Advances in Applied Mathematics 应用数学进展**, 2021, 10(9), 3102-3119**
Published Online September 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2021.109324

复变函数在平面解析几何中的应用

何伟奇，孔维汉，杨嘉妮，李　然*

辽宁师范大学数学学院，辽宁　大连
Email: 3247259651@qq. com, 2785142099@qq.com, 1249199546@qq.com, *liranmika@163.com

收稿日期：2021年8月17日；录用日期：2021年9月9日；发布日期：2021年9月22日

摘　要

本文主要研究将直角坐标系的平面解析几何复数化。通过大量地计算和观察点，直线，圆锥曲线和向量等复数化表达形式，给出平面解析几何相关结论的复数化证明。进而，根据所求得的一系列结果进行总结归纳，将技巧性方法和共性结论统一给出。最后利用复数化方法得出的技巧和结论求解实际问题，体会复数化方法的巧妙与简单之处，展现数与形的完美结合。

关键词

复平面，平面解析几何，轨迹问题，最值问题，离心率

The Applications of Complex Function in Plane Analytic Geometry

Weiqi He, Weihan Kong, Jia'ni Yang, Ran Li*

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning
Email: 3247259651@qq. com, 2785142099@qq.com, 1249199546@qq.com, *liranmika@163.com

Received: Aug. 17th, 2021; accepted: Sep. 9th, 2021; published: Sep. 22nd, 2021

Abstract

This paper focuses on exchanging the plane analytic geometry defined in cartesian coordinates to the complex. First, the proofs with a complex number of correlate conclusions on the plane analytic geometry are given by calculating largely and observing the complex expression forms of things like points, straight lines, conical curves and vectors. In addition, according to the obtained series of results, we sum up and give the technical methods and common conclusions uniformly.

*通讯作者。

文章引用：何伟奇，孔维汉，杨嘉妮，李然．复变函数在平面解析几何中的应用[J]．应用数学进展，2021，10(9): 3102-3119. DOI: 10.12677/aam.2021.109324

Finally, we use the skills and conclusions drawn by the complex method to solve the practical problems, experience the cleverness and simplicity of it and show the perfect combination of number and shape.

Keywords

Complex Plane, Plane Analytic Geometry, Track Problem, Minimum Problem, Eccentricity

1. 引言

复数域是最大的数域，自复数发展以来，数学上的复变函数，留数，欧拉公式，傅里叶变换，拉普拉斯变换等理论上也发展完善起来，复数的重要性可见一斑，当今，随着数学教学大纲的改革，探究性课题日益增多，一题多解的现象频频出现，而且有一些题用一般几何证明或代数法很难证出，对此，引进新的几何证明的方法——复数法。其基本思路是：首先运用复数表示复平面上的点，然后利用平面直角坐标系的点与复平面的复数的代数对应关系，以及复数模和辐角的有关性质，复数运算，复数的几何意义等，化几何问题为复数问题处理。复平面的建立实现了平面解析几何和复数几何问题间的相互转化(详见参考文献[1])。

本文首先根据高中必修二(详见参考文献[2] [3])，选修 2-1 (详见参考文献[4] [5])所学内容将平面解析几何及其相关结论复数化，对照地写出计算结果并进行观察，研究二者之间的联系，观察点，直线，圆锥曲线，向量等表达形式的改变，并进行归纳总结；然后，将重要结论的复数法证明给出；最后，给出复数法具体实例应用。复数法不仅提供给我们一个新的解题思路，而且利用复数的几何意义和复数表达往往使得问题更加简单，直观，充分体现数形结合思想。

2. 平面解析几何的复数化表达式的计算

平面解析几何复数化大部分是通过 $z=x+iy, x=\dfrac{z+\overline{z}}{2}, y=\dfrac{z-\overline{z}}{2i}$ 来实现的，即：平面解析几何表达式通过上述变换就可以转化为复平面上的表达式。

下面我们以直线的点斜式方程为例，体会一下这个过程：

我们首先给出平面直角坐标系上直线的点斜式方程的叙述：已知直线上一点 $P_0\left(x_0, y_0\right)$ 和直线的斜率 k，则直线的点斜式方程为 $y-y_0=k\left(x-x_0\right)$ (不能表示垂直于 x 轴的直线)。

而在复变函数中，我们已经学习过，复平面上的点记作 $z=x+iy$，所以我们假设已知直线上一点 $z_0=x_0+iy_0$，斜率为 k。

$$y-y_0=k\left(x-x_0\right), x=\frac{z+\overline{z}}{2}, y=\frac{z-\overline{z}}{2i},$$

代入得

$$\frac{z-\overline{z}}{2i}-\frac{z_0-\overline{z_0}}{2i}=k\left(\frac{z+\overline{z}}{2}-\frac{z_0+\overline{z_0}}{2}\right),$$

$$\frac{z-z_0}{2i}-\frac{\overline{z}-\overline{z_0}}{2i}=k\left(\frac{z-z_0}{2}-\frac{\overline{z}-\overline{z_0}}{2}\right),$$

去分母得

$$(z-z_0)-\left(\overline{z}-\overline{z_0}\right)=ki\left[(z-z_0)+\left(\overline{z}-\overline{z_0}\right)\right],$$

合并同类项得

$$(1-ki)(z-z_0)=(1+ki)\left(\overline{z}-\overline{z_0}\right),$$

设 $\alpha=1-ki$，则有

$$\alpha(z-z_0)=\overline{\alpha}\left(\overline{z}-\overline{z}_0\right),$$

即

$$\alpha(z-z_0)=\overline{\alpha(z-z_0)}。$$

通过这样的变换就把平面解析几何中的结论转换为复平面中的对应结论中，而其他类型的直线方程如：两点式，斜截式等也同样可以通过上述转换过程得到在复数域内的表达式，而这些表达式在证明复数域中相关结论时就可以直接应用。

除了直线，我们在复变函数中还学习过圆，它也可以通过类似的方式进行转换，那么其他更为复杂的椭圆，双曲线，抛物线等通过上面的类似过程会得到什么结果呢？

我们以焦点在 x 轴上的椭圆为例：

在平面解析几何中椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ (焦点在 x 轴上)。

由 $x=\frac{z+\overline{z}}{2}$， $y=\frac{z-\overline{z}}{2i}$

代入得

$$\frac{\left(\frac{z+\overline{z}}{2}\right)^2}{a^2}+\frac{\left(\frac{z-\overline{z}}{2i}\right)^2}{b^2}=1,$$

去分母得

$$b^2(z+\overline{z})^2-a^2(z-\overline{z})^2=4a^2b^2,$$

展开得

$$\left(b^2-a^2\right)\left(z^2+\overline{z}^2\right)+2\left(a^2+b^2\right)z\overline{z}=4a^2b^2,$$

设 $A=b^2+a^2$， $B=b^2-a^2$，

则有

$$B\left(z^2+\overline{z}^2\right)+2Az\overline{z}=B^2-A^2 \quad \text{(焦点在实轴上)。}$$

此外，也可以根据椭圆的定义和复数的几何定义得到椭圆方程的另一种形式：

设焦点在实轴上为 $F_1=c, F_2=-c$， $2a$ 为椭圆的长轴长度，则椭圆的方程为

$$|z-c|+|z+c|=2a \quad \text{(焦点在实轴上)。}$$

3. 复平面上平面解析几何的相关性质的计算

利用已经求得的点，直线，圆，圆锥曲线的表达式，根据 xOy 平面和复平面表达式中系数的对应关系和 xOy 平面上的性质可以直接推得复平面上相关性质，不用根据初始原理进行计算，使得解题过程变得简单。

例 求复平面上两条直线垂直的充分必要条件。

分析 已知 xOy 平面上直线方程为 $Ax+By+C=0\left(A^2+B^2\neq 0\right)$，对应的复平面上直线方程为 $\alpha z+\overline{\alpha z}+C=0\left(\alpha=\dfrac{1}{2}(A-iB),\alpha\in\mathbb{C}\setminus\{0\},C\in\mathbb{R}\right)$。如果利用复平面上两条直线所成的夹角为 90° 推垂直的条件，分析无从下手；如果利用复平面上两条直线斜率的乘积为-1 推垂直的条件，斜率不易求得，且需要考虑斜率不存在的情况。故而考虑在显示 xOy 平面上直线的一般方程情况下两条直线垂直的充分必要条件，再利用 xOy 平面和复平面表达式中系数的对应关系进行求解。

证明 已知在 xOy 平面上两条直线的方程为：

$$\begin{aligned}&l_1: A_1x+B_1y+C_1=0\\&l_2: A_2x+B_2y+C_2=0\end{aligned}。$$

其对应复平面上两条直线的方程为：

$$l_1:\alpha_1 z+\overline{\alpha}_1\overline{z}+C_1=0\left(\alpha_1\in\mathbb{C}\setminus\{0\},C_1\in\mathbb{R}\right)\ (\text{其中}\ \alpha_1=\frac{1}{2}(A_1-iB_1)),$$

$$l_2:\alpha_2 z+\overline{\alpha}_2\overline{z}+C_2=0\left(\alpha_2\in\mathbb{C}\setminus\{0\},C_2\in\mathbb{R}\right)\ (\text{其中}\ \alpha_2=\frac{1}{2}(A_2-iB_2))。$$

