Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2024, 13(2), 760-773
Published Online February 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2024.132075

Hans汉斯

量子磁流体方程弱解的全局存在性

张　帆，任永华*，张建文

太原理工大学数学学院，山西　太原

收稿日期：2024年1月28日；录用日期：2024年2月22日；发布日期：2024年2月29日

摘　要

本文研究了三维环面上粘性依赖密度的量子磁流体系统，通过引入冷压处理对流项，运用Fadeo-Galerkin方法和紧性定理等证明了该系统弱解的全局存在性。

关键词

冷压，量子磁流体，弱解

Global Existence of Weak Solutions for Quantum Magnetohydrodynamic Equations

Fan Zhang, Yonghua Ren*, Jianwen Zhang

Department of Mathematics, Taiyuan University of Technology, Taiyuan Shanxi

Received: Jan. 28th, 2024; accepted: Feb. 22nd, 2024; published: Feb. 29th, 2024

Abstract

This paper investigates a density dependent quantum magneto fluid system on a three-dimensional torus, and proves the global existence of weak solutions of the system by introducing cold pressure convection terms and using Fadeo-Galerkin method and compactness theorem.

Keywords

Cold Pressing, Viscous Quantum Magnetic Fluid, Weak Solution

*通讯作者。

文章引用: 张帆, 任永华, 张建文. 量子磁流体方程弱解的全局存在性[J]. 应用数学进展, 2024, 13(2): 760-773.
DOI: 10.12677/aam.2024.132075

1. 引言

本文主要研究如下的三维粘性量子磁流体系统：

$$\rho_t + div(\rho u) = \mu\Delta\rho \quad x \in \mathbb{T}^3 \tag{1}$$

$$(\rho u)_t + div(\rho u \otimes u) + \nabla P(\rho) - \frac{\hbar^2}{2}\rho\nabla\left(\frac{\Delta\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}}\right) = (\nabla\times B)\times B + \mu\Delta(\rho u) \tag{2}$$

$$B_t - \nabla\times(u\times B) = -\nabla\times(\nu\nabla\times B) \tag{3}$$

$$divB = 0 \tag{4}$$

初始条件：

$$\rho(x,0) = \rho_0, (\rho u)(x,0) = m_0, B(x,0) = B_0 \tag{5}$$

相容性条件：

$$\rho_0 \in L^\gamma(\mathbb{T}^3), \frac{1}{\rho_0} \in L^2(\mathbb{T}^3), \frac{|m_0|^2}{\rho_0} \in L^1(\mathbb{T}^3), \nabla\sqrt{\rho_0} \in L^2(\mathbb{T}^3), B_0 \in L^2(\mathbb{T}^3) \tag{6}$$

其中，$\mathbb{T}^3$ 是一个三维环面，未知函数 $\rho = \rho(x,t), u = (u_1,u_2,u_3)$ 和 $B = (B_1,B_2,B_3)$ 分别表示流体粒子的质量密度，速度和磁场；$\hbar$ 是普朗克常数；$\frac{\Delta\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}}$ 称为量子玻姆势；且物理参量 $\mu,\nu > 0$，压力 $P(\rho)$ 是两个分量组成的密度函数，假设 $P(\rho) = P_1(\rho) + P_2(\rho)$，其中等熵流

$$P_1(\rho) = a^2\rho^\gamma \ (a \neq 0, \gamma > 1) \tag{7}$$

是由玻义耳定律给出的经典压力分量：

$$P_2(\rho) = \frac{-3a^2\epsilon}{2(\gamma-1)\rho^2}(\epsilon > 0) \tag{8}$$

是冷压分量且是一连续的奇异函数，其中冷压的负性可以看作数学假设也可以看做为了保持稳定性而人为假设的。该类模型可以用于描述超流体[1]，量子半导体[2]，弱相互作用的玻色气体[3]和 Bohmian 力学的量子轨迹[4]等。

