Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2022, 11(8), 5062-5073
Published Online August 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2022.118531

Hans汉斯

一类非奇异H-矩阵的细分迭代判别算法

董　杰，庹　清*，谢智慧

吉首大学数学与统计学院，湖南　吉首

收稿日期：2022年7月1日；录用日期：2022年7月27日；发布日期：2022年8月4日

摘　要

非奇异H-矩阵是一类应用广泛的特殊矩阵，在许多领域都发挥着重要作用。本文就非奇异H-矩阵的判定问题，利用细分区间和迭代系数构造正对角矩阵因子，得到了一类非奇异H-矩阵的细分迭代判别新条件。在此基础上，又相应给出了一组含参数ε的判定非奇异H-矩阵的细分迭代算法，并证明了其收敛性，推广与改进了近期的一些结果。最后，用数值算例说明了该算法的优越性。

关键词

非奇异H-矩阵，细分迭代判别算法，收敛性

Subdivision Iterative Discriminant Algorithm for a Class of Nonsingular H-Matrix

Jie Dong, Qing Tuo*, Zhihui Xie

College of Mathematics and Statistics, Jishou University, Jishou Hunan

Received: Jul. 1st, 2022; accepted: Jul. 27th, 2022; published: Aug. 4th, 2022

Abstract

Nonsingular H-matrices are a kind of special matrices which are widely used in many fields. In this paper, we consider the problem of determining nonsingular H-matrices, construct a positive diagonal matrix factor by using the subdivision interval and iterative coefficient, and obtain a new condition for determining the subdivision iteration of a class of nonsingular H-matrices. On this basis, a set of subdivision iterative algorithms for determining nonsingular H-matrices with pa-

*通讯作者。

文章引用: 董杰, 庹清, 谢智慧. 一类非奇异 H-矩阵的细分迭代判别算法[J]. 应用数学进展, 2022, 11(8): 5062-5073.
DOI: 10.12677/aam.2022.118531

rameters ε are given, and their convergence is proved. Some recent results are extended and improved. Finally, numerical examples are used to illustrate the superiority of the algorithm.

Keywords

Nonsingular *H*-Matrix, Subdivision Iterative Discriminant Algorithm, Convergence

1. 引言

矩阵理论是研究者用来解决实际问题的一种重要工具，而非奇异 H-矩阵作为重要的一类特殊矩阵，经过众多学者对其的深入研究(见文献[1]-[11])，非奇异 H-矩阵的判定条件已取得了一系列重要成果，但对于高阶矩阵的判定还存在困难。而随着计算机的普及，关于非奇异 H-矩阵不少的判定算法也逐渐被提出，这在一定程度上提高了非奇异 H-矩阵的判定效率。其中，文献[1]根据文献[3]的迭代判定条件给出了相应的含参数 ε 的迭代算法，且在此基础上，进一步减小迭代因子序列后，又得到了另一组迭代次数和迭代时间更少的判定算法。文献[2]通过对方阵行下标集和行不同的递进式划分，得到了一组无参数的迭代判定算法。而本文利用文献[2]的思路，并通过进一步细分区间和构造新的迭代因子序列的方式，得到比文献[1] [2]更小的正对角矩阵因子，进而给出一组迭代次数更少，迭代效率更高的细分迭代判定新条件以及迭代判定新算法，推广和改进了已有的一些相关结论。

记 $C^{n\times n}$ 表示 $n\times n$ 阶复矩阵集合，设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$，$N=\{1,2,\cdots,n\}$，$Z=\{0,1,2,\cdots\}$，$Z^{+}=\{1,2,\cdots\}$。记

$$\Lambda_i=\Lambda_i(A)=\sum_{j\neq i}|a_{ij}|,\quad i,j\in N,$$

$$\tilde{N}_1=\{i\in N:0<|a_{ii}|\le\Lambda_i(A)\},\ \tilde{N}_2=\{i\in N:|a_{ii}|>\Lambda_i(A)\},$$

$$\alpha_i=\alpha_i(A)=\sum_{t\in\tilde{N}_1,t\neq i}|a_{it}|,\ \beta_i=\beta_i(A)=\sum_{t\in\tilde{N}_2,t\neq i}|a_{it}|,\quad i\in N.$$

定义 1 [3]设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$，如果 $|a_{ii}|>\Lambda_i(A),i\in N$，则称 A 为严格对角占优矩阵，记作 $A\in D$。若存在正对角矩阵 X，使得 $AX\in D$，则称 A 为广义严格对角占优矩阵，也称为非奇异 H-矩阵，记作 $A\in D^{*}$。

引理 1 [2]设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$，如果存在 $\tilde{N}_1,\tilde{N}_2$ 使得 $\tilde{N}_1\cup\tilde{N}_2=N,\tilde{N}_1\cap\tilde{N}_2=\phi$ 及

$$(|a_{ii}|-\alpha_i(A))(|a_{jj}|-\beta_j(A))>\beta_i(A)\alpha_j(A),\ i\in\tilde{N}_1,j\in\tilde{N}_2,$$

则 A 为非奇异 H-矩阵。

在本文中假设 $|a_{ii}|\neq 0,\Lambda_i(A)\neq 0,i\in N$，规定 $\sum_{t\in\phi}\bullet=0$，并记

$$N_1=\{i\in N:0<|a_{ii}|<\Lambda_i(A)\},\ N_2=\{i\in N:|a_{ii}|=\Lambda_i(A)\},\ N_3=\{i\in N:|a_{ii}|>\Lambda_i(A)\},$$

则 $N=N_1+N_2+N_3$，由 $N_1=N_1^{(1)}\cup N_1^{(2)}\cup\cdots\cup N_1^{(m)}$，其中

$$N_1^{(1)}=\left\{i\in N:0<\left|a_{ii}\right|<\frac{1}{m}\Lambda_i\left(A\right)\right\},$$

$$N_{1k}=\left\{i\in N:\frac{k-1}{m}\Lambda_i\left(A\right)\le\left|a_{ii}\right|<\frac{k}{m}\Lambda_i\left(A\right)\right\},\ k=2,3,\cdots,m,$$

其中，$N_1^{(k)}$ 可能为空集。

引理 2 [5]设 $A=\left(a_{ij}\right)\in C^{n\times n}$，如果 $A\in D^*$，则 $N_3\ne\phi$ 且 $\left|a_{ii}\right|\ne 0\left(i\in N\right)$。

