

正则树上满足 δ' -型条件的Schrödinger算子的谱与正交多项式

宋红梅

河北工业大学, 理学院, 天津

收稿日期: 2023年2月27日; 录用日期: 2023年3月24日; 发布日期: 2023年3月31日

摘要

本文研究了定义在正则度量树 Γ_n 上满足 δ' -型顶点条件的Schrödinger算子的谱结构。文章首先给出了正则量子树分解后得到的量子线图上的算子所满足的顶点条件与正交多项式的关系, 然后根据 $L^2(\Gamma_n)$ 的空间分解定理和正交多项式根的性质得到了 Γ_n 上算子的谱结构。

关键词

正则度量树, 顶点条件, 正交多项式, 谱结构

The Spectrum of Schrödinger Operators with δ' -Type Conditions on Regular Trees and Orthogonal Polynomial

Hongmei Song

College of Science, Hebei University of Technology, Tianjin

Received: Feb. 27th, 2023; accepted: Mar. 24th, 2023; published: Mar. 31st, 2023

Abstract

In this paper, we study the spectral structure of Schrödinger operators with δ' -type vertex conditions on regular metric trees. We first give the relationship between the operators with δ' -type vertex conditions on the quantum graph after the decomposition of the regular quantum tree and the orthogonal polynomials; then we get the spectral structure of Schrödinger operators on regu-

lar metric trees by the space decomposition theorem and the roots' properties of orthogonal polynomials.

Keywords

Regular Metric Tree, Vertex Condition, Orthogonal Polynomials, Spectral Structure

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

定义在度量图上的微分算子和度量图本身所组成的整体，在数学物理研究领域被称为量子图。有关量子图的研究从二十世纪三十年代最早出现在化学领域中模拟自由电子运动，后来逐步出现在数学、物理和化学等各个领域[1]。度量图上微分算子理论主要研究微分算子的亏指数理论、自共轭域、谱理论及逆谱问题等。其中度量图上微分算子的谱理论是度量图上微分算子理论的重要内容之一。Carlson R., Naimark K.和 Solomyak M.等人[2]-[7]研究了正则度量树上满足特殊顶点条件的微分算子的谱的渐近性，基于正则度量树上平方可积函数空间的分解给出了定义在正则度量树上的 Schrödinger 算子的 Robin 谱在势函数 q 趋于 $+\infty$ 时谱的渐近性；Hess Z. W. [8]等人研究了正则度量树上的 Schrödinger 算子的谱结构，基于正则度量树上平方可积函数空间的分解以及正交多项式根的理论，研究了正则度量树上的 Schrödinger 算子谱在势函数 q 对称时，Schrödinger 算子的谱结构以及当 Robin 参数 $\alpha \rightarrow -\infty$ 时 Schrödinger 算子的负谱的渐近性。

基于现有成果与结论，本文主要关注定义在正则度量树上满足 δ' -型顶点条件的 Schrödinger 算子的谱。本节利用 $L^2(\Gamma_n)$ 的函数空间分解定理[3] [7]得到了定义在有限正则树 Γ_n 上满足 δ' -型顶点条件的 Schrödinger 算子可以分解为一列线图算子的直和，从而可将求 Γ_n 上算子的谱转化为求线图上算子的谱，而线图上满足 δ' -型顶点条件的算子的特征判别式为一正交多项式，进而利用正交多项式根的性质得到了线图上算子的谱。

2. 预备知识

为了研究正则度量树 Γ_n 上满足 δ' -型顶点条件的 Schrödinger 算子的谱，我们首先给出以下关于树的一些概念和结论。

定义 2.1 [9]树是局部有限的且没有平行边和闭路径的连通图。

定义 2.2 [9]若一个树 Γ 是一个度量图，则称 Γ 为度量树(有些文献中又称为加权树)。

定义 2.3 [9]定义在度量图上的微分算子和度量图本身所组成的整体，在数学物理研究领域被称为量子图。

本文研究的是层数为 n ，每个顶点的出度均为常数 b 且每条边的边长都为 1，方向为远离根顶点的有限正则度量树 Γ_n ，下文简称为正则树。将 Γ_n 的顶点集和边集分别记为 $\mathcal{V}(\Gamma_n)$ 和 $\mathcal{E}(\Gamma_n)$ ，根顶点记为 o 。本文用 $\langle x, y \rangle$ 表示树上点 x 到点 y 的简单路径，用 $\rho(x, y)$ 表示连接树上任意两点 x 和 y 的简单路径的长度。为了表述方便，对于度量树上的点 x ，用符号 $|x|$ 代替 $\rho(o, x)$ 。

