Physics*, **65**, 546-552. <https://doi.org/10.1088/0253-6102/65/5/546>
- [14] Konopelchenko, B.G. and Dubrovsky, V.G. (1984) Some New Integrable Nonlinear Evolution Equations in 2+1 Dimensions. *Physics Letters A*, **102**, 15-17. [https://doi.org/10.1016/0375-9601\(84\)90442-0](https://doi.org/10.1016/0375-9601(84)90442-0)
- [15] Hirota, R. (2004) *The Direct Method in Soliton Theory*. Cambridge University Press, Cambridge. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511543043>