引理 3 [5]设 $A=\left(a_{ij}\right)\in C^{n\times n}$，如果 $A\in D^*$，则 $\left|a_{ii}\right|>0\left(i\in N\right)$ 且 $N_1=\phi$。

若 $N_1\cup N_2$ 为空集，则 A 为非奇异 H-矩阵。若 N_3 为空集，则 A 不是非奇异 H-矩阵。因此，本文总假设 $N_1\cup N_2$ 不为空集，N_3 也不为空集。

张万智等在 2016 年提出一组非奇异 H-矩阵的迭代判别算法：

算法 1.1 [1]给定矩阵 $A=\left(a_{ij}\right)\in C^{n\times n}$。

1) 如果存在 $i_0\in N$ 使得 $\left|a_{i_0i_0}\right|=0$，则 $A\notin D^*$，停止；否则

2) 令 $\tilde{y}=1, A^{(0)}=A, X_1^{(0)}=I$；

3) 计算 $A^{(\tilde{y})}=\left(a_{it}^{(\tilde{y})}\right)=A^{(\tilde{y}-1)}X_1^{(\tilde{y}-1)}$；

4) 如果 $\tilde{N}_2\left(A^{(\tilde{y})}\right)=\phi$，则 $A\notin D^*$，停止；如果 $\tilde{N}_2\left(A^{(\tilde{y})}\right)=N$，则 $A\in D^*$，停止；否则

5) 计算

$$\lambda_0^{(\tilde{y})}=1,\ \psi_i^{(\tilde{y})}=\frac{\sum\limits_{t\in\tilde{N}_1\left(A^{(\tilde{y})}\right)}\left|a_{it}^{(\tilde{y})}\right|}{\left|a_{ii}^{(\tilde{y})}\right|-\sum\limits_{t\in\tilde{N}_2\left(A^{(\tilde{y})}\right),t\ne i}\left|a_{it}^{(\tilde{y})}\right|},\ \lambda_1^{(\tilde{y})}=\max_{i\in\tilde{N}_2\left(A^{(\tilde{y})}\right)}\frac{\sum\limits_{t\in\tilde{N}_1\left(A^{(\tilde{y})}\right)}\left|a_{it}^{(\tilde{y})}\right|}{\left|a_{ii}^{(\tilde{y})}\right|-\sum\limits_{t\in\tilde{N}_2\left(A^{(\tilde{y})}\right),t\ne i}\left|a_{it}^{(\tilde{y})}\right|},$$

$$\lambda_{l+1}^{(\tilde{y})}=\max_{i\in\tilde{N}_2\left(A^{(\tilde{y})}\right)}\delta_{l+1}^{(\tilde{y})}\left(l\in Z^+\right),$$

$$\delta_{l+1,i}^{(\tilde{y})}=\frac{\sum\limits_{t\in\tilde{N}_1\left(A^{(\tilde{y})}\right)}\left|a_{it}^{(\tilde{y})}\right|+\lambda_l^{(\tilde{y})}\sum\limits_{t\in\tilde{N}_2\left(A^{(\tilde{y})}\right),t\ne i}\left|a_{it}^{(\tilde{y})}\right|}{\left|a_{ii}^{(\tilde{y})}\right|}\left(i\in\tilde{N}_2\left(A^{(\tilde{y})}\right),l\in Z\right);$$

6) 取定非负整数 l 和实数 $s\ge 1$。令 $X_1^{(\tilde{y})}=diag\left(x_1^{(\tilde{y})},x_2^{(\tilde{y})},\cdots,x_n^{(\tilde{y})}\right)$，其中

$$x_i^{(\tilde{y})}=\begin{cases}1 & \left(i\in\tilde{N}_1\left(A^{(\tilde{y})}\right)\right),\\ \delta_{l+1,i}^{(\tilde{y})}+\varepsilon_0^{(\tilde{y})} & \left(i\in\tilde{N}_2\left(A^{(\tilde{y})}\right)\right),\end{cases}$$

这里当 $\psi_i^{(\tilde{y})}>\delta_{l+1,i}^{(\tilde{y})}\left(i\in\tilde{N}_2\left(A^{(\tilde{y})}\right)\right)$ 时 $\varepsilon_0^{(\tilde{y})}=\frac{1}{s}\min\limits_{i\in\tilde{N}_2\left(A^{(\tilde{y})}\right)}\left(\psi_i^{(\tilde{y})}-\delta_{l+1,i}^{(\tilde{y})}\right)$，其余情形 $\varepsilon_0^{(\tilde{y})}=\sigma_1$，$\sigma_1$ 是充分小的正实数；

7) 取 $\tilde{y}=\tilde{y}+1$ 转 3。

2. 主要结果

为了叙述方便，进一步引入以下记号：

$$x_{1i,k}=\frac{\left|a_{ii}\right|-\frac{k-1}{m+1}\Lambda_i\left(A\right)}{\Lambda_i\left(A\right)}\ \left(i\in N_{1k},k=1,2,\cdots,m\right),$$

$$x_{2i}=\frac{\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{t\in N_{1k}}|a_{it}|x_{1t,k}\right)+\sum_{t\in N_2,t\neq i}|a_{it}|+\sum_{t\in N_3}|a_{it}|}{|a_{ii}|}\ (i\in N_2),$$

$$r_0=1,\ r_1=\max_{i\in N_3}\left\{\frac{\sum_{t\in N_1}|a_{it}|+\sum_{t\in N_2}|a_{it}|}{|a_{ii}|-\sum_{t\in N_3,t\neq i}|a_{it}|}\right\},$$

$$r_{l+1}=\max_{i\in N_3}\left\{\frac{\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{t\in N_{1k}}|a_{it}|x_{1t,k}\right)+\sum_{t\in N_2}|a_{it}|x_{2t}+r_l\sum_{t\in N_3,t\neq i}|a_{it}|}{|a_{ii}|}\right\}(l\in Z^+),$$

$$P_{l+1,i}(A)=\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{t\in N_{1k}}|a_{it}|x_{1t,k}\right)+\sum_{t\in N_2}|a_{it}|x_{2t}+r_l\sum_{t\in N_3,t\neq i}|a_{it}|\ (i\in N_3,l\in Z),$$

$$W_{l+1,i}(A)=\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{t\in N_{1k}}|a_{it}|x_{1t,k}\right)+\sum_{t\in N_2}|a_{it}|x_{2t}+\sum_{t\in N_3,t\neq i}\frac{P_{l+1,t}(A)}{|a_{tt}|}|a_{it}|\ (i\in N_3,l\in Z),$$

$$h_{l+1,i}(A)=\frac{\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{t\in N_{1k}}|a_{it}|x_{1t,k}\right)+\sum_{t\in N_2}|a_{it}|x_{2t}}{W_{l+1,i}(A)-\sum_{t\in N_3,t\neq i}\frac{W_{l+1,t}(A)}{|a_{tt}|}|a_{it}|}\ (i\in N_3,l\in Z).$$