又已知在 xOy 平面上有

$$l_1\perp l_2\Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2=0，$$

根据上式以及 xOy 平面和复平面表达式中系数的对应关系

$$\begin{cases}\alpha_1=\dfrac{1}{2}(A_1-iB_1)\\\alpha_2=\dfrac{1}{2}(A_2-iB_2)\end{cases},$$

得

$$\begin{cases}A_1=\alpha_1+\overline{\alpha_1}\\A_2=\alpha_2+\overline{\alpha_2}\\B_1=\left(\alpha_1-\overline{\alpha_1}\right)i\\B_2=\left(\alpha_2-\overline{\alpha_2}\right)i\end{cases},$$

将上式带入 $A_1A_2+B_1B_2=0$ 中，得

$$\left(\alpha_1+\overline{\alpha_1}\right)\left(\alpha_2+\overline{\alpha_2}\right)-\left(\alpha_1-\overline{\alpha_1}\right)\left(\alpha_2-\overline{\alpha_2}\right)=0，$$

展开得

$$\alpha_1\alpha_2+\overline{\alpha_1}\alpha_2+\alpha_1\overline{\alpha_2}+\overline{\alpha_1\alpha_2}-\alpha_1\alpha_2+\overline{\alpha_2}\alpha_1+\overline{\alpha_1}\alpha_2-\overline{\alpha_1\alpha_2}=0，$$

整理得

$$\overline{\alpha_1}\alpha_2+\alpha_1\overline{\alpha_2}=0,$$

所以

$$l_1\perp l_2\Leftrightarrow\alpha_1\overline{\alpha_2}+\overline{\alpha_1}\alpha_2=0。$$

4. *xOy* 平面上与复平面上技巧性解题对比

以求过圆锥曲线上一点的切线方程为例：

对于 xOy 平面，根据详细计算所得结果类比，得到解题技巧：假设圆锥曲线上的切点为 (x_0,y_0)，根据已知的圆锥曲线表达式，将表达式中的平方项 x^2 拆成 $x\cdot x$，再将其中一个 x 换成 x_0，即将 x^2 换成 x_0x，同理将 y^2 换成 y_0y；将表达式中的一次项 x 拆成 $\frac{x+x}{2}$，再将其中一个 x 换成 x_0，即将 x 换成 $\frac{x+x_0}{2}$，同理将 y 换成 $\frac{y+y_0}{2}$；常数项和系数都不变；即可求得符合题目要求的切线方程。

对于复平面，根据详细计算所得结果类比，得到解题技巧：假设圆锥曲线上的切点为 z_0，根据已知的圆锥曲线复数表达式，将表达式中的平方项 z^2 拆成 $z\cdot z$，再将其中一个 z 换成 z_0，即将 z^2 换成 z_0z，同理将 $\overline{z}^2$ 换成 $\overline{z_0z}$；将表达式中的 $z\overline{z}$ 拆成 $\frac{z\overline{z}+z\overline{z}}{2}$，然后将 $z\overline{z}$ 换成 $\frac{z_0\overline{z}+z\overline{z_0}}{2}$；将表达式中的 z 拆成 $\frac{z+z}{2}$，再将其中一个 z 换成 z_0，即将 z 换成 $\frac{z_0+z}{2}$，同理将 $\overline{z}$ 换成 $\overline{\frac{z_0+z}{2}}$；常数项和系数都不变；即可求得符合题目要求的切线方程，具体结果详见 5.3。

5. 复平面表达式规律总结探究

5.1. 表达式形式的统一

$$A\left(z^2+\overline{z}^2\right)+2Bz\overline{z}+\alpha z+\overline{\alpha z}+C=0$$

1) 当 $A=0,B=0,\alpha\neq0$ 且 α 为复数时，表示直线；
当 $C=0$ 时，直线过原点；
2) 当 $A=0,B\neq0,|\alpha|^2>2BC$，$\alpha$ 为复数时，表示圆；
当 $C=0$ 时，圆过原点；
3) 当 $A\neq0,B\neq0,\alpha=0,B>A,C=A^2-B^2$ 时，表示椭圆；
(1) 当 $A>0$ 时，焦点在实轴上；
(2) 当 $A<0$ 时，焦点在虚轴上；
4) 当 $A\neq0,B\neq0,\alpha=0,A>B,C=B^2-A^2$ 时，表示双曲线；
(1) 当 $A>0$ 时，焦点在实轴上；
(2) 当 $A<0$ 时，焦点在虚轴上；
5) 当 $A\neq0,B\neq0,\alpha\neq0$ 且为实数或者纯虚数时，表示抛物线；
(1) 当 α 为实数 $\alpha>0$ 时，焦点在实轴正半轴上；
(2) 当 α 为实数 $\alpha<0$ 时，焦点在实轴负半轴上；
(3) 当 α 为纯虚数 $\mathrm{Im}\,\alpha>0$ 时，焦点在虚轴正半轴上；
(4) 当 α 为纯虚数 $\mathrm{Im}\,\alpha<0$ 时，焦点在虚轴负半轴上。

5.2. 圆锥曲线弦长公式的统一

假设直线方程为 $\alpha z-\overline{\alpha}\overline{z}-2\beta=0\left(\alpha=1-ki,\beta=mi\right)$ 与圆锥曲线的交点为 $z_1=x_1+iy_1,z_2=x_2+iy_2$ 两点，则弦长 $\left|z_1z_2\right|=\left|\alpha\right|\left|\frac{\left(z_1-z_2\right)+\overline{z_1-z_2}}{2}\right|$。

5.3. 圆锥曲线切线公式的统一

过圆锥曲线上一点 z_0 的切线方程 $A\left(zz_0+\overline{z}\,\overline{z}_0\right)+B\left(z_0\overline{z}+\overline{z}_0z\right)+\frac{1}{2}\alpha\left(z_0+z\right)+\frac{1}{2}\overline{\alpha}\left(\overline{z}_0+\overline{z}\right)+C=0$。

(1) 当 $A=0,B\neq0,\alpha\neq0$ 时,得到过圆上一点的切线方程：

$$B\left(z_0\overline{z}+\overline{z}_0z\right)+\frac{1}{2}\alpha\left(z_0+z\right)+\frac{1}{2}\overline{\alpha}\left(\overline{z}_0+\overline{z}\right)+C=0;$$

(2) 当 $A\neq0,B\neq0,C\neq0,\alpha=0$ 时，得到过椭圆上一点的切线方程：

$$A\left(zz_0+\overline{z}\,\overline{z}_0\right)+B\left(z_0\overline{z}+\overline{z}_0z\right)+C=0\quad(\text{其中 }C=A^2-B^2);$$

(3) 当 $A\neq0,B\neq0,C\neq0,\alpha=0$ 时，得到过双曲线上一点的切线方程：

$$A\left(zz_0+\overline{z}\,\overline{z}_0\right)+B\left(z_0\overline{z}+\overline{z}_0z\right)+C=0\quad(\text{其中 }C=B^2-A^2);$$

(4) 当 $A\neq0,B\neq0,\alpha\neq0$ 时，得到过抛物线上一点的切线方程：

$$A\left(zz_0+\overline{z}\,\overline{z}_0\right)+B\left(z_0\overline{z}+\overline{z}_0z\right)+\frac{1}{2}\alpha\left(z_0+z\right)+\frac{1}{2}\overline{\alpha}\left(\overline{z}_0+\overline{z}\right)+C=0。$$

6. 利用复平面解题的实际应用

除了运用平面直角坐标系的点与复平面的复数的代数对应关系，复数运算，复数的几何意义等化几何问题为复数问题处理得到复平面的相对结论外，还可以利用这些求得的结论，复数的模长和辐角等求解或证明平面解析几何问题。将复数的几何意义与代数表达充分结合，大大降低了解题难度，使得思考更加多元，直观。

6.1. 利用复平面求解轨迹问题

题 1 已知抛物线 $y^2=8\left(x+1\right)$，F 为抛物线的焦点，A 为抛物线上任意一点，点 P 为线段 AF 的中点，求点 P 的轨迹方程。

分析 从平面直角坐标系角度思考，由点 P 为线段 AF 的中点可以得到点 P 的坐标与抛物线上任意一点 A 的坐标之间的关系，通过变形得到将点 A 的坐标用点 P 的坐标表达的对应关系式，再带入抛物线方程中进行化简求解。从复平面角度思考，借助复数的几何意义中的辐角，复数的多种表达形式可以简化计算，更加直观，容易理解，具体过程如下：