若 $B = \mu = 0$ 且动量方程(2)不含冷压项，方程组(1)~(4)称为量子流体力学(简称 QHD)模型。现在关于 QHD 模型的研究相对成熟。Antonelli Paolo [5]研究了 QHD 模型有限能量弱解的存在性，王光武和郭柏灵[6] [7]建立了该模型强解的全局存在性和爆破，Zhang [8]等研究了在任意维空间中等熵可压缩 QHD 模型局部光滑解的初始密度具有紧支集时，其局部光滑解将在有限时间内爆破。

若 $B = \mu = 0$ 且动量方程(2)不含冷压项，考虑动量方程(2)添加 $\mu div\left(\rho\frac{\nabla u + \nabla^\top u}{2}\right)$ 或 $\mu div\left(h(\rho)\frac{\nabla u + \nabla^\top u}{2}\right) + \lambda\nabla(g(\rho)divu)$，方程组(1)~(4)称为量子 Navier-Stokes 方程(简称量子 NS 方程)。

Jüngel [9]首先证明了当普朗克常数($\hbar$)大于粘性常数(μ)时，可压缩量子 NS 方程弱解的全局存在性。之后，Dong [10]和 Jiang [11]分别证明了 $\hbar=\mu$，$\hbar<\mu$ 时，可压缩量子 NS 方程弱解的全局存在性。上述弱解的存在性在 $n=3$ 时，需要绝热指数 $\gamma>3$。进一步，文献[12] [13] [14]通过添加额外的冷压力或阻尼项证明了量子 NS 方程弱解的全局存在性。董建伟和琚强昌[15]证明了当 $\hbar>\mu,\gamma>1$ 时，可压缩量子 NS 方程光滑解在有限时刻爆破。Yang [16]等通过引入不同的冷压 $P_2(\rho)=\dfrac{-3a^2\epsilon}{2(\gamma-1)\rho^2}$，证明了在标准定义的意义下三维正压可压缩量子 NS 方程弱解的全局存在性。

Antonelli Paolo [17]等证明了具有非平凡远场行为的量子 NS 方程有限能量弱解的全局存在性。唐童和牛聪[18]通过构造含有冷压力与阻尼项的逼近系统证明了非单调压力情形下量子NS方程弱解的全局存在性。

关于量子磁流体方程的研究近几年有显著进展。2014 年，Yang [19]等利用 Fadeo-Galerkin 方法和紧性定理证明了三维粘性量子磁流体方程弱解的全局存在性。2017 年，Li [20]等证明了三维环面量子磁流体方程弱解的全局存在性及大时间行为。2019 年，王光武和郭柏灵[21]将量子磁流体模型与 Eicksen-Leslie 模型耦合，证明了二维粘性量子磁流体－液晶方程有限能量弱解的全局存在性和光滑解的爆破。同时，王朋杰[22]研究了此模型经典解及其衰减。2020 年，杨莹和周妤[23]等利用拓扑度理论和抛物正则化方法证明了量子磁流体方程周期解的存在性。

本文受文献[16]的启发，利用 Fadeo-Galerkin 方法和消失粘性的方法证明了粘性量子磁流体方程组(1)~(4)弱解的全局存在性。值得指出的是，本文中我们将文献[19]定理 1.1 中的绝热指数 $\gamma>3$ 扩大到 $\gamma>1$。

2. 预备知识及主要定理

本节先给出一些符号说明。$W^{m,p}(\mathbb{T}^3)$ 和 $H^s(\mathbb{T}^3)$ 是 Sobolev 空间，$L^p([0,T];L^q(\mathbb{T}^3))$ 是带有时间的 Sobolev 空间，其中的元素关于时间变量 p 次可积，关于空间变量 q 次可积。然后给出了粘性量子磁流体模型弱解的定义及其主要定理。

引理 1 (Aubin-Lions 引理) [24]假设 Banach 空间 X,Y,Z 满足 $X\subset Y\subset Z$ 并且 $X\subset\subset Y$，则有

$$L^q([0,T];X)\cap\{\varphi:\partial_t\varphi\in L^1([0,T];Z)\}\subset\subset L^q([0,T];Y),\ \forall 1\le q\le\infty$$
$$L^\infty([0,T];X)\cap\{\varphi:\partial_t\varphi\in L^r([0,T];Z)\}\subset\subset C([0,T];Y),\ \forall 1\le r\le\infty$$