定理 1 设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$，若存在 $l\in Z$，有

$$\begin{aligned}&\left(W_{l+1,j}(A)-\sum_{t\in N_3,t\neq j}\frac{W_{l+1,t}(A)}{|a_{tt}|}|a_{jt}|\right)\left(|a_{ii}|x_{1i,k}-\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{t\in N_{1k},t\neq i}|a_{it}|x_{1t,k}\right)-\sum_{t\in N_2}|a_{it}|x_{2t}\right)\\&>\left(\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{t\in N_{1k}}|a_{jt}|x_{1t,k}\right)+\sum_{t\in N_2}|a_{jt}|x_{2t}\right)\left(\sum_{t\in N_3}\frac{W_{l+1,t}(A)}{|a_{tt}|}|a_{it}|\right),\quad i\in N_{1k},\ k=1,2,\cdots,m,\ j\in N_3.\end{aligned}\tag{1}$$

且当 $i\in N_2$ 时，$\sum_{t\in N_1}|a_{it}|$ 与 $\sum_{t\in N_3}|a_{it}|$ 不能同时为 0，则 A 是非奇异 H-矩阵。

证明 由 r_1 的表达式和(1)式可得，对任意的 $i\in N_3$，$\sum_{t\in N_1}|a_{it}|$ 与 $\sum_{t\in N_2}|a_{it}|$ 不能同时为 0。因为，如果 $\sum_{t\in N_1}|a_{it}|+\sum_{t\in N_2}|a_{it}|=0$，则对任意的 $i\in N_3$，有 $r_1=0$，再由 r_{l+1} 的定义式可知，对任意的 $l\in Z$，都有 $r_{l+1}=0$，所以也便有 $P_{l+1,i}(A)=0,W_{l+1,i}(A)=0$，这样会使不等式(1)的两边同时为 0，故产生矛盾。

显然 $r_1<1$，又对任意的 $i\in N_{1k},k=1,2,\cdots,m$，有 $0<x_{1i}^{(k)}<1$；对任意的 $i\in N_2$，有 $0<x_{2i}\le 1$；则结合数学归纳法可得到

$$\frac{P_{l+1,i}(A)}{|a_{ii}|}\le r_{l+1}\le r_l\le\cdots\le r_1<r_0=1,\quad \frac{W_{l+1,i}(A)}{|a_{ii}|}\le\frac{P_{l+1,i}(A)}{|a_{ii}|},\quad i\in N_3,l\in Z.\tag{2}$$

故对任意的 $i\in N_3$ 有

$$h_{l+1,i}(A)=\frac{\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{t\in N_{1k}}|a_{it}|x_{1t,k}\right)+\sum_{t\in N_2}|a_{it}|x_{2t}}{W_{l+1,i}(A)-\sum_{t\in N_3,t\neq i}\frac{W_{l+1,t}(A)}{|a_{tt}|}|a_{it}|}=\frac{W_{l+1,i}(A)-\sum_{t\in N_3,t\neq i}\frac{P_{l+1,t}(A)}{|a_{tt}|}|a_{it}|}{W_{l+1,i}(A)-\sum_{t\in N_3,t\neq i}\frac{W_{l+1,t}(A)}{|a_{tt}|}|a_{it}|}\le 1.$$

根据 $h_{l+1,j}(A)$ 的表达式及(1)式知，对任意的 $i\in N_{1k},k=1,2,\cdots,m,j\in N_3$ 有

$$|a_{ii}|x_{1i,k}>\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{t\in N_{1k},t\neq i}|a_{it}|x_{1t,k}\right)+\sum_{t\in N_2}|a_{it}|x_{2t}+h_{l+1,j}(A)\sum_{t\in N_3}\frac{W_{l+1,t}(A)}{|a_{tt}|}|a_{it}|,$$

又 $h_{l+1,j}(A)\le 1$，故而得到

$$|a_{ii}|x_{1i,k}>\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{t\in N_{1k},t\neq i}|a_{it}|x_{1t,k}\right)+\sum_{t\in N_2}|a_{it}|x_{2t}+\sum_{t\in N_3}\frac{W_{l+1,t}(A)}{|a_{tt}|}|a_{it}|,$$

进一步可取得充分小的 $\varepsilon>0$，使 $0<\frac{W_{l+1,i}(A)}{|a_{ii}|}+\varepsilon<1$，并满足

$$|a_{it}|x_{1i,k}-\left[\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{t\in N_{1k},t\neq i}|a_{it}|x_{1t,k}\right)+\sum_{t\in N_2}|a_{it}|x_{2t}+\sum_{t\in N_3}\frac{W_{l+1,t}(A)}{|a_{tt}|}|a_{it}|\right]>\varepsilon\sum_{t\in N_3}|a_{it}|,$$

故而有

$$|a_{it}|x_{1i,k}-\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{t\in N_{1k},t\neq i}|a_{it}|x_{1t,k}\right)-\sum_{t\in N_2}|a_{it}|x_{2t}>\sum_{t\in N_3}\left(\frac{W_{l+1,t}(A)}{|a_{tt}|}+\varepsilon\right)|a_{it}|. \tag{3}$$

可构造正对角矩阵 $X_1=diag(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，记 $B=AX_1=(b_{ij})$，其中

$$x_i=\begin{cases}x_{1i,k} & i\in N_{1k},k=1,2,\cdots,m,\\ x_{2i} & i\in N_2,\\ \frac{W_{l+1,i}(A)}{|a_{ii}|}+\varepsilon & i\in N_3.\end{cases}$$