解 由题意可知，$F\left(1,0\right)$

在复平面上，设 A,F,P 各点对应的复数分别为 $z_A=x_1+iy_1,z_F=1,z_P=x+iy$，向量 $\boldsymbol{PF}=z_1=r_1e^{i\theta_1}$，$\boldsymbol{PA}=z_2=r_2e^{i\theta_2}$，

因为

$$r_1=r_2,\theta_2=\theta_1+\pi,$$

所以

$$\boldsymbol{PA}=z_2=r_2\mathrm{e}^{i\theta_2}=r_1\mathrm{e}^{i(\theta_1+\pi)}=r_1\mathrm{e}^{i\theta_1}\mathrm{e}^{i\pi}=r_1\mathrm{e}^{i\theta_1}\left(\cos\pi+i\sin\pi\right)=z_1\left(\cos\pi+i\sin\pi\right)=-z_1=-\boldsymbol{PF}$$ 。

又

$$\boldsymbol{PA}=z_2=z_A-z_P,\boldsymbol{PF}=z_1=z_F-z_P,$$

所以

$$z_A-z_P=-z_F+z_P,$$

所以

$$x_1+iy_1-(x+iy)=x+iy-1,$$

所以

$$(x_1-2x+1)+i(y_1-2y)=0,$$

所以

$$\begin{cases}x_1=2x-1\\y_1=2y\end{cases}。$$

因为点 $A(x_1,y_1)$ 在抛物线上，所以

$$(2y)^2=8(2x-1+1),$$

即点 P 的轨迹方程为

$$y^2=4x。$$

题 2 已知 M 为抛物线 $y^2=2px$ 上任意一点，以 OM 为边逆时针作正方形 $OMQN$，求动点 N 的轨迹方程。

分析 从平面直角坐标系角度看本题，可能刚开始无从下手，故而考虑从几何角度和复平面的角度出发，利用复数的几何意义，复数的多种表达形式求解问题，简化求解过程，具体过程如下：

解 建立复平面，设 M,N 对应的复数分别为 $z_M=x_0+iy_0,z_N=x+iy$ 。

因为以 M 为边逆时针作正方形 $OMQN$，所以

$$z_M=r\mathrm{e}^{i\theta_1},z_M=r\mathrm{e}^{i\theta_2},\theta_2=\theta_1+\frac{\pi}{2},$$

所以

$$z_N=z_M\cdot\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}=z_M\cdot i=(x_0+iy_0)i=-y_0+ix_0=x+iy,$$

则

$$x=-y_0,y=x_0。$$

因为 M 为抛物线 $y^2=2px$ 上任意一点，所以

$$y_0^2=2px_0,$$

所以动点 N 的轨迹方程为

$$x^2=2py。$$

6.2. 利用复平面求最值问题

题 3 长度为 4 的线段 MN 的两个端点在抛物线 $x^2=2y$ 上移动，求 MN 的中点到 x 轴的最短距离。

解 建立复平面，设 M,N 对应的复数分别为 z_M,z_N，

则复平面上抛物线 $x^2=2y$ 表达式为

$$\left|z-i\frac{1}{2}\right|=\operatorname{Im}\left(z+i\frac{1}{2}\right)。$$

因为 M,N 两点在抛物线上，所以

$$\left|z_M-i\frac{1}{2}\right|=\operatorname{Im}\left(z_M+i\frac{1}{2}\right),$$

$$\left|z_N-i\frac{1}{2}\right|=\operatorname{Im}\left(z_N+i\frac{1}{2}\right)。$$

所以

$$\left|z_M-i\frac{1}{2}\right|+\left|z_N-i\frac{1}{2}\right|=\operatorname{Im}\left(z_M+z_N+i\right)=2y_m+1。$$

又因为

$$\left|z_M-i\frac{1}{2}\right|+\left|z_N-i\frac{1}{2}\right|\geq\left|\left(z_M-i\frac{1}{2}\right)-\left(z_N-i\frac{1}{2}\right)\right|=\left|z_M-z_N\right|=\left|MN\right|=4,$$

所以

$$2y_m+1\geq 4,$$

所以

$$y_m\geq\frac{3}{2},$$

所以 MN 的中点到 x 轴的最短距离为 $\frac{3}{2}$。

6.3. 利用所得的复平面结论公式求解问题

题 4 已知一个椭圆以原点为中心，焦点 F_2 在 x 轴上，一条斜率为 1 的直线经过 F_2 且与椭圆交于 M,N 两点，$\boldsymbol{OM}+\boldsymbol{ON}$ 与向量 $\boldsymbol{n}=(3,-2)$ 共线，求该椭圆的离心率。

解 在复平面中，设椭圆的焦点坐标为 $(c,0)$，$(-c,0)$。设直线方程为 $l_{MN}:\alpha(z-z_0)=\bar{\alpha}(\bar{z}-\bar{z}_0)$，其中 $\alpha=1-ki=1-i$，$z_0=x_0+iy_0=c$。设椭圆方程为 $2Az\bar{z}-B\left(z^2+\bar{z}^2\right)=A^2-B^2$。

将直线方程和椭圆方程联立

$$\begin{cases}(1-i)(z-c)=(1+i)(\bar{z}-c)\\2Az\bar{z}-B\left(z^2+\bar{z}^2\right)=A^2-B^2\end{cases},$$

整理得

$$Az^2+\left[(-1+i)Ac-2B(1+i)c\right]z+2Bc-i\left(A^2-B^2\right)=0。$$

由韦达定理得

$$z_1+z_2=-\frac{(-1+i)Ac-B(1+i)c}{A}=\left(c+\frac{Bc}{A}\right)+i\left(-c+\frac{Bc}{A}\right)。$$

由于 $\boldsymbol{OM}+\boldsymbol{ON}$ 与向量 $\boldsymbol{n}=(3,-2)$ 共线，则

$$\frac{c+\dfrac{Bc}{A}}{-c+\dfrac{Bc}{A}}=\frac{3}{-2},$$

进而得到 A 和 B 的关系式

$$A=5B,$$

已知椭圆离心率 $e=\dfrac{\sqrt{2B(A+B)}}{A+B}$，则

$$e=\frac{\sqrt{2B(A+B)}}{A+B}=\frac{\sqrt{2B(5B+B)}}{5B+B}=\frac{\sqrt{3}}{3},$$

故椭圆离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$。

题 5 已知圆 $x^2+y^2+2x-6y+n=0$ 与直线 $x+2y-2=0$ 相交于 Q,R 两点，O 为坐标原点，若 $OQ\perp OR$，求 n 的值。

分析 这类题目的通常解法为，设出 $Q(x_1,y_1),R(x_2,y_2)$，联立圆与直线方程，利用 $x_1x_2+y_1y_2=0$ 和根与系数关系，最终求得 n 的值，这是一种代数思想。但如果我们利用几何关系去求解，会更为简便。我们已知 $OQ\perp OR$，则可将原点 O 看做以 QR 为直径的圆上的一点，而 Q,R 刚好为直线和圆的交点，所以可以选取直线和圆交点的圆系方程来求解。

解 在复数域中，圆的方程为 $z\overline{z}+(1+3i)z+(1-3i)\overline{z}+n=0$，直线方程为 $\left(\frac{1}{2}-i\right)z+\left(\frac{1}{2}+i\right)\overline{z}-2=0$，

则过直线和圆的交点的圆系方程为

$$z\overline{z}+(1+3i)z+(1-3i)\overline{z}+n+\lambda\left[\left(\frac{1}{2}-i\right)z+\left(\frac{1}{2}+i\right)\overline{z}-2\right]=0,$$

即

$$z\overline{z}+\left[\left(1+\frac{1}{2}\lambda\right)+i(3-\lambda)\right]z+\left[\left(1+\frac{1}{2}\lambda\right)+i(-3+\lambda)\right]\overline{z}+n-2\lambda=0。$$

依题意，原点在 QR 为直径的圆上，则圆心 $z_1=-1-\frac{1}{2}\lambda+i(3-\lambda)$ 在直线 $\left(\frac{1}{2}-i\right)z+\left(\frac{1}{2}+i\right)\overline{z}-2=0$ 上，

代入，解得

$$\lambda=\frac{6}{5}。$$

又由于原点 $z_0=0$ 在圆 $z\overline{z}+(1+3i)z+(1-3i)\overline{z}+n+\frac{6}{5}\left[\left(\frac{1}{2}-i\right)z+\left(\frac{1}{2}+i\right)\overline{z}-2\right]=0$ 上，

因此，解得 $n=\dfrac{12}{5}$。

本文通过利用复数法求解问题发现，复数法解题往往能简化问题的求解过程。当学生遇到几何题时，

首先想到的是画图，而对于一些复杂问题，在平面直角坐标系上不能充分表达几何意义，只能通过各种方程，代数等进行描绘，加大解题的复杂性，而复数具有其自身的几何意义，包括辐角，模长等，同时它又有代数表达式，完美实现数形结合，大大简化了问题的思考和求解。

致　谢

感谢辽宁师范大学教师指导本科生科研训练项目为我们提供了研究机会。从主题创新点的确定，到论文内容的详细多元，再到论文格式规范等，这些都离不开指导老师每次的全面解答和细致指导。经过不断的尝试与学习，我们慢慢掌握了项目的方向，理解了项目的意义。在今后的学习中，我们将以更加严谨的思维探索更多的知识，不断创新，不断突破。

参考文献

[1] 王美能. 复数法在解平面几何题中的应用[J]. 科技信息, 2010(20): 100-101.