接下来定义两点之间以及点与边之间的序。若树上任意两点 x, y 满足 $x \in \langle o, y \rangle$ ，则将 x, y 之间的关

系记为 $x \leq y$, 若 $x \neq y$, 则记为 $x < y$. 对于以顶点 v 为始点的第 j 条边 e_v^j , $1 \leq j \leq b$, 若 $e_v^j \in \langle o, x \rangle$, 则将边 e_v^j 和 x 之间关系记为 $x \geq e_v^j$ 或 $e_v^j \preceq x$.

定义 2.4 [10] 树上顶点 v_0 的代定义为满足条件 $v < v_0$ 的顶点 v 的个数, 将其记为 $gen(v_0)$, 即

$$gen(v_0) = \#\{v \in \mathcal{V}(\Gamma) : v < v_0\},$$

以顶点 v 为始点的边 e 的代为顶点 v 的代, 即

$$gen(e) = gen(v).$$

定义 2.5 [10] 若在度量树中, 分支数 $b(v)$ 是关于 $\rho(o, v)$ 的函数, e 的边长 $|e|$ 是关于 $\rho(o, e)$ 的函数, 则称树为一个正则度量树 (也称之为径向树), 其中 $\rho(o, v)$ 和 $\rho(o, e)$ 分别为度量图 Γ_n 的根 o 到顶点 v 以及边 e 的距离.

定义 2.6 [8] 图 Γ_n 上的函数空间 $L^2(\Gamma_n)$ 由在每条边 e 上都平方可积的函数 f 组成, 且 f 满足

$$\|f\|_{L^2(\Gamma_n)}^2 = \sum_{e \in \mathcal{E}(\Gamma_n)} \|f\|_{L^2(e)}^2 < \infty$$

本文考虑定义在正则度量树 Γ_n 上满足 δ' -型顶点条件的 Schrödinger 算子 \mathcal{L} , 其作用形式为

$$\mathcal{L}f = \left(-\frac{d^2}{dx^2} + q \right) f$$

其中 q 为 Γ_n 上的实值对称函数, 定义域中函数 $f \in L^2(\Gamma_n)$ 且满足如下 δ' -顶点条件,

$$\begin{cases} f_1(v) + \dots + f_b(v) - f_-(v) = \beta f'(v), \\ f'_-(v) = f'_1(v) = \dots = f'_b(v), \end{cases} \quad (1)$$

β 称为 δ' -耦合参数, 当 $v \neq o$ 时, 将唯一一条以顶点 v 为终点的边记为 e_v^- , $f_-(v), f'_-(v)$ 分别表示函数 f, f' 在边 e_v^- 上顶点 v 处的取值, 将以顶点 v 为始点的 b 条边分别记为 $e_v^1, e_v^2, \dots, e_v^b$, $f_j(v), f'_j(v)$ 分别表示函数 f, f' 在边 e_v^j 上顶点 v 处的取值. 算子 \mathcal{L} 的定义域如下,

$$\mathcal{D}(\mathcal{L}) = \{f \in L^2(\Gamma_n) : -f'' + qf \in L^2(\Gamma_n), f, f' \in AC(\Gamma_n), f \text{ 在 } \Gamma_n \text{ 内部顶点处满足顶点条件(1)}\},$$

其中 $AC(\Gamma_n)$ 由 Γ_n 的每条边上绝对连续的函数组成.

3. 正则树上满足 δ' -型顶点条件的 Schrödinger 算子

M. Solomyak 和 R. Carlson 分别在文献[3]和[7]中给出了正则树 Γ 上的函数空间 $L^2(\Gamma)$ 的正交分解, 本节利用空间分解定理得到了定义在有限正则树 Γ_n 上满足 δ' -型顶点条件的 Schrödinger 算子可以分解为一列线图上算子的直和, 从而可将求 Γ_n 上算子的谱转化为求线图上算子的谱, 而线图上满足 δ' -型顶点条件的算子的特征判别式为一正交多项式, 进而利用正交多项式根的性质求解线图上算子的谱.