引理 2 (Gagliardo-Nirenberg 不等式) [25]假设 $m\in\mathbb{N}$ 和 $1\le p,q,r\le+\infty$，那么存在常数 $C>0$，使得对 $\forall u\in W^{m,p}(\Omega)\cap L^q(\Omega)$ 有

$$\left\|D^\beta u\right\|_{L^r(\Omega)}\le C\|u\|^{\theta}_{W^{m,p}(\Omega)}\|u\|^{1-\theta}_{L^q(\Omega)}$$

其中，$0\le|\beta|\le m-1,\theta=\dfrac{|\beta|}{m}$ 满足

$$\frac{1}{r}=\frac{|\beta|}{3}+\theta\left(\frac{1}{p}-\frac{m}{3}\right)-\frac{1-\theta}{q}$$

特别地，$m-|\beta|-\dfrac{3}{p}\notin\mathbb{N}_0,\theta\in\left[\dfrac{|\beta|}{m},1\right]$ 上述不等式也成立。

定义 1 设 $\rho\ge0$，称 (ρ,u,B) 是方程组(1)~(4)的弱解，如果满足下列条件

$\rho \in L^{\infty}\left(\left[0,T\right];L^{\gamma}\left(\mathbb{T}^{3}\right)\right)$

$\sqrt{\rho}u \in L^{\infty}\left(\left[0,T\right];L^{2}\left(\mathbb{T}^{3}\right)\right), \sqrt{\rho}\nabla u \in L^{2}\left(\left[0,T\right];L^{2}\left(\mathbb{T}^{3}\right)\right)$

- $\sqrt{\rho} \in L^{\infty}\left(\left[0,T\right];H^{1}\left(\mathbb{T}^{3}\right)\right) \cap L^{2}\left(\left[0,T\right];H^{2}\left(\mathbb{T}^{3}\right)\right)$

  $\frac{1}{\rho} \in L^{\infty}\left(\left[0,T\right];L^{2}\left(\mathbb{T}^{3}\right)\right), \nabla\left(\frac{1}{\rho}\right) \in L^{2}\left(\left[0,T\right];L^{2}\left(\mathbb{T}^{3}\right)\right)$

  $B \in L^{\infty}\left(\left[0,T\right];L^{2}\left(\mathbb{T}^{3}\right)\right) \cap L^{2}\left(\left[0,T\right];H^{1}\left(\mathbb{T}^{3}\right)\right)$

- (ρ,u,B) 在分布意义 $\mathcal{D}'\left(\left(0,T\right)\times\mathbb{T}^{3}\right)$ 下满足连续方程

$$\begin{cases} \rho_t + div\left(\sqrt{\rho}\sqrt{\rho}u\right) = \mu\Delta\rho \\ \rho\left(x,0\right) = \rho_0\left(x\right) \end{cases} \tag{9}$$

对任意试验函数 $\phi \in C_0^{\infty}\left(\mathbb{T}^3 \times \left[0,T\right]\right)$ 且 $\phi(T,\cdot)=0$ 有

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{T}^3} \rho_0 u_0 \phi\left(\cdot,0\right)\mathrm{d}x + \int_0^T\int_{\mathbb{T}^3} \rho u \phi_t \mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_0^T\int_{\mathbb{T}^3} \rho u \otimes u : \nabla\phi \mathrm{d}x\mathrm{d}t - \int_0^T\int_{\mathbb{T}^3} \mu\nabla\left(\rho u\right) : \nabla\phi \mathrm{d}x\mathrm{d}t \\ &+ \int_0^T\int_{\mathbb{T}^3} \left(P_1\left(\rho\right)+P_2\left(\rho\right)\right) div\phi \mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_0^T\int_{\mathbb{T}^3} \left(\nabla\times B\right)\times B\cdot\phi \mathrm{d}x\mathrm{d}t \\ &+ \int_0^T\int_{\mathbb{T}^3} \frac{\hbar^2}{2}\left(\sqrt{\rho}\nabla\sqrt{\rho}\cdot\nabla div\phi + 2\nabla\sqrt{\rho}\otimes\nabla\sqrt{\rho} : \nabla\phi\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t = 0 \end{aligned}$$