[2] 王后雄. 教材完全解读: 人教 B 版. 高中数学. 2: 必修[M]. 北京: 中国青年出版社, 2013.

[3] 人民教育出版社, 课程教材研究所, 中学数学教材实验研究组. 普通高中课程标准实验教科书: 数学 2 必修 B 版[M]. 北京: 人民教育出版社, 2007.

[4] 王后雄. 教材完全解读: 人教 B 版. 高中数学. 2-1: 选修[M]. 北京: 中国青年出版社, 2013.

[5] 人民教育出版社, 课程教材研究所, 中学数学教材实验研究组. 普通高中课程标准实验教科书: 数学 2-1 选修 B 版[M]. 北京: 人民教育出版社, 2007.

附录

Table 1. Points
表 1. 点

	平面直线坐标系	复平面
1. 点的表达	(x,y)	$\left(\frac{z+\bar{z}}{2},\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)$
2. 两点的距离公式	已知两点 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$ 则 A,B 两点之间的距离为 $d(A,B)=\lvert AB\rvert=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$	已知两点 $z_1=x_1+iy_1,z_2=x_2+iy_2$ 则 z_1,z_2 两点之间的距离为 $d(z_1,z_2)=\lvert z_1-z_2\rvert$
3. 中点公式	已知两点 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$ 则 A,B 的中点为 $\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$	已知两点 $z_1=x_1+iy_1,z_2=x_2+iy_2$ 则 z_1,z_2 的中点为 $\frac{z_1+z_2}{2}$

Table 2. Straight line
表 2. 直线

	平面直角坐标系	复平面
1. 直线的点斜式方程	已知直线上一点 $P_0(x_0,y_0)$ 和直线的斜率 k，则直线的方程为 $y-y_0=k(x-x_0)$。(不能表示垂直于 x 轴的直线)	已知直线上一点 $z_0=x_0+iy_0$，且斜率为 k，则直线方程为 $\alpha(z-z_0)=\overline{\alpha(z-z_0)}$ (其中 $\alpha=1-ki$)或 $\alpha(z-z_0)=t(t\in R)$。(不能表示垂直于实轴的直线)
2. 直线的斜截式方程	已知直线的斜率为 k，截距为 b，则该直线的方程为 $y=kx+b$。(不能表示垂直 x 轴的直线)	已知直线过点 $z_0=ib$ (在虚轴截距为 b)且斜率为 k，则该直线的方程为：$\alpha z-\overline{\alpha z}-2\beta=0$。(其中 $\alpha=1-ki,\beta=bi$) (不能表示垂直实轴的直线)
3. 直线的两点式方程	已知直线上两点 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$，则该直线的方程为 $\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}(x_1\neq x_2,y_1\neq y_2)$。(不能表示垂直 x 轴和垂直 y 轴的直线)	已知直线上两点 $z_1=x_1+iy_1,z_2=x_2+iy_2$，则该直线的方程为 $\frac{z-z_1}{\bar{z}-\bar{z}_1}=\frac{z_2-z_1}{\bar{z}_2-\bar{z}_1}$。(其中 $z_1-z_2=a+bi\neq 0$，即 z_1,z_2 实部，虚部都不相等) (不能表示垂直虚轴和垂直实轴的直线)
4. 直线的一般方程	$Ax+By+C=0\left(A^2+B^2\neq 0\right)$	$\alpha z+\overline{\alpha z}+C=0\left(\alpha\in\mathbb{C}\setminus\{0\},C\in R\right)$ (其中 $\alpha=\frac{1}{2}(A-iB)$)
5. 直线的截距式方程	已知直线在 x 轴上的截距为 a，在 y 轴上的截距为 b，则该直线的方程为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ ($a\neq 0$ 且 $b\neq 0$)。(不能表示垂直于 x 轴的直线和垂直于 y 轴的直线，不能表示过原点的直线)	已知直线在实轴的截距是 a (即直线过点 $z_0=a$)，在虚轴截距为 b (即直线过点 $z_1=ib$) ($a\neq 0$ 且 $b\neq 0$)，则该直线的方程为 $\frac{z+\bar{z}}{z_0}+\frac{z-\bar{z}}{z_1}=2$ ($z_0\neq 0,z_1\neq 0$) (不能表示垂直于实轴的直线和垂直于虚轴的直线，不能表示过原点的直线)
6.两条直线的位置关系判别(一)	(一) 已知两条直线的方程为 $l_1:A_1x+B_1y+C_1=0$ $l_2:A_2x+B_2y+C_2=0$	已知两条直线的方程为 $l_1:\alpha_1z+\bar{\alpha}_1\bar{z}+C_1=0\left(\alpha_1\in\mathbb{C}\setminus\{0\},C_1\in R\right)$ (其中 $\alpha=\frac{1}{2}(A_1-iB_1)$) $l_2:\alpha_2z+\bar{\alpha}_2\bar{z}+C_2=0\left(\alpha_2\in\mathbb{C}\setminus\{0\},C_2\in R\right)$ (其中 $\alpha=\frac{1}{2}(A_2-iB_2)$)

Continued

(1) l_1 与 l_2 相交	(1) l_1 与 l_2 相交 $\Leftrightarrow A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0$ 或 $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$ ($A_2B_2 \neq 0$)	(1) l_1 与 l_2 相交 $\Leftrightarrow \alpha_1 \neq t\alpha_2$ ($t \in R$ 且 $t \neq 0$)或 $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \neq t$ ($t \in R, t \neq 0$) ($\alpha_2 \neq 0$)
(2) l_1 与 l_2 平行	(2) l_1 与 l_2 平行 $\Leftrightarrow A_1B_2 - A_2B_1 = 0$ 且 $B_1C_2 - B_2C_1 \neq 0$ 或 $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$ ($A_2B_2C_2 \neq 0$)	(2) l_1 与 l_2 平行 $\Leftrightarrow \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = t \neq \frac{C_1}{C_2}$ ($t \in R$ 且 $t \neq 0, \alpha_2 \neq 0, C_2 \neq 0$) 或 $\frac{\alpha_1}{\overline{\alpha_1}} = \frac{\alpha_2}{\overline{\alpha_2}} \neq \frac{C_1}{C_2}$ ($\alpha_1 \neq 0, \alpha_2 \neq 0, C_2 \neq 0$)
(3) l_1 与 l_2 重合	(3) l_1 与 l_2 重合 $\Leftrightarrow A_1 = kA_2, B_1 = kB_2, C_1 = kC_2\ (k \neq 0)$ 或 $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ ($A_2B_2C_2 \neq 0$)	(3) l_1 与 l_2 重合 $\Leftrightarrow \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = t = \frac{C_1}{C_2}$ ($t \in R$ 且 $t \neq 0, \alpha_2 \neq 0, C_2 \neq 0$)
(4) l_1 与 l_2 垂直	(4) $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 = 0$	(4) $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \alpha_1\overline{\alpha_2} + \overline{\alpha_1}\alpha_2 = 0$
7.两条直线的位置关系判别(二)	(二) 已知两条直线的方程为 $l_1: y = k_1x + b_1$ $l_2: y = k_2x + b_2$	已知两条直线的方程为 $l_1: \alpha_1 z - \overline{\alpha_1 z} - 2\beta_1 = 0\ (\alpha = 1 - k_1 i, \beta = ib_1)$ $l_2: \alpha_2 z - \overline{\alpha_2 z} - 2\beta_2 = 0\ (\alpha = 1 - k_2 i, \beta = ib_2)$
(1) l_1 与 l_2 相交	(1) l_1 与 l_2 相交 $\Leftrightarrow k_1 \neq k_2$	(1) l_1 与 l_2 相交 $\Leftrightarrow \alpha_1 \neq \alpha_2$
(2) l_1 与 l_2 平行	(2) l_1 与 l_2 平行 $\Leftrightarrow k_1 = k_2$ 且 $b_1 \neq b_2$	(2) l_1 与 l_2 平行 $\Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2$ 且 $\beta_1 \neq \beta_2$
(3) l_1 与 l_2 重合	(3) l_1 与 l_2 重合 $\Leftrightarrow k_1 = k_2$ 且 $b_1 = b_2$	(3) l_1 与 l_2 重合 $\Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2$ 且 $\beta_1 = \beta_2$
(4) l_1 与 l_2 垂直	(4) $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_1k_2 = -1$	(4) $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow (\alpha_1 - \overline{\alpha_1})(\alpha_2 - \overline{\alpha_2}) = 4$
8. 常见的直线系方程		
(1) 与一条直线垂直的直线系方程	已知直线 $l: Ax + By + C = 0$，则与 l 垂直的直线系方程为 $Bx - Ay + n = 0$ (n 为参数)。	已知直线 $l: \alpha z + \overline{\alpha z} + C = 0$，则与 l 垂直的直线系方程为 $i\alpha z - i\overline{\alpha z} + n = 0$ (n 为参数) ($\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \alpha = \frac{1}{2}(A - iB), n \in \mathbb{R}$)。
(2) 经过两条直线交点的直线系方程	经过两条直线 $l_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0$ 和 $l_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$ 的交点的直线系方程为 $A_1x + B_1y + C_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2) = 0$ (其中 $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$ 是常数) (直线系不包括 $l_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$，需要单独验证)。	经过两条直线 $l_1: \alpha_1 z + \overline{\alpha_1 z} + C_1 = 0$ 和 $l_2: \alpha_2 z + \overline{\alpha_2 z} + C_2 = 0$ 的交点的直线系方程为 $\alpha_1 z + \overline{\alpha_1 z} + C_1 + \lambda(\alpha_2 z + \overline{\alpha_2 z} + C_2) = 0$ ($\alpha_k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \alpha_k = \frac{1}{2}(A_k - iB_k), k = 1,2$) (C_1, C_2 是常数) (直线系不包括 $l_2: \alpha_2 z + \overline{\alpha_2 z} + C_2 = 0$，需要单独验证)。
9. 点到直线距离公式	平面上任一点 $P(x_1, y_1)$ 到直线 $l: Ax + By + C = 0\ (A^2 + B^2 \neq 0)$ 的距离 $d = \frac{\lvert Ax_1 + By_1 + C \rvert}{\sqrt{A^2 + B^2}}$。	平面上任一点 $z_1 = x_1 + iy_1$ 到直线 $\alpha z + \overline{\alpha z} + C = 0\ (\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, C \in R)$ (其中 $\alpha = \frac{1}{2}(A - iB)$)的距离 $d = \frac{\alpha z_1 + \overline{\alpha z_1} + C}{2\lvert\alpha\rvert}$。
10. 两条平行直线间的距离	一般地，已知两条平行直线 $l_1: Ax + By + C_1 = 0, l_2: Ax + By + C_2 = 0\ (C_1 \neq C_2)$，则这两条平行直线之间的距离为 $d = \frac{\lvert C_1 - C_2 \rvert}{\sqrt{A^2 + B^2}}$。	一般地，已知两条平行直线 $l_1: \alpha z + \overline{\alpha z} + C_1 = 0, l_2: \alpha z + \overline{\alpha z} + C_2 = 0\ (C_1 \neq C_2)$，则这两条平行直线之间的距离为 $d = \frac{\lvert C_1 - C_2 \rvert}{2\lvert\alpha\rvert}$。