3.1. 正则树上的算子的分解

令 I_n 为由 $n+1$ 个顶点 n 个边长为 1 的边组成的线图, 如图 1 所示.

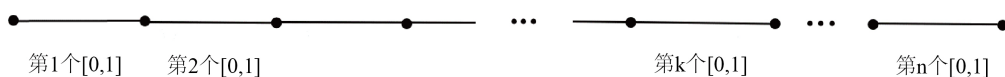


Figure 1. The linear metric graph I_n

图 1. 线图 I_n

定义函数 $\varphi = \{\varphi_l\}_{l=1}^n$, 使得 $\varphi \in L^2(I_n)$, 其中 φ_l 为 φ 在第 l 个区间 $[0,1]$ 上的限制。对于线图上的函数 $f = \{f_l\}_{l=1}^n$ 和 $g = \{g_l\}_{l=1}^n$, 内积定义为

$$\langle f, g \rangle = \sum_{k=1}^n b^k \int_0^1 f_k(x) \bar{g}_k(x) dx$$

接下来定义空间 $L^2(I_n)$ 上的自伴算子 A_n 和 A_m^0 。线图 I_n 上函数满足的 δ' -顶点条件为

$$\begin{aligned} -u_i(1) + bu_{i+1}(0) - \beta u'_{i+1}(0) &= 0, (0 < i < n), \\ bu_1(0) - \beta u'_1(0) &= 0, \\ -u_n(1) - \beta u'_n(1) &= 0, \end{aligned} \tag{2}$$

算子 A_n 定义域为

$$\mathcal{D}(A_n) = \left\{ f = \{f_k\}_{k=1}^n \in L^2(I_n) : f \text{ 满足顶点条件(2)} \right\}$$

线图 I_n 上函数在根部满足 Neumann 条件, 其余顶点满足的 δ' -顶点条件为

$$\begin{aligned} -u_i(1) + bu_{i+1}(0) - \beta u'_{i+1}(0) &= 0, (0 < i < n), \\ u'_1(0) &= 0, \\ -u_n(1) - \beta u'_n(1) &= 0, \end{aligned} \tag{3}$$

算子 A_m^0 定义域为

$$\mathcal{D}(A_m^0) = \left\{ f = \{f_k\}_{k=1}^n \in L^2(I_n) : f \text{ 满足顶点条件(3)} \right\}$$

由函数空间 $L^2(\Gamma)$ 的正交分解可知, 算子 \mathcal{L} 酉等价于一列线图 I_n 上的算子 A_n 和 A_m^0 的直和, 即

$$\mathcal{L} \cong A_n \oplus \sum_{m=0}^n \oplus (A_m^0)^{(b-1)b^{n-m}}$$

进一步由文献[7] [11]可得如下谱关系

$$\sigma(\mathcal{L}) = \sigma(A_n) \cup \left(\bigcup_{m=0}^n \sigma(A_m^0) \right), \tag{4}$$

其中算子 A_m^0 的谱为 $(b-1)b^{n-m}$ 重。

进而将求正则树上算子 \mathcal{L} 的谱转化为求算子 A_n 和 A_m^0 的谱。

3.2. 线图上满足 δ' -顶点条件的 Schrödinger 算子与正交多项式

令 $\Phi(x, \lambda)$ 和 $\Psi(x, \lambda)$ 分别为方程 $-u''(x) + q(x)u(x) = \lambda u(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上满足

$$\Phi(0, \mu) = 1, \Psi(0, \mu) = 0,$$

$$\Phi'(0, \mu) = 0, \Psi'(0, \mu) = 1,$$

的两个基解。

引理 3.1 [8] 当 Schrödinger 算子的势函数 $q(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上对称时, 即 $q(x) = q(1-x)$, 有 $\Phi(1, \lambda) = \Psi'(1, \lambda)$ 。