$$\int_{\mathbb{T}^3} B_0\phi\left(\cdot,0\right)\mathrm{d}x + \int_0^T\int_{\mathbb{T}^3} B\cdot\phi_t + \nabla\times\left(u\times B\right)\cdot\phi \mathrm{d}x\mathrm{d}t - \int_0^T\int_{\mathbb{T}^3} \nu\nabla B : \nabla\phi \mathrm{d}x\mathrm{d}t = 0$$

注 1：为便于定义 1 的计算，量子项可以写成

$$\begin{aligned} \left\langle \rho\nabla\left(\frac{\Delta\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}}\right),\phi\right\rangle &= \left\langle \nabla\left(\sqrt{\rho}\Delta\sqrt{\rho}\right),\phi\right\rangle - \left\langle \frac{1}{\sqrt{\rho}}\nabla\rho\Delta\sqrt{\rho},\phi\right\rangle \\ &= \left\langle \nabla\left(\sqrt{\rho}\Delta\sqrt{\rho}\right),\phi\right\rangle - \left\langle \frac{1}{\sqrt{\rho}}\nabla\rho\Delta\sqrt{\rho},\phi\right\rangle \\ &= -\left\langle \sqrt{\rho}\Delta\sqrt{\rho}, div\phi\right\rangle - 2\left\langle \nabla\sqrt{\rho}\Delta\sqrt{\rho},\phi\right\rangle \\ &= -\left\langle \nabla\left(\sqrt{\rho}\nabla\sqrt{\rho}\right), div\phi\right\rangle + \left\langle \left|\nabla\sqrt{\rho}\right|^2, div\phi\right\rangle \\ &\quad - 2\left\langle div\left(\nabla\sqrt{\rho}\otimes\nabla\sqrt{\rho}\right),\phi\right\rangle + 2\left\langle \left(\nabla\sqrt{\rho}\cdot\nabla\right)\nabla\sqrt{\rho},\phi\right\rangle \\ &= \left\langle \sqrt{\rho}\nabla\sqrt{\rho}, \nabla div\phi\right\rangle + \left\langle \left|\nabla\sqrt{\rho}\right|^2, div\phi\right\rangle \\ &\quad + 2\left\langle \nabla\sqrt{\rho}\otimes\nabla\sqrt{\rho},\nabla\phi\right\rangle + \left\langle \nabla\left|\nabla\sqrt{\rho}\right|^2,\phi\right\rangle \\ &= \left\langle \sqrt{\rho}\nabla\sqrt{\rho}, \nabla div\phi\right\rangle + 2\left\langle \nabla\sqrt{\rho}\otimes\nabla\sqrt{\rho},\nabla\phi\right\rangle \end{aligned}$$

定理 1 对任意 $T>0, \gamma>1$。假设初始值 (ρ_0,u_0,B_0) 满足条件(6)，则方程组(1)~(4)在区域 $\left[0,T\right]\times\mathbb{T}^3$ 上存在全局弱解 (ρ,u,B)。

接下来，我们构造逼近系统。受到文献[21]的启发，运用 Banach 不动点定理得到方程组(10)~(13)近似解的存在性，在近似解一致先验估计的基础上，证明了近似解的极限就是方程组(1)~(4)的弱解，进而证明了定理 1。