Table 3. Circle
表 3. 圆

	平面直角坐标系	复平面
1. 圆的标准方程	以 $C(a,b)$ 为圆心，r 为半径的圆的方程为： $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2\ (r>0)$。	以 $z_0=a+ib$ 为圆心，r 为半径的圆的方程为： $(z-z_0)(\overline{z-z_0})=r^2\ (r>0)$ (即 $\|z-z_0\|=r\ (r>0)$)。
2. 点与圆的位置关系(根据点的坐标与圆的方程的关系判断)	根据点 $M(x_0,y_0)$ 的坐标与圆的方程 $(x-a)^2+(x-b)^2=r^2$ 的关系判断： (1) $(x_0-a)^2+(x_0-b)^2>r^2 \Leftrightarrow$ 点在圆外； (2) $(x_0-a)^2+(x_0-b)^2=r^2 \Leftrightarrow$ 点在圆上； (3) $(x_0-a)^2+(x_0-b)^2<r^2 \Leftrightarrow$ 点在圆内。	根据点 $z_1=x_1+iy_1$ 的坐标与圆的方程 $(z-z_0)(\overline{z-z_0})=r^2\ (\|z-z_0\|=r)$ 的关系判断： $(z-z_0)(\overline{z-z_0})>r^2\ (\|z_1-z_0\|>r) \Leftrightarrow$ 点在圆外； $(z-z_0)(\overline{z-z_0})=r^2\ (\|z_1-z_0\|=r) \Leftrightarrow$ 点在圆上； $(z-z_0)(\overline{z-z_0})<r^2\ (\|z_1-z_0\|<r) \Leftrightarrow$ 点在圆内。
3. 圆的一般方程	$A(x^2+y^2)+Bx+Dy+C=0\ (B^2+D^2>4AC)$	$Az\overline{z}+\alpha z+\overline{\alpha z}+C=0\ (A\neq 0,\|\alpha\|^2>AC)$
4. 直线于圆的位置关系		
(一) 代数判别法	已知直线方程 $Ax+By+C=0$，圆的方程 $(x-a)^2+(x-b)^2=r^2$ 联立两个方程，消元后得一元二次方程，计算判别式 Δ： $\Delta>0 \Leftrightarrow$ 直线与圆相交； $\Delta=0 \Leftrightarrow$ 直线与圆相切； $\Delta<0 \Leftrightarrow$ 直线与圆相离。	无法用判别式判别，方程在复数域上都有解。
(2) 几何法	已知圆心 $M(a,b)$ 到直线 $l: Ax+By+C=0\ (A^2+B^2\neq 0)$ 的距离 $d=\dfrac{\|Aa+Bb+C\|}{\sqrt{A^2+B^2}}$ (1) $d>r \Leftrightarrow$ 直线与圆相离； (2) $d=r \Leftrightarrow$ 直线与圆相切； (3) $d<r \Leftrightarrow$ 直线与圆相交。	已知圆心 $z_0=a+ib$ 到直线到直线 $\alpha z+\overline{\alpha z}+C=0\ (\alpha\in\mathbb{C}\setminus\{0\},C\in R)$ (其中 $\alpha=\frac{1}{2}(A-iB)$)的距离 $d=\dfrac{\alpha z_0+\overline{\alpha z_0}+C}{2\|\alpha\|}$ (1) $d>r \Leftrightarrow$ 直线与圆相交； (2) $d=r \Leftrightarrow$ 直线与圆相切； (3) $d<r \Leftrightarrow$ 直线与圆相离。
5. 圆的切线问题	(1) 经过圆 $(x-a)^2+(x-b)^2=r^2$ 上一点 $P(x_0,y_0)$ 的切线方程为 $(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)=r^2$。 (2) 经过圆 $A(x^2+y^2)+Bx+Dy+C=0$ 上一点 $P(x_0,y_0)$ 的切线方程为： $A(x_0x+y_0y)+B\dfrac{x+x_0}{2}+D\dfrac{y+y_0}{2}+C=0$。	(1) 经过圆 $(z-z_0)(\overline{z-z_0})=r^2$ 上一点 $z_1=x_1+y_1$ 的切线方程：$(z_1-z_0)(\overline{z-z_0})+(\overline{z_1-z_0})(z-z_0)=2r^2$。 (2) 经过圆 $A\overline{z}+\alpha z+\overline{\alpha z}+C=0\left(A\neq 0,\|\alpha\|^2>AC,\alpha=\frac{1}{2}(B-iD)\right)$ 上一点 $z_0=x_0+iy_0$ 的切线方程为： $A(z_0\overline{z}+\overline{z_0}z)+\alpha(z_0+z)+\overline{\alpha(z_0+z)}+2C=0$ $\left(A\neq 0,\|\alpha\|^2>AC,\alpha=\frac{1}{2}(B-iD)\right)$。
6. 弦长公式	直线 $l: y=kx+b$ 与圆交于 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$ 两点， 则弦长 $\|AB\|=\sqrt{1+k^2}\|x_1-x_2\|$。	直线 $l: \alpha z-\overline{\alpha}\overline{z}-2\beta=0$。(其中 $\alpha=1-ki,\beta=bi$)与圆交于 $z_1=x_1+iy_1,z_2=x_2+iy_2$ 两点，则弦长 $\|z_1z_2\|=\|\alpha\|\left\|\dfrac{(z_1-z_2)+\overline{z_1-z_2}}{2}\right\|$。
7. 圆与圆的位置关系	设两个圆的半径分别为 r，R，圆心之间的距离为 d (1) $d>r+R \Leftrightarrow$ 圆与圆外离； (2) $d=r+R \Leftrightarrow$ 圆与圆外切； (3) $\|R-r\|<d<R+r \Leftrightarrow$ 圆与圆相交； (4) $d=\|R-r\| \Leftrightarrow$ 圆与圆内切； (5) $0\le d<\|R-r\| \Leftrightarrow$ 圆与圆内含。	