记

$$\Phi(\lambda) = \Phi(1, \lambda) = \Psi'(1, \lambda)$$

$$\Psi(\lambda) = \Psi(1, \lambda)$$

引理 3.2 [8] 当 $q(x)$ 对称且 $\Phi'(x) \neq 0$ 时, 有下式成立,

$$\begin{pmatrix} u(0) \\ -u(1) \end{pmatrix} = \frac{1}{\Phi'(\lambda)} \begin{pmatrix} -\Phi(\lambda) & 1 \\ 1 & -\Phi(\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'(0) \\ u'(1) \end{pmatrix}$$

对线图上的连续函数 $u = \{u_l(x_e)\}_{l=0}^n$ 作如下定义

$$\begin{aligned} u_0 &:= u_l(0), \\ u_l &:= u_{l+1}(0) = u_l(1), \\ u_n &:= u_n(1), \end{aligned}$$

则由引理 2 知

$$\begin{aligned} u_{l+1}(0) &= \frac{1}{\Phi'}(u'_{l+1} - \Phi u'_l), \\ -u_{l+1}(1) &= \frac{1}{\Phi'}(u'_l - \Phi u'_{l+1}), \end{aligned}$$

将上式带入顶点条件(2)式可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Phi'}(u'_{l-1} - \Phi u'_l) + b \frac{1}{\Phi'}(u'_{l+1} - \Phi u'_l) - \beta u'_l &= 0, (0 < l < n), \\ b \frac{1}{\Phi'}(u'_1 - \Phi u'_0) - \beta u'_0 &= 0, \\ \frac{1}{\Phi'}(u'_{n-1} - \Phi u'_n) - \beta u'_n &= 0, \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} -(\Phi b + \Phi' \beta) u'_0 + b u'_1 &= 0 \\ u'_{l-1} - (\Phi(b+1) + \Phi' \beta) u'_l + b u'_{l+1} &= 0, (0 < l < n), \\ u'_{n-1} - (\Phi + \Phi' \beta) u'_n &= 0, \end{aligned}$$

为 $\{u'_l\}_{l=0}^n$ 的一个齐次方程组, 其系数矩阵为 $(n+1) \times (n+1)$ 阶, 如下

$$M_n = \begin{pmatrix} \Phi b + \Phi' \beta & -b & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & \Phi(b+1) + \Phi' \beta & -b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & \Phi(b+1) + \Phi' \beta & -b \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 & \Phi + \Phi' \beta \end{pmatrix}$$

定义矩阵

$$\begin{aligned} D_n &= \det M_n (n \geq 1), \\ D_0 &= \Phi' \beta, \\ D_{-1} &= 1 - \Phi^2. \end{aligned}$$

同理, 对于根部满足 Dirichlet 条件, 其余顶点满足的 δ' -顶点条件的情况类似地有

$$M_n^0 = \begin{pmatrix} 1 & -b & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & \Phi(b+1)+\Phi'\beta & -b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & \Phi(b+1)+\Phi'\beta & -b \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 & \Phi+\Phi'\beta \end{pmatrix}$$

定义矩阵

$$D_n^0 = \det M_n^0 (n \geq 1),$$

$$D_0^0 = 1,$$

$$D_{-1}^0 = \Phi.$$

定理 3.3 D_n 和 D_n^0 满足如下递推关系

$$D_n = [\Phi(b+1)+\Phi'\beta]D_{n-1} - bD_{n-2}, (n \geq 1),$$

$$D_n^0 = [\Phi(b+1)+\Phi'\beta]D_{n-1}^0 - bD_{n-2}^0, (n \geq 1).$$

证明 定义行列式

$$E_n = \begin{vmatrix} \Phi b + \Phi'\beta & -b & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & \Phi(b+1)+\Phi'\beta & -b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & \Phi(b+1)+\Phi'\beta & -b \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 & \Phi(b+1)+\Phi'\beta \end{vmatrix}$$

则

$$D_n = E_n - \Phi'bE_{n-1}, n \geq -1 \tag{5}$$

E_n 满足

$$E_n = [\Phi(b+1)+\Phi'\beta]E_{n-1} - bE_{n-2}, E_{-1} = 1, E_{-2} = \frac{\Phi}{b}$$