再由 $h_{l+1,j}(A)\le 1$ 可得到，对任意的 $j\in N_3,l\in Z$ 有

$$W_{l+1,j}(A)-\sum_{t\in N_3,t\neq j}\frac{W_{l+1,t}(A)}{|a_{tt}|}|a_{jt}|\ge\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{t\in N_{1k}}|a_{jt}|x_{1t,k}\right)+\sum_{t\in N_2}|a_{jt}|x_{2t},$$

又对任意的 $j\in N_3$，有 $|a_{jj}|>\sum_{t\in N_3,t\neq j}|a_{jt}|$，所以得到

$$W_{l+1,j}(A)-\sum_{t\in N_3,t\neq j}\frac{W_{l+1,t}(A)}{|a_{tt}|}|a_{jt}|+\left(\varepsilon|a_{jj}|-\varepsilon\sum_{t\in N_3,t\neq i}|a_{jt}|\right)>\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{t\in N_{1k}}|a_{jt}|x_{1t,k}\right)+\sum_{t\in N_2}|a_{jt}|x_{2t},$$

即有

$$W_{l+1,j}(A)+\varepsilon|a_{jj}|-\sum_{t\in N_3,t\neq j}\left(\frac{W_{l+1,t}(A)}{|a_{tt}|}+\varepsilon\right)|a_{jt}|>\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{t\in N_{1k}}|a_{jt}|x_{1t,k}\right)+\sum_{t\in N_2}|a_{jt}|x_{2t}. \tag{4}$$

1) 由(3)式和(4)式知，对任意的 $i\in N_{1k},k=1,2,\cdots,m,j\in N_3,l\in Z$ 有

$$\begin{aligned}&\left(|b_{jj}|-\beta_j(B)\right)\left(|b_{ii}|-\alpha_i(B)\right)\\&=\left(W_{l+1,j}(A)+\varepsilon|a_{jj}|-\sum_{t\in N_3,t\neq j}\left(\frac{W_{l+1,t}(A)}{|a_{tt}|}+\varepsilon\right)|a_{jt}|\right)\left(|a_{ii}|x_{1i,k}-\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{t\in N_{1k},t\neq i}|a_{ii}|x_{1t,k}\right)-\sum_{t\in N_2}|a_{it}|x_{2t}\right)\\&>\left(\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{t\in N_{1k}}|a_{jt}|x_{1t,k}\right)+\sum_{t\in N_2}|a_{jt}|x_{2t}\right)\left(\sum_{t\in N_3}\left(\frac{W_{l+1,t}(A)}{|a_{tt}|}+\varepsilon\right)|a_{it}|\right)=\alpha_j(B)\beta_i(B).\end{aligned}$$

2) 根据 x_{2i} 的表达式可知，对任意的 $i \in N_2$ 有

$$\begin{aligned}|a_{ii}|x_{2i} &= \sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{t\in N_{1k}}|a_{it}|x_{1t,k}\right)+\sum_{t\in N_2,t\neq i}|a_{it}|+\sum_{t\in N_3}|a_{it}| \\ &> \sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{t\in N_{1k}}|a_{it}|x_{1t,k}\right)+\sum_{t\in N_2,t\neq i}|a_{it}|x_{2t}+\sum_{t\in N_3}\left(\frac{W_{l+1,t}(A)}{|a_{tt}|}+\varepsilon\right)|a_{it}|,\end{aligned} \tag{5}$$

由(4)式和(5)式可知，对任意的 $i \in N_2, j \in N_3, l \in Z$ 有

$$\begin{aligned}&\left(|b_{jj}|-\beta_j(B)\right)\left(|b_{ii}|-\alpha_i(B)\right) \\ &=\left(W_{l+1,j}(A)+\varepsilon|a_{jj}|-\sum_{t\in N_3,t\neq j}\left(\frac{W_{l+1,t}(A)}{|a_{tt}|}+\varepsilon\right)|a_{jt}|\right)\left(|a_{ii}|x_{2i}-\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{t\in N_{1k}}|a_{ii}|x_{1t,k}\right)-\sum_{t\in N_2,t\neq i}|a_{it}|x_{2t}\right) \\ &>\left(\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{t\in N_{1k}}|a_{jt}|x_{1t,k}\right)+\sum_{t\in N_2}|a_{jt}|x_{2t}\right)\left(\sum_{t\in N_3}\left(\frac{W_{l+1,t}(A)}{|a_{tt}|}+\varepsilon\right)|a_{it}|\right)=\alpha_j(B)\beta_i(B).\end{aligned}$$

3) 由 $W_{l+1,i}(A)$ 的表达式及 $W_{l+1,i}(A) \le P_{l+1,i}(A)$ 可知，对任意的 $i \in N_3, l \in Z$ 有

$$W_{l+1,i}(A) \ge \sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{t\in N_{1k}}|a_{it}|x_{1t,k}\right)+\sum_{t\in N_2}|a_{it}|x_{2t}+\sum_{t\in N_3,t\neq i}\frac{W_{l+1,t}(A)}{|a_{tt}|}|a_{it}|,$$

又对任意的 $i \in N_3$，有 $|a_{ii}| > \sum_{t\in N_3,t\neq i}|a_{it}|$，所以得到

$$W_{l+1,i}(A)+\varepsilon|a_{ii}| > \sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{t\in N_{1k}}|a_{it}|x_{1t,k}\right)+\sum_{t\in N_2}|a_{it}|x_{2t}+\sum_{t\in N_3,t\neq i}\frac{W_{l+1,t}(A)}{|a_{tt}|}|a_{it}|+\varepsilon\sum_{t\in N_3,t\neq i}|a_{it}|,$$

故有

$$\left(\frac{W_{l+1,i}(A)}{|a_{ii}|}+\varepsilon\right)|a_{ii}| > \sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{t\in N_{1k}}|a_{it}|x_{1t,k}\right)+\sum_{t\in N_2}|a_{it}|x_{2t}+\sum_{t\in N_3,t\neq i}\left(\frac{W_{l+1,t}(A)}{|a_{tt}|}+\varepsilon\right)|a_{it}|, \tag{6}$$