Continued

8. 公共线方程	设两个圆为 $A_1\left(x^2+y^2\right)+B_1x+D_1y+C_1=0\left(B_1^2+D_1^2>4A_1C_1\right)$，$A_2\left(x^2+y^2\right)+B_2x+D_2y+C_2=0\left(B_2^2+D_2^2>4A_2C_2\right)$ 则这两个圆的公共弦方程为 $\left(B_1-B_2\right)x+\left(D_1-D_2\right)y+\left(C_1-C_2\right)=0$。	设两个圆为 $A_1z\bar{z}+\alpha_1z+\overline{\alpha_1z}+C_1=0\left(A_1\neq0,\left\|\alpha_1\right\|^2>A_1C_1\right)$，$A_2z\bar{z}+\alpha_2z+\overline{\alpha_2z}+C_2=0\left(A_2\neq0,\left\|\alpha_2\right\|^2>A_2C_2\right)$ 则这两个圆的公共弦方程为 $\left(\alpha_1-\alpha_2\right)z+\overline{\left(\alpha_1-\alpha_2\right)z}+\left(C_1-C_2\right)=0$。
9. 圆系方程	过两个已知圆 $A_1\left(x^2+y^2\right)+B_1x+D_1y+C_1=0\left(B_1^2+D_1^2>4A_1C_1\right)$，$A_2\left(x^2+y^2\right)+B_2x+D_2y+C_2=0\left(B_2^2+D_2^2>4A_2C_2\right)$ 的交点的圆系方程：$A_1\left(x^2+y^2\right)+B_1x+D_1y+C_1+\lambda\left(A_2\left(x^2+y^2\right)+B_2x+D_2y+C_2\right)=0$ $\left(B_k^2+D_k^2>4A_kC_k,k=1,2,\lambda\neq-1\right)$ $\lambda=-1$ 时，表示过两个圆交点的直线(两个圆同心则直线不存在)：1) 当两个圆相交时，为公共线所在的直线 2) 当两个圆相切时，为公切线 3) 当两个圆相离时，此直线为两个圆连心线垂直的直线 4) 过直线与圆的交点的圆系方程：$A_1\left(x^2+y^2\right)+B_1x+D_1y+C_1+\lambda\left(A_2x+B_2y+C_2\right)=0$ $\left(B_1^2+D_1^2>4A_1C_1,A_1^2+B_1^2\neq0\right)$	过两个已知圆 $A_1z\bar{z}+\alpha_1z+\overline{\alpha_1z}+C_1=0\left(A_1\neq0,\left\|\alpha_1\right\|^2>A_1C_1\right)$，$A_2z\bar{z}+\alpha_2z+\overline{\alpha_2z}+C_2=0\left(A_2\neq0,\left\|\alpha_2\right\|^2>A_2C_2\right)$ 的交点的圆系方程：$A_1z\bar{z}+\alpha_1z+\overline{\alpha_1z}+C_1+\lambda\left(A_2z\bar{z}+\alpha_2z+\overline{\alpha_2z}+C_2\right)=0$ $\left(A_k\neq0,\left\|\alpha_k\right\|^2>A_kC_k,\lambda\neq-1\right)$ $\lambda=-1$ 时，表示过两个圆交点的直线(两个圆同心则直线不存在)：1) 当两个圆相交时，为公共线所在的直线 2) 当两个圆相切时，为公切线 3) 当两个圆相离时，此直线为两个圆连心线垂直的直线 4) 过直线与圆的交点的圆系方程：$A_1z\bar{z}+\alpha_1z+\overline{\alpha_1z}+C_1+\lambda\left(\alpha_2z+\overline{\alpha_2z}+C_2\right)=0$ $\left(A_1\neq0,\left\|\alpha_1\right\|^2>A_1C_1\right)$ $\left(\alpha_2\in\mathbb{C}\setminus\{0\},\alpha_2=\frac{1}{2}\left(A_2-iB_2\right)\right)$

Table 4. Conic section
表 4. 圆锥曲线

	平面直角坐标系	复平面
一. 椭圆		
1. 椭圆的方程(以原点为中心)	A. 椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$ (焦点在 x 轴上) B. 椭圆的标准方程为 $\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$ (焦点在 y 轴上)	根据椭圆的几何意义：A. 设焦点在实轴上为 $F_1=c,F_2=-c$，$2a$ 为椭圆的长轴长度，则椭圆的方程为 $\|z-c\|+\|z+c\|=2a$ (焦点在实轴上) B. 设焦点在虚轴上为 $F_1=ic,F_2=-ic$，$2a$ 为椭圆的长轴长度，则椭圆的方程为 $\|z-ic\|+\|z+ic\|=2a$ (焦点在虚轴上) 根据椭圆的标准方程：A. $2Az\bar{z}-B\left(z^2+\bar{z}^2\right)=A^2-B^2\left(A>B>0\right)$ (焦点在实轴上) B. $2Az\bar{z}+B\left(z^2+\bar{z}^2\right)=A^2-B^2\left(A>B>0\right)$ (焦点在虚轴上)
2. 直线与椭圆的位置关系	设直线为：$y=kx+m$ 椭圆为：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (1) 直线与椭圆相交 $\Leftrightarrow b^2+a^2k^2-m^2>0$；(2) 直线与椭圆相切 $\Leftrightarrow b^2+a^2k^2-m^2=0$；(3) 直线与椭圆相离 $\Leftrightarrow b^2+a^2k^2-m^2<0$。	设直线为：$\alpha z-\bar{\alpha}\bar{z}-2\beta=0\left(\alpha=1-ki,\beta=mi\right)$ 椭圆为：$2Az\bar{z}-B\left(z^2+\bar{z}^2\right)=A^2-B^2\left(A=a^2+b^2,B=a^2-b^2\right)$ （1）直线与椭圆相交 $\Leftrightarrow 2\beta^2-\alpha\left(\alpha-2\right)\left(A+B\right)-2B>0$；(2) 直线与椭圆相切 $\Leftrightarrow 2\beta^2-\alpha\left(\alpha-2\right)\left(A+B\right)-2B>0$；(3) 直线与椭圆相离 $\Leftrightarrow 2\beta^2-\alpha\left(\alpha-2\right)\left(A+B\right)-2B<0$。
3. 直线与椭圆相交弦长	设直线 $y=kx+m$ 与椭圆的交点为 $P_1=\left(x_1,y_1\right),P_2=\left(x_2,y_2\right)$ 两点，则弦长为 $\left\|P_1P_2\right\|=\left\|x_1-x_2\right\|\sqrt{1+k^2}=\left\|y_1-y_2\right\|\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}$。	设直线 $\alpha z-\bar{\alpha}\bar{z}-2\beta=0\left(\alpha=1-ki,\beta=mi\right)$ 与椭圆的交点为 $z_1=x_1+iy_1,z_2=x_2+iy_2$ 两点，则弦长 $\left\|z_1z_2\right\|=\left\|\alpha\right\|\left\|\frac{\left(z_1-z_2\right)+\overline{z_1-z_2}}{2}\right\|$。