从而

$$E_0 = \Phi b + \Phi'\beta,$$

$$E_1 = [\Phi(b+1)+\Phi'\beta](\Phi b + \Phi'\beta) - b,$$

将 E_n 和 E_{n-1} 代入(5)式即可得到定理 3.3 中第一个式子。

同理将矩阵 M_n^0 最后一行的第 $n+1$ 个元素用 $\Phi(b+1)+\Phi'\beta$ 替换，新的矩阵记为 N_n^0 ，定义 $E_n^0 = \det N_n^0, n \geq 0$ ，则 E_n^0 满足

$$D_n^0 = [\Phi(b+1)+\Phi'\beta]E_{n-1}^0 - bE_{n-2}^0, E_{-1}^0 = 0, E_{-2}^0 = -\frac{1}{b}$$

将 D_n^0 和 D_{n-1}^0 代入上式可得定理 3.3 中第一个式子，得证。

对于给定的 λ ， D_n 和 D_n^0 是与变量 Φ 和 Φ' 有关的多项式函数。令 $y = \Phi, z = \Phi'$ ，并定义参数曲线 $C := (y = \Phi, z = \Phi')$ ，记 $v = (b+1)y + \beta z$ 。则 $P_n(v) := D_n(\Phi, \Phi'), Q_n(v) := D_n^0(\Phi, \Phi')$ 为正交多项式[12]，且满足下式

$$\begin{aligned} P_n(v) &= vP_{n-1}(v) - bP_{n-2}(v), P_{-1}(v) = 0, P_0(v) = 1, \\ Q_n(v) &= vQ_{n-1}(v) - bQ_{n-2}(v), Q_{-1}(v) = 1, Q_0(v) = 0. \end{aligned}$$

对 n 用数学归纳法即可得下面定理。

定理 3.4 $D_n(y, z)$ 和 $D_n^0(y, z)$ 分别成立下式

$$\begin{aligned} D_n(y, z) &= \beta z P_n(v) + (1 - y^2) Q_n(v), \\ D_n^0(y, z) &= P_n(v) + y Q_n(v). \end{aligned}$$

证明 由于 $P_1 = vP_0 - bP_{-1} = v, Q_1 = vQ_0 - bQ_{-1} = -b$, 所以当 $n=1$ 时,

$$D_1 = [\Phi(b+1) + \Phi'\beta] \Phi'\beta - b(1 - \Phi^2) = \beta z v - b(1 - y^2) = \beta z P_1 + (1 - y^2) Q_1,$$

假设对于 $n-1$ 成立, 下证 n 成立。由假设可得

$$\begin{aligned} D_n(y, z) &= [\Phi(b+1) + \Phi'\beta] D_{n-1} - b D_{n-2} \\ &= [\Phi(b+1) + \Phi'\beta] [\beta z P_{n-1}(v) + (1 - y^2) Q_{n-1}(v)] - b \beta P_n(v) + (1 - y^2) Q_n(v) \\ &= \beta z \{ [\Phi(b+1) + \Phi'\beta] P_{n-1} - b P_{n-2} \} + (1 - y^2) \{ [\Phi(b+1) + \Phi'\beta] Q_{n-1} - b Q_{n-2} \} \\ &= \beta z P_n + (1 - y^2) Q_n, \end{aligned}$$

类似也可得到 $D_n^0(y, z)$ 的等式。

由上述分析知当 $D_n(\Phi(\lambda), \Phi'(\lambda)) = 0$ 时, λ 即为量子图 (I_n, A_n) 的特征值, 当 $D_n^0(\Phi(\lambda), \Phi'(\lambda)) = 0$ 时, λ 即为量子图 (I_n, A_n^0) 的特征值, 且与正交多项式 $P_n(v)$ 和 $Q_n(v)$ 的根有关。由文献[12]知, $P_n(v)$ 和 $Q_n(v)$ 分别为 n 阶和 $n-1$ 阶的多项式, 记

$$v_{n_1} < v_{n_2} < \cdots < v_{n_n}, w_{n_1} < w_{n_2} < \cdots < w_{n_{n-1}}$$