由(4)式和(6)式可知，对任意的 $i \in N_3, j \in N_3, l \in Z$ 有

$$\begin{aligned}&\left(|b_{jj}|-\beta_j(B)\right)\left(|b_{ii}|-\alpha_i(B)\right) \\ &=\left(W_{l+1,j}(A)+\varepsilon|a_{jj}|-\sum_{t\in N_3,t\neq j}\left(\frac{W_{l+1,t}(A)}{|a_{tt}|}+\varepsilon\right)|a_{jt}|\right)\left(|a_{ii}|\left(\frac{W_{l+1,i}(A)}{|a_{ii}|}+\varepsilon\right)-\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{t\in N_{1k}}|a_{ii}|x_{1t,k}\right)-\sum_{t\in N_2}|a_{it}|x_{2t}\right) \\ &>\left(\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{t\in N_{1k}}|a_{jt}|x_{1t,k}\right)+\sum_{t\in N_2}|a_{jt}|x_{2t}\right)\left(\sum_{t\in N_3,t\neq i}\left(\frac{W_{l+1,t}(A)}{|a_{tt}|}+\varepsilon\right)|a_{it}|\right)=\alpha_j(B)\beta_i(B).\end{aligned}$$

即

$$\left(|b_{ii}|-\alpha_i(B)\right)\left(|b_{jj}|-\beta_j(B)\right) > \beta_i(B)\alpha_j(B), \quad i \in N_1 \cup N_2, j \in N_3,$$

且

$$\left(|b_{ii}|-\alpha_i(B)\right)\left(|b_{jj}|-\beta_j(B)\right) > \beta_i(B)\alpha_j(B), \quad i \in N_3, j \in N_3.$$

综上所述，由引理 1 知 $B = AX_1 \in D^*$。故存在正对角矩阵 X_2 使得 $BX_2 = AX_1X_2 \in D$，而 X_1X_2 仍是正对角矩阵，所以 $A \in D^*$。证毕。

由上述判定定理条件得到下面新的算法 2.1。

算法 2.1

输入：矩阵 $A=\left(a_{ij}\right)\in C^{n\times n}$，给定 m,q,σ_2。

输出：$X^{(y)}=diag\left(x_i^{(y)}\right)$，若 A 是非奇异 H-矩阵。

1) 如果 $N_3\left(A\right)=\phi$ 或存在 $i_0\in N\left(A\right)$ 使得 $\left|a_{i_0i_0}\right|=0$，则 $A\notin D^*$，停止；否则转 2；

2) 取 $y=1, A^{(0)}=A, X^{(0)}=I$；

3) 计算 $A^{(y)}=A^{(y-1)}X^{(y-1)}=\left(a_{it}^{(y)}\right)$；

4) 取 $l=1$，计算 $\Lambda_i\left(A^{(y)}\right)=\sum_{t\neq i}\left|a_{it}^{(y)}\right|$；

5) 如果 $\left|a_{ii}^{(y)}\right|>\Lambda_i\left(A^{(y)}\right)$，则 $i\in N_3\left(A^{(y)}\right)$；否则转 6；

6) 如果 $\left|a_{ii}^{(y)}\right|=\Lambda_i\left(A^{(y)}\right)$，则 $i\in N_2\left(A^{(y)}\right)$；否则转 7；

7) 取 $k\in\left[1,m\right]$，如果 $\frac{k-1}{m}\Lambda_i\left(A^{(y)}\right)<\left|a_{ii}^{(y)}\right|<\frac{k}{m}\Lambda_i\left(A^{(y)}\right)$，则 $i\in N_{1k}\left(A^{(y)}\right)$；

8) 令 $N_1\left(A^{(y)}\right)=\bigcup_{k=1}^{m}N_{1k}\left(A^{(y)}\right)$，如果 $N_1\left(A^{(y)}\right)\cup N_2\left(A^{(y)}\right)=\phi$，则 $A\in D^*$，停止；否则转 9；

9) 如果 $N_3\left(A^{(y)}\right)=\phi$，则 $A\notin D^*$，停止；否则转 10；

10) 计算

$$x_{1i,k}^{(y)}=\frac{\left|a_{ii}^{(y)}\right|-\frac{k-1}{m+1}\Lambda_i\left(A^{(y)}\right)}{\Lambda_i\left(A^{(y)}\right)}\quad\left(i\in N_{1k}\left(A^{(y)}\right),k=1,2,\cdots,m\right),$$

$$\alpha_i^{(y)}=\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{t\in N_{1k}\left(A^{(y)}\right),t\neq i}\left|a_{it}^{(y)}\right|\right),\qquad \bar{\alpha}_i^{(y)}=\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{t\in N_{1k}\left(A^{(y)}\right),t\neq i}\left|a_{it}^{(y)}\right|x_{1t,k}^{(y)}\right),$$

$$\beta_i^{(y)}=\sum_{t\in N_2\left(A^{(y)}\right),t\neq i}\left|a_{it}^{(y)}\right|,\qquad \bar{\beta}_i^{(y)}=\sum_{t\in N_2\left(A^{(y)}\right),t\neq i}\left|a_{it}^{(y)}\right|x_{2t}^{(y)},$$

$$\mu_i^{(y)}=\sum_{t\in N_3\left(A^{(y)}\right),t\neq i}\left|a_{it}^{(y)}\right|,$$

$$x_{2i}^{(y)}=\frac{\bar{\alpha}_i^{(y)}+\beta_i^{(y)}+\mu_i^{(y)}}{\left|a_{ii}^{(y)}\right|}\quad\left(i\in N_2\left(A^{(y)}\right)\right);$$