Continued

4. 中点弦	(1) 中点弦的斜率 AB 是弦，AB 的中点为 $P_0(x_0,y_0)$，则中点弦的斜率为 $k_{AB}=-\frac{b^2}{a^2}\frac{x_0}{y_0}$ $k_{AB}\cdot k_{OP}=-\frac{b^2}{a^2}$ (2) 中点弦所在直线方程 若 $P_0(x_0,y_0)$ 在椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 内，被 P_0 所平分的中点弦方程为 $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}$。	(1) 中点弦的斜率 AB 是弦，AB 的中点为 $z_0=x_0+iy_0$，则中点弦的斜率为 $k=\frac{(A-B)(z_0+\bar{z}_0)}{i(A+B)(z_0-\bar{z}_0)}$ $k_{AB}\cdot k_{OP}=-\frac{A-B}{A+B}$ (2) 中点弦所在直线方程 若 $z_0=x_0+iy_0$ 在椭圆 $2Az\bar{z}-B(z^2+\bar{z}^2)=A^2-B^2\ (A=a^2+b^2,B=a^2-b^2)$ 内， 则被 z_0 所平分的中点弦方程为 $\frac{(z_0+\bar{z}_0)(z+\bar{z}-z_0-\bar{z}_0)}{A+B}=\frac{(z_0-\bar{z}_0)(z-\bar{z}-z_0+\bar{z}_0)}{A-B}$。
5. 过椭圆上一点的切线方程	若 $P_0(x_0,y_0)$ 在椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上， 则过 P_0 的椭圆切线方程为 $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$。	若过点 z_0，且 z_0 在椭圆 $2Az\bar{z}-B(z^2+\bar{z}^2)=A^2-B^2\ (A=a^2+b^2,B=a^2-b^2)$ 上， 则过 z_0 的椭圆切线方程为 $\frac{(z_0+\bar{z}_0)(z+\bar{z})}{2(A+B)}-\frac{(z_0-\bar{z}_0)(z-\bar{z})}{2(A-B)}=1$。
6. 过椭圆外一点作椭圆的两条切线，切点弦所在的直线方程	若 $P_0(x_0,y_0)$ 在椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 外，过 P_0 作椭圆的两条切线，切点为 P_1,P_2，则切点弦 P_1P_2 的直线方程为 $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$。	若 z_0 在椭圆 $2Az\bar{z}-B(z^2+\bar{z}^2)=A^2-B^2\ (A=a^2+b^2,B=a^2-b^2)$ 外， 过 z_0 作椭圆的两条切线，切点为 z_1,z_2， 则切点弦所在直线方程为 $\frac{(z_0+\bar{z}_0)(z+\bar{z})}{2(A+B)}-\frac{(z_0-\bar{z}_0)(z-\bar{z})}{2(A-B)}=1$。
7. 过椭圆内定点的弦中点的轨迹方程	若 $P_0(x_0,y_0)$ 在椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 内，则过 P_0 的弦中点的轨迹方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}$。	若 z_0 在椭圆 $2Az\bar{z}-B(z^2+\bar{z}^2)=A^2-B^2\ (A=a^2+b^2,B=a^2-b^2)$ 内，则过 z_0 的弦中点的轨迹方程为 $\frac{(z+\bar{z})(z_0+\bar{z}_0-z-\bar{z})}{A+B}=\frac{(z-\bar{z})(z_0-\bar{z}_0-z+\bar{z})}{A-B}$。
二. 双曲线		
1. 双曲线的方程 (以原点为中心)	A. 双曲线的标准方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ (焦点在 x 轴上) B. 双曲线的标准方程为 $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$ (焦点在 y 轴上)	根据双曲线的几何意义： A. 设焦点在实轴上为 $F_1=c,F_2=-c$，$2a$ 为双曲线的实轴长度，则双曲线的方程为 $\lVert z-c\rvert-\lvert z+c\rVert=2a$ (焦点在实轴上) B. 设焦点在虚轴上为 $F_1=ic,F_2=-ic$，$2a$ 为双曲线的实轴长度，则双曲线的方程为 $\lVert z-ic\rvert-\lvert z+ic\rVert=2a$ (焦点在虚轴上) 根据双曲线的标准方程： A. $A(z^2+\bar{z}^2)-2Bz\bar{z}=A^2-B^2\ (A>B,A>0)$ (焦点在实轴上) B. $-A(z^2+\bar{z}^2)-2Bz\bar{z}=A^2-B^2\ (A>B,A>0)$ (焦点在虚轴上)

Continued

2. 直线与双曲线的位置关系	设直线为：$y=kx+m$ 双曲线为：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ (1) 直线与双曲线相交 $\Leftrightarrow b^2-a^2k^2+m^2>0$； (2) 直线与双曲线相切 $\Leftrightarrow b^2-a^2k^2+m^2=0$； (3) 直线与双曲线相离 $\Leftrightarrow b^2-a^2k^2+m^2<0$。	设直线为：$\alpha z-\overline{\alpha}\overline{z}-2\beta=0(\alpha=1-ki,\beta=mi)$ 双曲线为：$A(z^2+\overline{z}^2)-2Bz\overline{z}=A^2-B^2\ (A=a^2+b^2,B=a^2-b^2)$ (1) 直线与双曲线相交 $\Leftrightarrow \alpha(\alpha-2)(A+B)-2\beta^2+2A>0$； (2) 直线与双曲线相切 $\Leftrightarrow \alpha(\alpha-2)(A+B)-2\beta^2+2A=0$； (3) 直线与双曲线相离 $\Leftrightarrow \alpha(\alpha-2)(A+B)-2\beta^2+2A<0$。
3. 直线与双曲线相交弦长	设直线 $y=kx+m$ 与双曲线的交点为 $P_1=(x_1,y_1),P_2=(x_2,y_2)$ 两点，则弦长为 $\lvert P_1P_2\rvert=\lvert x_1-x_2\rvert\sqrt{1+k^2}=\lvert y_1-y_2\rvert\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}$。	设直线 $\alpha z-\overline{\alpha}\overline{z}-2\beta=0(\alpha=1-ki,\beta=mi)$ 与双曲线的交点为 $z_1=x_1+iy_1,z_2=x_2+iy_2$ 两点，则弦长 $\lvert z_1z_2\rvert=\lvert\alpha\rvert\left\lvert\frac{(z_1-z_2)+\overline{z_1-z_2}}{2}\right\rvert$。
4. 中点弦斜率公式	AB 是弦，中点为 $P(x_0,y_0)$，则中点弦的斜率为 $k_{AB}=\frac{b^2}{a^2}\frac{x_0}{y_0}$。	中点弦 AB 是弦，中点为 $z_0=x_0+iy_0$ $k=\frac{(A-B)(z_0+\overline{z_0})i}{(A+B)(z_0-\overline{z_0})}$。
5. 直线与双曲线相交交点问题	设直线 $y=kx+m$ 与双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$	设直线为：$\alpha z-\overline{\alpha}\overline{z}-2\beta=0(\alpha=i-ki,\beta=mi)$ 双曲线为：$A(z^2+\overline{z}^2)-2Bz\overline{z}=A^2-B^2\ (A=a^2+b^2,B=a^2-b^2)$
(1) 无交点	(1) $y=\pm\frac{a}{b}x$ (2) $x=0$	(1) $z-\overline{z}=\pm\sqrt{\frac{A+B}{A-B}}(z+\overline{z})i$ (2) $z+\overline{z}=0$
(2) 一个交点	1. $y=\frac{a}{b}x+m$ ($m\neq0$) $m>0$ 交左支 $m<0$ 交右支 2. $y=-\frac{a}{b}x+m$ ($m\neq0$) $m>0$ 交右支 $m<0$ 交左支 3. $x=\pm a$ 4. $b^2+m^2-a^2k^2=0$	1. $\alpha=1-\sqrt{\frac{A+B}{A-B}}i$ ($\beta\neq0$) $\beta>0$ 交右支 $\beta<0$ 交左支 2. $\alpha=1+\sqrt{\frac{A+B}{A-B}}i$ ($\beta\neq0$) $\beta>0$ 交左支 $\beta<0$ 交右支 3. $z+\overline{z}=\pm\sqrt{2(A+B)}$ 4. $(A+B)\alpha+2\beta^2-2B=0$
6. 点在双曲线上的切线方程问题	$P_0(x_0,y_0)$ 在 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 上，则过 P_0 的双曲线切线方程是 $\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1$。	$z_0=x_0+iy_0$ 在 $A(z^2+\overline{z}^2)-2Bz\overline{z}=A^2-B^2\ (A=a^2+b^2,B=a^2-b^2)$ 上，则过 z_0 的双曲线切线方程是 $(Az_0-B\overline{z_0})z+(A\overline{z_0}-Bz_0)\overline{z}=A^2-B^2$。
7. 点在双曲线外的切点弦方程问题	$P_0(x_0,y_0)$ 在 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 外，则过 P_0 的双曲线的两条切线，切点为 P_1,P_2，则切点弦 P_1P_2 直线方程为 $\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1$。	$z_0=x_0+iy_0$ 在 $A(z^2+\overline{z}^2)-2Bz\overline{z}=A^2-B^2\ (A=a^2+b^2,B=a^2-b^2)$ 外，则过 z_0 的双曲线的两条切线，切点为 z_1,z_2，则切点弦 z_1z_2 直线方程为 $(Az_0-B\overline{z_0})z+(A\overline{z_0}-Bz_0)\overline{z}=A^2-B^2$。
8. 点在双曲线内的弦长中点问题	$P_0(x_0,y_0)$ 在 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 内，则过 P_0 的双曲线的弦中点轨迹方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}$。	$z_0=x_0+iy_0$ 在,则过 z_0 的双曲线的弦中点轨迹方程为 $(Az_0-B\overline{z_0})z+(A\overline{z_0}-Bz_0)\overline{z}=2A(z^2+\overline{z}^2)-4Bz\overline{z}$。