分别为 $P_n(v)$ 和 $Q_n(v)$ 的根, 由文献[8]知 $P_n(v)$ 和 $Q_n(v)$ 的根之间有交错性质, 即 $v_{n_{k-1}} < w_{n_{k-1}} < v_{n_k} < w_{n_k} \in [-(b+1), (b+1)]$ 。 $P_n(v)$ 和 $Q_n(v)$ 的图像为 $y-z$ 平面内与 y 轴相交的两组互相交错的平行斜直线。由上讨论知参数曲线 C 与 $D_n(y, z) = 0$ 和 $D_n^0(y, z) = 0$ 在 $y-z$ 平面内的交点分别组成了量子图 (I_n, A_n) 和 (I_n, A_n^0) 的特征值, 下面研究参数曲线 C 和曲线 $D_n(y, z) = 0$ 和 $D_n^0(y, z) = 0$ 的图像。

1. 参数曲线 C

曲线 C 为一条与 y 轴相交, 在 $[-1, 1]$ 之间来回环绕的曲线, 当 δ' -耦合参数 $\beta \rightarrow -\infty$ 时, 参数曲线 $C \rightarrow \infty$ 。且对于势函数 $q \in L^2[0, 1]$, $\Phi(\lambda)$ 和 $\Phi'(\lambda)$ 有如下性质。

性质 3.5 1) 当 $\lambda \rightarrow +\infty$ 时, 令 $\lambda = v^2 \rightarrow +\infty$, $\Phi(\lambda)$ 和 $\Phi'(\lambda)$ 有如下渐近表达式

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda) &= \cos v + O(v^{-1}), \\ \Phi'(\lambda) &= -v^{-1} \sin v + O(v^{-2}). \end{aligned}$$

2) 当 $\lambda \rightarrow -\infty$ 时, 令 $\lambda = -v^2 \rightarrow -\infty$, $\Phi(\lambda)$ 和 $\Phi'(\lambda)$ 有如下渐近表达式

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda) &= e^v \left(\frac{1}{2} + q_0 v^{-1} + O(v^{-2}) \right), \\ \Phi'(\lambda) &= -v^{-1} e^v \left(\frac{1}{2} + q_0 v^{-1} + O(v^{-2}) \right), \end{aligned}$$

其中 $q_0 = \frac{1}{4} \int_0^1 q(x) dx$ 。

证明 参见文献[8]。

2. 曲线 $D_n(y, z) = 0$ 和 $D_n^0(y, z) = 0$

将 $D_n(y, z)$ 与 $D_n^0(y, z)$ 的零集记为

$$Z_n := \{(y, z) : y, z \in \mathbb{R}, D_n(y, z) = 0\},$$

$$Z_n^0 := \{(y, z) : y, z \in \mathbb{R}, D_n^0(y, z) = 0\},$$

则由 $D_n(-y, -z) = (-1)^{n+1} D_n(y, z)$ 可知 $D_n(y, z) = 0 \Leftrightarrow D_n(-y, -z) = 0$ ，所以 $D_n(y, z) = 0$ 所构成的曲线在 y - z 平面内关于原点对称，且曲线满足以下性质。

1) 当 $z = 0$ 时， Z_n 与 y 轴的交集(即 $\Phi'(\lambda) = 0$ 时)为

$$\{y : y \in \mathbb{R}, D_n(y, 0) = 0\} = \left\{ \frac{w_j}{b+1} : 1 \leq j < n \right\} \cup \{-1, 1\},$$

当 $\beta \neq 0$ 时， Z_n 与直线 $y = 1$ 的交集(即 $y = \Phi(\lambda) = 1$ 时)为

$$\{z : z \in \mathbb{R}, D_n(1, z) = 0\} = \left\{ \frac{v_j - (b+1)}{\beta} : 1 \leq j < n \right\} \cup \{0\}.$$

2) Z_n 由 $n+1$ 条互不相交的曲线组成，并且每一条曲线在 y - z 平面内都是一个关于 z 单调递增的函数。

3) 当 $\beta < 0$ 且 $z \geq 0$ 时，曲线上的点满足下列不等式，

$$k = 0 \text{ 时, } \begin{cases} -(b+1) \leq (b+1)y + \alpha z \leq v_1, -1 \leq y \leq 1, \\ v_1 \leq (b+1)y + \alpha z \leq w_1, y \geq 1, \end{cases}$$

$$k = 1, \dots, (n-2) \text{ 时, } \begin{cases} w_k \leq (b+1)y + \alpha z \leq v_{k+1}, -1 \leq y \leq 1, \\ v_{k+1} \leq (b+1)y + \alpha z \leq w_{k+1}, y \geq 1, \end{cases}$$