11) 取 $r_0^{(y)}=1$，计算

$$r_1^{(y)}=\max_{i\in N_3\left(A^{(y)}\right)}\left\{\frac{\alpha_i^{(y)}+\beta_i^{(y)}}{\left|a_{ii}^{(y)}\right|-\mu_i^{(y)}}\right\},$$

$$r_{l+1}^{(y)}=\max_{i\in N_3\left(A^{(y)}\right)}\left\{\frac{\bar{\alpha}_i^{(y)}+\bar{\beta}_i^{(y)}+r_l^{(y)}\mu_i^{(y)}}{\left|a_{ii}^{(y)}\right|}\right\}\quad\left(i\in N_3\left(A^{(y)}\right),l\in Z^+\right),$$

$$P_{l+1,i}^{(y)}=\bar{\alpha}_i^{(y)}+\bar{\beta}_i^{(y)}+r_l^{(y)}\mu_i^{(y)}\quad\left(i\in N_3\left(A^{(y)}\right),l\in Z\right),$$

$$\bar{\mu}_i^{(y)}=\sum_{t\in N_3\left(A^{(y)}\right),t\neq i}\left|a_{it}^{(y)}\right|\frac{P_{l+1,t}^{(y)}}{\left|a_{tt}^{(y)}\right|}\quad\left(i\in N_3\left(A^{(y)}\right),l\in Z\right),$$

$$W_{l+1,i}^{(y)}=\bar{\alpha}_i^{(y)}+\bar{\beta}_i^{(y)}+\bar{\mu}_i^{(y)}\ \left(i\in N_3\left(A^{(y)}\right),l\in Z\right),$$

$$\bar{\eta}_i^{(y)}=\sum_{t\in N_3\left(A^{(y)}\right),t\neq i}\left|a_{it}^{(y)}\right|\frac{W_{l+1,t}^{(y)}}{\left|a_{tt}^{(y)}\right|}\ \left(i\in N_3\left(A^{(y)}\right),l\in Z\right),$$

$$h_{l+1,i}^{(y)}=\frac{\bar{\alpha}_i^{(y)}+\bar{\beta}_i^{(y)}}{W_{l+1,i}^{(y)}-\bar{\eta}_i^{(y)}}\ \left(i\in N_3\left(A^{(y)}\right),l\in Z\right);$$

12) 令 $\gamma=\max\limits_{i\in N_3\left(A^{(y)}\right)}\left\{\dfrac{\bar{\alpha}_i^{(y)}+\bar{\beta}_i^{(y)}}{W_{l+1,i}^{(y)}-\bar{\eta}_i^{(y)}}\right\}$；

13) 如果

$$\left|a_{ii}^{(y)}\right|x_{1i,k}^{(y)}>\bar{\alpha}_i^{(y)}+\bar{\beta}_i^{(y)}+\gamma\bar{\eta}_i^{(y)}\ \left(i\in N_{1k}\left(A^{(y)}\right)\right),$$

则 $A\in D^*$，输出 $X^{(y)}=diag\left(x_i^{(y)}\right)$，停止；否则转 14；其中

$$x_i^{(y)}=\begin{cases}x_{1i,k}^{(y)} & i\in N_{1k}\left(A^{(y)}\right),\\ x_{2i}^{(y)} & i\in N_2\left(A^{(y)}\right),\\ \dfrac{W_{l+1,i}^{(y)}}{\left|a_{ii}^{(y)}\right|}+\varepsilon^{(y)} & i\in N_2\left(A^{(y)}\right).\end{cases}$$

$$\varepsilon^{(y)}=\begin{cases}\dfrac{1}{q}\min\left(\dfrac{\Lambda_i^{(y)}}{\left|a_{ii}^{(y)}\right|}-\dfrac{W_{l+1,i}^{(y)}}{\left|a_{ii}^{(y)}\right|}\right) & \forall i\in N_3\left(A^{(y)}\right),\ \sum\limits_{t\in N_3\left(A^{(y)}\right),t\neq i}\left|a_{it}^{(y)}\right|\neq 0,\\ \sigma_2 & \exists i\in N_3\left(A^{(y)}\right),\ s.t.\ \sum\limits_{t\in N_3\left(A^{(y)}\right),t\neq i}\left|a_{it}^{(y)}\right|=0.\end{cases}$$

这里 σ_2 为充分小的数，且 $q>1$；

14) 如果 $l<100$，取 $l=l+1$，转 11；否则转 15；

15) 取 $y=y+1$，转 3。

下面我们证明算法 2.1 的收敛性。

定理 2 设矩阵 $A=\left(a_{ij}\right)\in C^{n\times n}$，如果算法 2.1 经过有限次迭代停止，且得到一个严格对角占优矩阵，那么 A 是非奇异 H-矩阵。

证明充分性：假设算法 2.1 经过 y 次迭代后停止，并生成了一个严格对角占优矩阵 $A^{(y)}=\left(a_{it}^{(y)}\right)$。由 $A^{(y)}=A^{(y-1)}X^{(y-1)}$ 可递推得到

$$A^{(y)}=A^{(0)}X^{(0)}X^{(1)}\cdots X^{(y-1)}=AX,$$

即存在正对角矩阵 $X=X^{(1)}X^{(2)}\cdots X^{(y-1)}$ 使得 $AX\in D$。根据定义 1 可得，A 是非奇异 H-矩阵。

必要性利用反证法。假设算法 2.1 经过有限次迭代后未停止，即不妨设 A 为非负矩阵，算法 2.1 在经过无限次迭代后，生成了无穷序列 $\left\{A^{(y)}\right\}$，$\left\{a_{ii}^{(y)}\right\}$，$\left\{X^{(y)}\right\}$。令 $y=0,1,\cdots$，由算法 2.1 的步骤 13 可知，对任意的 $i\in N\left(A^{(y)}\right)$，都有 $0<x_i^{(y)}\leq 1$，即正对角矩阵的对角元小于或等于 1。又 $a_{it}^{(y)}=a_{it}^{(y-1)}x_t^{(y-1)}$，$A^{(y)}=A^{(y-1)}X^{(y-1)}$，则 $A=A^{(0)}=A^{(0)}\geq\cdots\geq A^{(y)}\geq\cdots\geq 0$，所以无穷矩阵序列 $\left\{A^{(y)}\right\}$ 单调递减且有界，可得 $\lim\limits_{y\to\infty}A^{(y)}=B$，其中 $B=AX$，$X=X^{(1)}X^{(2)}\cdots X^{(y-1)}$。