Continued

三，抛物线		
1. 抛物线的方程(以原点为中心)	A. 抛物线的标准方程为 $y^2=2px(p>0)$ (焦点在 x 轴正半轴上) B. 抛物线的标准方程为 $y^2=-2px(p>0)$ (焦点在 x 轴负半轴上) C. 抛物线的标准方程为 $x^2=2py(p>0)$ (焦点在 y 轴正半轴上) D. 抛物线的标准方程为 $x^2=-2py(p>0)$ (焦点在 y 轴负半轴上) E. 抛物线的方程为 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$	(1) 根据抛物线的几何意义： A. 设焦点在实轴正半轴上为 $F=\frac{p}{2}$，则抛物线的方程为 $\lvert 2z-p\rvert=(z+\bar{z})+p$ B. 设焦点在实轴负半轴上为 $F=-\frac{p}{2}$，则抛物线的方程为 $\lvert 2z+p\rvert=p-(z+\bar{z})$ C. 设焦点在虚轴正半轴上为 $F=i\frac{p}{2}$，则抛物线的方程为 $\lvert 2z-ip\rvert=i(z-\bar{z}+p)$ D. 设焦点在虚轴负半轴上为 $F=-i\frac{p}{2}$，则抛物线的方程为 $\lvert 2z+ip\rvert=i(p-(z-\bar{z}))$ (2) 根据抛物线的标准方程： A. $(z-\bar{z})^2+4p(z+\bar{z})=0(p>0)$ (焦点在实轴正半轴上) B. $(z-\bar{z})^2-4p(z+\bar{z})=0(p>0)$ (焦点在实轴负半轴上) C. $(z+\bar{z})^2+4p(z-\bar{z})i=0(p>0)$ (焦点在虚轴正半轴上) D. $(z+\bar{z})^2-4p(z-\bar{z})i=0(p>0)$ (焦点在虚轴负半轴上) E. 抛物线方程为：$a(z+\bar{z})^2+4(b+i)z+4(b-i)\bar{z}+4c=0(a\neq 0)$
2. 点与抛物线的位置关系	设点 $p(x_0,y_0)$，抛物线为：$y^2=2px(p>0)$ (1) 点在抛物线内 $\Leftrightarrow y_0^2<2px_0(p>0)$； (2) 点在抛物线上 $\Leftrightarrow y_0^2=2px_0(p>0)$； (3) 点在抛物线外 $\Leftrightarrow y_0^2>2px_0(p>0)$。	设点 $z_0=x_0+iy_0$，抛物线为：$(z-\bar{z})^2+4p(z+\bar{z})=0(p>0)$ (1) 点在抛物线内 $\Leftrightarrow (z_0-\overline{z_0})^2+4p(z_0+\overline{z_0})>0(p>0)$； (2) 点在抛物线上 $\Leftrightarrow (z_0-\overline{z_0})^2+4p(z_0+\overline{z_0})=0(p>0)$； (3) 点在抛物线外 $\Leftrightarrow (z_0-\overline{z_0})^2+4p(z_0+\overline{z_0})<0(p>0)$。
3. 直线与抛物线的位置关系	设直线为：$y=kx+m$ 抛物线为：$y^2=2px(p>0)$ 1) 当 $k=0$ 时，直线与抛物线相交，有一个交点。 2) 当 $k\neq 0$ 时，分为以下三种情况： (1) 直线与抛物线相交(两个交点) $\Leftrightarrow p-2km>0$； (2) 直线与抛物线相切(一个交点) $\Leftrightarrow p-2km=0$； (3) 直线与抛物线相离(无交点) $\Leftrightarrow p-2km<0$。	设直线为：$\alpha z-\bar{\alpha}\bar{z}-2\beta=0(\alpha=1-ki,\beta=mi)$ 抛物线为：$(z-\bar{z})^2+4p(z+\bar{z})=0$ 1) 当 $\alpha=1$ 时，直线与抛物线相交，有一个交点。 2) 当 $\alpha\neq 1$ 时，分为以下三种情况： (1) 直线与抛物线相交(两个交点) $\Leftrightarrow p+2\beta(1-\alpha)>0$； (2) 直线与抛物线相切(一个交点) $\Leftrightarrow p+2\beta(1-\alpha)=0$； (3) 直线与抛物线相离(无交点) $\Leftrightarrow p+2\beta(1-\alpha)<0$。
4. 直线与抛物线相交弦长	设直线 $y=kx+m$ 与抛物线的交点为 $P_1=(x_1,y_1),P_2=(x_2,y_2)$ 两点，则弦长为 $\lvert P_1P_2\rvert=\lvert x_1-x_2\rvert\sqrt{1+k^2}=\lvert y_1-y_2\rvert\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}$。	设直线 $\alpha z-\bar{\alpha}\bar{z}-2\beta=0(\alpha=i-ki,\beta=mi)$ 与抛物线的交点为 $z_1=x_1+iy_1,z_2=x_2+iy_2$ 两点，则弦长 $\lvert z_1z_2\rvert=\lvert\alpha\rvert\left\lvert\frac{(z_1-z_2)+\overline{z_1-z_2}}{2}\right\rvert$。
5. 中点弦斜率公式	AB 是弦，中点为 $P(x_0,y_0)$，则中点弦的斜率为 $k_{AB}=\frac{p}{y_0}$。	中点弦 AB 是弦，中点为 $z_0=x_0+iy_0$ $k_{AB}=\frac{2pi}{z_0-\overline{z_0}}$。
6. 切线方程	设抛物线为 $y^2=2px(p>0)$ 则过抛物线上一点 $A(x_0,y_0)$ 的切线方程为 $y_0y=p(x+x_0)$。	设抛物线为 $(z-\bar{z})^2+4p(z+\bar{z})=0$ 则过抛物线上一点 $z_0=x_0+iy_0$ 的切线方程为 $(z-\bar{z})(z_0-\overline{z_0})+2p(z+\bar{z}+z_0+\overline{z_0})=0$。

Table 5. Parametric equations
表 5. 参数方程

	平面直角坐标系	复平面
1. 直线的参数方程	$\begin{cases} x = x_0 + t\cos\alpha \\ y = y_0 + t\sin\alpha \end{cases}$ (t 为参数)	$z = z_0 + tz_1\left(z_1 = \cos\alpha + i\sin\alpha, z_0 = x_0 + iy_0\right)$ (t 为参数)
2. 圆的参数方程	$\begin{cases} x = x_0 + R\cos\theta \\ y = y_0 + R\sin\theta \end{cases}\left(0 \le \theta \le 2\pi\right)$ (θ 为参数)	$z = z_0 + tR\left(t = \cos\theta + i\sin\theta, z_0 = x_0 + iy_0, 0 \le \theta \le 2\pi\right)$ (t 为参数)
3. 椭圆的参数方程	$\begin{cases} x = x_0 + a\cos\theta \\ y = y_0 + b\sin\theta \end{cases}\left(0 \le \theta \le 2\pi\right)$ (θ 为参数)	$z = z_0 + t\left(t = a\cos\theta + ib\sin\theta, z_0 = x_0 + iy_0, 0 \le \theta \le 2\pi\right)$ (t 为参数)
4. 双曲线的参数方程	$\begin{cases} x = x_0 + a\sec\theta \\ y = y_0 + b\tan\theta \end{cases}$ (θ 为参数)	$z = z_0 + t\left(t = a\sec\theta + ib\tan\theta, z_0 = x_0 + iy_0\right)$ (t 为参数)
5. 抛物线的参数方程	$\begin{cases} x = 2pt^2 \\ y = 2pt \end{cases}$ (t 为参数)	$z = 2pz_0\left(z_0 = t^2 + it\right)$ (z_0 为参数)

Table 6. Vector
表 6. 向量

	平面直角坐标系	复平面
$\boldsymbol{AB}$	$\left(x_2 - x_1, y_2 - y_1\right)$	$z_2 - z_1$
$\lvert AB \rvert$	$\sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2}$	$\sqrt{\left(z_2 - z_1\right)\left(\overline{z_2} - \overline{z_1}\right)}$
$\boldsymbol{OA} \cdot \boldsymbol{OB}$	$x_1x_2 + y_1y_2$	$\dfrac{z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2}{2}$
$\cos\langle \boldsymbol{OA}, \boldsymbol{OB} \rangle$	$\dfrac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$	$\dfrac{z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2}{2\sqrt{z_1\overline{z_1}}\sqrt{z_2\overline{z_2}}}$

Table 7. Collinearity issues
表 7. 共线问题

	平面直角坐标系	复平面
1. 三点共线(一)	$\left(x_1, y_1\right), \left(x_2, y_2\right), \left(x_3, y_3\right)$ 三点共线 $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$	$z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2, z_3 = x_3 + iy_3$ 三点共线 $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ \overline{z_1} & \overline{z_2} & \overline{z_3} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$
2. 三点共线(二)	三点 A, B, C 共线的充分必要条件是存在不全为零的实数 λ, μ, γ 使得 $\lambda\boldsymbol{OA} + \mu\boldsymbol{OB} + \gamma\boldsymbol{OC} = 0\left(\lambda + \mu + \gamma = 0\right)$ (其中 O 为任取的一点)	三点 z_1, z_2, z_3 共线的充分必要条件是存在不全为零的实数 λ, μ, γ 使得 $\lambda z_1 + \mu z_2 + \gamma z_3 = 0\left(\lambda + \mu + \gamma = 0\right)$
3. 点在已知两点的直线上的充分必要条件	点 M 在直线 AB 上的充要条件是存在实数 λ, μ，使得 $\boldsymbol{OM} = \lambda\boldsymbol{OA} + \mu\boldsymbol{OB}\left(\lambda + \mu = 1\right)$	点 z 在直线 z_1z_2 上的充要条件是存在实数 λ, μ，使得 $z = \lambda z_1 + \mu z_2\left(\lambda + \mu = 1\right)$