$$k = n-1 \text{ 时, } \begin{cases} w_{n-1} \leq (b+1)y + \alpha z \leq v_n, -1 \leq y \leq 1, \\ v_n \leq (b+1)y + \alpha z, y \geq 1, \end{cases}$$

$$k = n \text{ 时, } (b+1) \leq (b+1)y + \alpha z, y \geq 1.$$

同样地， $D_n^0(y, z) = 0$ 所构成的曲线在 y - z 平面内也关于原点对称，且曲线满足以下性质。

1) 当 $y = 0$ 时， Z_n^0 与 z 轴的交集(即 $\Phi(\lambda) = 0$ 时)为

$$\{z : z \in \mathbb{R}, D_n^0(0, z) = 0\} = \left\{ \frac{v_j}{\beta} : 1 \leq j < n \right\}$$

2) Z_n^0 由 n 条互不相交的曲线组成，并且每一条曲线在 y - z 平面内都是一个关于 z 单调递增的函数。

3) 当 $\beta < 0$ 且 $z \geq 0$ 时，曲线上的点满足下列不等式，

$$k = 1 \text{ 时, } \begin{cases} -(b+1) \leq (b+1)y + \beta z \leq v_1, y \leq 0, \\ v_1 \leq (b+1)y + \beta z \leq w_1, y \geq 0, \end{cases}$$

$$k = 2, \dots, (n-1) \text{ 时, } \begin{cases} w_k \leq (b+1)y + \beta z \leq v_{k+1}, y \leq 0, \\ v_{k+1} \leq (b+1)y + \alpha z \leq w_{k+1}, y \geq 0, \end{cases}$$

$$k = n \text{ 时, } \begin{cases} w_{n-1} \leq (b+1)y + \beta z \leq v_n, y \leq 0, \\ b+1 \leq (b+1)y + \beta z, y \geq 0. \end{cases}$$

4. 算子的谱

本节在前几节的基础上给出了定义在线图上算子的谱结构, 并根据谱的分解得到了定义在正则树上的算子的谱。

由于 $\Phi'(\lambda) = -v^{-1} \sin v + O(v^{-2})$, 且 $\Phi'(\lambda)$ 关于 λ 连续, 所以 $\Phi(\lambda)$ 在实数范围内有可数个根, 给这可数个根由小到大排序, 记为 $\{\lambda_N^k\}_{k=1}^\infty$, 则由文献[8]知量子图 (I_n, A_n) 和 (I_n, A_m^0) 的特征值可由如下定理给出。

定理 6.1 (I_n, A_n) 和 (I_n, A_m^0) 的谱如下:

1) $\sigma(I_n, A_n) = \Sigma_n^k \cup \{\lambda_n^-\} \cup \{\lambda_n^+\}, k = 0, 1, 2, \dots$, 其中 Σ_n^k 为 A_n 的特征值集, λ_n^- 和 λ_n^+ 为当 δ' -耦合参数 $\beta \rightarrow -\infty$ 时, A_n 的两个趋于 $-\infty$ 的“无赖”特征值。

当 $k \geq 1$ 时, Σ_n^k 里面包含 n 个特征值, 且这 n 个特征值 λ 满足

$$\lambda_D^k \leq \lambda \leq \lambda_D^{k+1}, (\lambda \in \Sigma_n^k, k \geq 1)。$$

当 $k = 0$ 时, Σ_0^k 里面包含 $n-1$ 个特征值, 且这 $n-1$ 个特征值均小于 $\Sigma_n^k, k > 0$ 里面的特征值。

2) $\sigma(I_n, A_m^0) = (\Sigma_n^k)^0 \cup \{(\lambda_n^-)^0\}, k = 0, 1, 2, \dots$, 其中 $(\Sigma_n^k)^0$ 为 A_m^0 的特征值集, (λ_n^-) 为当 δ' -耦合参数 $\beta \rightarrow -\infty$ 时, A_m^0 的两个趋于 $-\infty$ 的“无赖”特征值。

当 $k \geq 1$ 时, $(\Sigma_n^k)^0$ 里面包含 $m-1$ 个特征值, 且这 $m-1$ 个特征值 λ 满足

$$\lambda_D^k \leq \lambda \leq \lambda_D^{k+1}, (\lambda \in (\Sigma_n^k)^0, k \geq 1)。$$