下面证明：$\lim\limits_{y\to\infty}N_3\left(A^{(y)}\right)=N_3\left(B\right)=\phi$。

再利用反证法。假设存在某一 $i \in N_3\left(A^{(y)}\right)$，使得 $\lim\limits_{y\to\infty} N_3\left(A^{(y)}\right) \neq \phi$，则 $1-x_{1i,k}^{(y)} > 0$，$1-x_{2i}^{(y)} > 0$，$1-\dfrac{W_{l+1,i}^{(y)}}{\left|a_{ii}^{(y)}\right|}-\varepsilon^{(y)} > 0$，且存在常量 τ_1,τ_2,τ_3 使得 $\left|a_{ii}^{(y)}\right|\left(1-x_{1i,k}^{(y)}\right) > \tau_1$，$\left|a_{ii}^{(y)}\right|\left(1-x_{2i}^{(y)}\right) > \tau_2$，$\left|a_{ii}^{(y)}\right|\left(1-\dfrac{W_{l+1,i}^{(y)}}{\left|a_{ii}^{(y)}\right|}-\varepsilon^{(y)}\right) > \tau_3$。取 $\tau_0 = \min\{\tau_1,\tau_2,\tau_3\}$，由算法 2.1 可得

$$\left|a_{ii}^{(y+1)}\right| = \left|a_{ii}^{(y)}\right| x_{1i,k}^{(y)} < \left|a_{ii}^{(y)}\right| - \tau_0,$$

$$\left|a_{ii}^{(y+1)}\right| = \left|a_{ii}^{(y)}\right| x_{2i}^{(y)} < \left|a_{ii}^{(y)}\right| - \tau_0,$$

$$\left|a_{ii}^{(y+1)}\right| = \left|a_{ii}^{(y)}\right| \left(\frac{W_{l+1,i}^{(y)}}{\left|a_{ii}^{(y)}\right|}+\varepsilon^{(y)}\right) < \left|a_{ii}^{(y)}\right| - \tau_0.$$

因此递推可得

$$\left|a_{ii}^{(0)}\right| = \left|a_{ii}^{(1)}\right| > \left|a_{ii}^{(2)}\right| + \tau_0 > \cdots > \left|a_{ii}^{(y)}\right| + (y-1)\tau_0,$$

当 $y \to \infty$ 时，有 $a_{ii} \to \infty$，产生矛盾。故 $\lim\limits_{y\to\infty} N_3\left(A^{(y)}\right) = N_3(B) = \phi$，由引理 2 知 B 不是非奇异 H-矩阵。

又已知矩阵 A 是非奇异 H-矩阵，可得 $A = BX^{-1} \in D^*$，其中 X^{-1} 为正对角矩阵，所以 B 是非奇异 H-矩阵，与上述矛盾。所以算法 2.1 在有限次迭代后停止，并生成一个严格对角占优矩阵。证毕。

注 1 与文献[1]和文献[2]相比，算法 2.1 不仅进一步细分非占优行指标集，而且构造了更小的迭代因子序列，使得算法的判定范围更广，运行的迭代次数也减少。且乘积形式的不等式放缩条件本就比文献[1]中对角元与行和的直接对比形式的条件要弱些，故本文的算法改进了文献[1] [2]中的算法主要结果。后面的数值算例也证实了这一点。

注 2 由 $x_{1i,k}^{(y)}$ 的定义、$x_{2i}^{(y)}$ 的定义及 $\dfrac{P_{l+1,i}^{(y)}}{\left|a_{ii}^{(y)}\right|} < 1$ 可知

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{(y)} &= \frac{1}{q}\min_{i\in N_3\left(A^{(y)}\right)}\left\{\frac{\Lambda_i^{(y)}}{\left|a_{ii}^{(y)}\right|}-\frac{W_{l+1,i}^{(y)}}{\left|a_{ii}^{(y)}\right|}\right\} \\
&= \frac{1}{q}\min_{i\in N_3\left(A^{(y)}\right)}\frac{\sum\limits_{t\in N_{1k}\left(A^{(y)}\right),t\neq i}\left|a_{it}^{(y)}\right|\left(1-x_{1t,k}^{(y)}\right)+\sum\limits_{t\in N_2\left(A^{(y)}\right)}\left|a_{it}^{(y)}\right|\left(1-x_{2t}^{(y)}\right)+\sum\limits_{t\in N_3\left(A^{(y)}\right),t\neq i}\left|a_{it}^{(y)}\right|\left(1-\dfrac{P_{l+1,t}^{(y)}}{\left|a_{tt}^{(y)}\right|}\right)}{\left|a_{ii}^{(y)}\right|} \\
&> 0,
\end{aligned}$$

且有

$$\begin{aligned}
\frac{W_{l+1,i}^{(y)}}{\left|a_{ii}^{(y)}\right|}+\varepsilon^{(y)} &= \frac{W_{l+1,i}^{(y)}}{\left|a_{ii}^{(y)}\right|}+\frac{1}{q}\min_{i\in N_3\left(A^{(y)}\right)}\left\{\frac{\Lambda_i^{(y)}}{\left|a_{ii}^{(y)}\right|}-\frac{W_{l+1,i}^{(y)}}{\left|a_{ii}^{(y)}\right|}\right\} \le \frac{W_{l+1,i}^{(y)}}{\left|a_{ii}^{(y)}\right|}+\frac{1}{q}\left(\frac{\Lambda_i^{(y)}}{\left|a_{ii}^{(y)}\right|}-\frac{W_{l+1,i}^{(y)}}{\left|a_{ii}^{(y)}\right|}\right) \\
&< \frac{W_{l+1,i}^{(y)}}{\left|a_{ii}^{(y)}\right|}+\left(\frac{\Lambda_i^{(y)}}{\left|a_{ii}^{(y)}\right|}-\frac{W_{l+1,i}^{(y)}}{\left|a_{ii}^{(y)}\right|}\right) = \frac{\Lambda_i^{(y)}}{\left|a_{ii}^{(y)}\right|} < 1,
\end{aligned}$$

所以 $\varepsilon^{(y)}$ 满足 $0<\varepsilon^{(y)}<1$ 且 $1-\frac{W_{l+1,i}^{(y)}}{\left|a_{ii}^{(y)}\right|}-\varepsilon^{(y)}>0$。故本文中 $\varepsilon^{(y)}$ 的选取是合理的。

3. 数值算例

例 1 考虑矩阵 A

$$A_1=\begin{pmatrix} 25 & 7.5 & 6 & 0 & 3 & 1.8 \\ 9.5 & 30 & 5.8 & 4 & 0 & 0.6 \\ 0 & 0 & 9 & 9 & 0 & 1.8 \\ 0 & 2 & 3 & 10 & 3 & 8 \\ 6.3 & 7.5 & 0 & 8 & 120 & 5 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 30 & 36 \end{pmatrix}.$$

$$A_2=\begin{pmatrix} 1.5 & 1.5 & 0 & 0 & 0.5 & 0.6 & 0.5 \\ 1 & 1.9 & 0 & 0 & 0.5 & 0.3 & 1 \\ 0.3 & 0.2 & 4 & 0.2 & 0.3 & 2 & 1 \\ 0.2 & 0.5 & 0.1 & 3 & 0.1 & 0.5 & 1.6 \\ 0.7 & 0.1 & 0 & 0 & 4 & 0.5 & 0.7 \\ 1 & 0 & 0.3 & 0 & 0.8 & 5 & 0.7 \\ 1 & 0 & 0.4 & 0.4 & 1 & 1 & 30 \end{pmatrix}.$$

针对上面两个矩阵 A_1 和 A_2，对比一些已有的判定算法结果，并利用 Matlab 软件编程计算，得到如下表 1 的具体判定结果。

Table 1. Numerical results of algorithm
表 1. 算法数值计算结果

	矩阵	m 值	递推次数(l)	迭代次数(y)	结论
算法 1.1	A_1	\	1	3	$A_1\in D^*$
	A_2	\	1	2	$A_2\in D^*$
文献[2]	A_1	\	\	7	$A_1\in D^*$
	A_2	\	\	4	$A_2\in D^*$
文献[4]	A_1	\	2	4	$A_1\in D^*$
	A_2	\	2	4	$A_2\in D^*$
算法 2.1	A_1	3	1	2	$A_1\in D^*$
	A_2	2	1	1	$A_2\in D^*$

取 $q=10$，$\sigma_2=0.001$，由上表可知，相对于算法 1.1、文献[2]和文献[4]中的算法结果来说，本文算法 2.1 的迭代次数更少些。且与前面三个算法相比，算法 2.1 可通过改变 m 值，实现一步变多步计算，故本文算法 2.1 改进了上述文献结果。

例 2 考虑矩阵 B

$$B=\begin{pmatrix} I & O & O & 1.11I & O \\ 0.015E & I & O & 0.025E & 0.005E \\ 0.01E & 0.005E & I & 0.02E & 0.005E \\ 0.01E & 0.015E & 0.01E & I & 0.01E \\ I & O & O & 0.015E & 0.99I \end{pmatrix}_{100\times 100},$$

$$I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{20\times 20},\ E=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{20\times 20},\ O=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{20\times 20}.$$

针对上面矩阵 B，利用 Matlab 软件编程计算，得到如下表 2 的具体判定结果。

Table 2. Number of iterations for different algorithms
表 2. 不同算法的迭代次数情况

	m 值	递推次数(l)	迭代次数(y)	结论
算法 1.1	\	1	5	$B\in D^*$
文献[2]	\	\	-	$B\in D^*$
文献[4]	\	2	5	$B\in D^*$
算法 2.1	1	1	5	$B\in D^*$
	2	18	4	$B\in D^*$

取 $q=5$，$\sigma_2=0.0002$，由表 2 可知，文献[2]在规定迭代次数最大值为 1000 的情况下，其仍无法判定矩阵 B 是否为非奇异 H-矩阵。另一方面，取 $m=1$ 时，算法 1.1 与算法 2.1 均迭代 5 次，但继续取 $m=2$ 时，本文算法 2.1 的迭代次数相对减少。故本文算法在一定程度上改进了上述文献结果。

4. 结论

通过数值实验结果对比分析，本文的算法 2.1 比文献[1]、文献[2]以及文献[4]的算法判定所需的迭代次数较少，判定范围更广，故本文给出的算法在一定程度上改进了文献[1]、文献[2]以及文献[4]算法的主要结果，且判定效率更高。

致　谢

感谢庹清老师对本项目的悉心指导和帮助。

基金项目

国家自然科学基金项目(11461027)；湖南省教育厅科研基金(21C0365)。

参考文献

[1] 张万智, 徐仲, 陆全, 张骁. 广义严格对角占优矩阵的迭代判别方法[J]. 高等学校计算数学学报, 2016, 38(4): 301-312.

[2] 丁碧文, 刘建州. 广义严格对角占优矩阵的充分条件[J]. 高等学校计算数学学报, 2009, 31(4): 310-318.

[3] 黄泽军, 刘建州. 非奇异 H 矩阵的一类新迭代判别法[J]. 工程数学学报, 2008(5): 939-942.

[4] 张骁, 陆全, 徐仲, 崔静静. 非奇 H-矩阵的一组迭代判别法[J]. 数值计算与计算机应用, 2015, 36(1): 59-68.

[5] 孙玉祥. 广义对角占优矩阵的充分条件[J]. 高等学校计算数学学报, 1997(3): 216-223.

[6] Farid, F.O. (2011) Notes on Matrices with Diagonally Dominant Properties. *Linear Algebra and Its Applications*, **435**, 2793-2812. https://doi.org/10.1016/j.laa.2011.04.045

[7] 张骁, 陆全, 徐仲, 等. 非奇 H-矩阵判别的充要条件[J]. 应用数学, 2016, 29(1): 50-57.

[8] Gu, J., Zhou, S., Zhao, J., *et al.* (2021) The Doubly Diagonally Dominant Degree of the Schur Complement of Strictly Doubly Diagonally Dominant Matrices and Its Applications. *Bulletin of the Iranian Mathematical Society*, **47**, 265-285. https://doi.org/10.1007/s41980-020-00382-w

[9] Kalhoro, Z.A., Guan, J., Abro, K.A., *et al.* (2016) A Modified Iterative Algorithm for Classifying Generalized Strictly Diagonally Dominant Matrices. *Sci. Int.* (*Lahore*), **28**, 4157-4162.

[10] Guan, J., Lu, L., Li, R.C., *et al.* (2016) Self-Corrective Iterations (SCI) for Generalized Diagonally Dominant Matrices. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **302**, 285-300. https://doi.org/10.1016/j.cam.2016.02.021

[11] 关晋瑞, 任孚鲛. 广义严格对角占优矩阵的一种判别法[J]. 应用数学, 2019, 32(3): 676-681. https://doi.org/10.13642/j.cnki.42-1184/o1.2019.03.015