当 $k = 0$ 时, $(\Sigma_0^k)^0$ 里面包含 $m-1$ 个特征值, 且这 $m-1$ 个特征值均小于 $(\Sigma_n^k)^0, k > 0$, 里面的特征值。由第三节知, 正则树上的 \mathcal{L} 算子的谱为

$$\sigma(\mathcal{L}) = \sigma(A_n) \cup \left(\bigcup_{m=0}^n \sigma(A_m^0) \right),$$

其中 A_n 的谱的重数为 1, A_m^0 的谱的重数为 $b^{(n-m)}(b-1)$ 。

5. 总结

本文研究了定义在正则度量树 Γ_n 上满足 δ' -型顶点条件的 Schrödinger 算子的谱。基于平方可积函数空间 $L^2(\Gamma_n)$ 的分解定理以及正交多项式根的性质, 通过正则量子树分解后得到量子线图上的算子所满足的顶点条件与正交多项式的关系以及得到了 Γ_n 上算子的谱结构。这种函数空间分解理论以及借助多项式的方法可以将原来研究复杂的度量图上的微分算子的谱转而研究较为简单的线图上的算子的谱。其中平方可积函数空间的分解定理也使得研究度量图上微分算子的相关理论可以转化为研究区间上的微分算子, 对度量图上微分算子的研究有着深远的影响。

参考文献

- [1] Pauling, L. (1936) The Diamagnetic Anisotropy of Aromatic Molecules. *Journal of Chemical Physics*, **4**, 673-677. <https://doi.org/10.1063/1.1749766>
- [2] Carlson, R. (1997) Hill's Equation for a Homogeneous Tree. *Electronic Journal of Differential Equations*, **23**, 1-30.
- [3] Carlson, R. (2000) Nonclassical Sturm-Liouville Problems and Schrödinger Operators on Radial Trees. *Electronic*, **71**,

- 1-24.
- [4] Naimark, K. and Solomyak, M. (2000) Eigenvalue Estimates for the Weighted Laplacian on Metric Trees. *Proceedings of the London Mathematical Society*, **80**, 690-724. <https://doi.org/10.1112/S0024611500012272>
 - [5] Alexander, V. and Solomyak, M. (2002) Schrödinger Operators on Homogeneous Metric Trees: Spectrum in Gaps. *Reviews in Mathematical Physics*, **14**, 421-467. <https://doi.org/10.1142/S0129055X02001235>
 - [6] Solomyak, M. (2003) Laplace and Schrödinger Operators on Regular Metric Trees: The Discrete Spectrum Case. *Function Spaces, Differential Operators and Nonlinear Analysis*. Birkhäuser, Basel, 161-181. https://doi.org/10.1007/978-3-0348-8035-0_8
 - [7] Solomyak, M. (2004) On the Spectrum of the Laplacian on Regular Metric Trees. *Waves in Random Media*, **14**, 155-171. <https://doi.org/10.1088/0959-7174/14/1/017>
 - [8] Hess, Z.W. and Stephen, S.P. (2021) Spectra of Regular Quantum Trees: Rogue Eigenvalues and Dependence on Vertex Condition. *Annales Henri Poincaré*, **22**, 2531-2561. <https://doi.org/10.1007/s00023-021-01035-2>
 - [9] Zhao, J., Shi, G.L. and Yan, J. (2018) The Discrete Spectrum of Schrödinger Operators with δ -Type Conditions on Regular Metric Trees. *Journal of Spectral Theory*, **8**, 459-491. <https://doi.org/10.4171/JST/202>
 - [10] Berkolaiko, G. and Kuchment, P. (2013) *Introduction to Quantum Graphs, Mathematical Surveys and Monographs*. Vol. 186, American Mathematical Society, Providence.
 - [11] Naimark, K. and Solomyak, M. (2001) Geometry of Sobolev Spaces on Regular Trees and Hardy Inequalities. *Russian Journal of Mathematical Physics*, **8**, 322-335.
 - [12] Theodore, S.C. (1978) *An Introduction to Orthogonal Polynomials*. Gordon and Breach, New York.