3. Fadeo-Galerkin 近似

首先，由于方程组(1)~(4)缺乏紧性，所以我们在动量方程(2)的右边添加正则性项 $\delta\Delta u-\delta u$ 。即

$$\rho_t+div(\rho u)=\mu\Delta\rho \tag{10}$$

$$(\rho u)_t+div(\rho u\otimes u)+\nabla\left(P_1(\rho)+P_2(\rho)\right)-\frac{\hbar^2}{2}\rho\nabla\left(\frac{\Delta\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}}\right)=(\nabla\times B)\times B+\mu\Delta(\rho u)+\delta\Delta u-\delta u \tag{11}$$

$$B_t-\nabla\times(u\times B)=-\nabla\times(\nu\nabla\times B) \tag{12}$$

$$divB=0 \tag{13}$$

其中，δ 是一个很小的参数，初值 ρ_0,m_0 按照文献[26]方法正则化

$$\rho|_{t=0}=\rho_{0,\delta}\in C^3\left(\mathbb{T}^3\right),(\rho u)|_{t=0}=m_{0,\delta}\in C^2\left(\mathbb{T}^3\right),B|_{t=0}=B_0\in L^2\left(\mathbb{T}^3\right) \tag{14}$$

初值 $\rho_{0,\delta}$ 是 $C^3\left(\mathbb{T}^3\right)$ 的光滑函数，且满足 $\delta^{-1}\ge\rho_{0,\delta}\ge\delta>0$，$\rho_{0,\delta}$ 在 $L^\gamma\left(\mathbb{T}^3\right)$ 中强收敛于 ρ_0，$m_{0,\delta}$ 在 $L^1\left(\mathbb{T}^3\right)$ 中收敛于 m_0。

接下来，我们利用 Fadeo-Galerkin 方法构造方程组(10)~(13)的近似解。

设 $T>0$，定义有限维空间 $X_n\triangleq span\left\{\omega_j\right\}_{j=1}^n$，$\omega_j$ 是 $\mathbb{H}^1\left(\mathbb{T}^3\right)$ 的标准正交基，方程组(10)~(13)的近似解定义为

$$u_n(x,t)=\sum_{s=1}^n\alpha_{sn}(t)\omega_s(x),B_n(x,t)=\sum_{s=1}^n\beta_{sn}(t)\omega_s(x)$$

未知函数 $\alpha_{sn}(t),\beta_{sn}(t),t\in\mathbb{R}^+\left(s=1,2,\cdots,n;n=1,2,\cdots\right)$ 是连续函数，且 $u_n(x,t)$ 在 $C^0\left([0,T];X_n\right)$ 中的范数可以表示为

$$\|u_n\|_{C^0([0,T];X_n)}=\max_{t\in[0,T]}\sum_{s=1}^n\left|\alpha_{sn}(t)\right|$$

因此，对任意 $k\in N$，u_n 在 $C^0\left([0,T];C^k\left(\mathbb{T}^3\right)\right)$ 中有界，并且存在常数 $C(k)>0$，有

$$\|u_n\|_{C^0\left([0,T];C^k\left(\mathbb{T}^3\right)\right)}\le C\|u_n\|_{C^0\left([0,T];L^2\left(\mathbb{T}^3\right)\right)} \tag{15}$$

近似系统定义如下：设 $\rho\in C^1\left([0,T];C^3\left(\mathbb{T}^3\right)\right)$ 是

$$\begin{cases}\rho_t+div\left(\sqrt{\rho}\sqrt{\rho}u\right)=\mu\Delta\rho\\ \rho(x,0)=\rho_{0,\delta}(x)\end{cases} \tag{16}$$

的经典解。由 $\delta^{-1}\ge\rho_{0,\delta}(x)\ge\delta>0$ 和不等式(15)以及 $\rho(x,t)>0$，根据最大值原理[26]可知，对任意 $(x,t)\in[0,T]\times\mathbb{T}^3$

$$0<\delta\exp\left(-\int_0^t\|divu\|_{L^\infty\left(\mathbb{T}^3\right)}\mathrm{d}x\mathrm{d}s\right)\le\rho(x,t)\le\delta^{-1}\exp\left(-\int_0^t\|divu\|_{L^\infty\left(\mathbb{T}^3\right)}\mathrm{d}x\mathrm{d}s\right)$$

设 $S_1(u)=\rho$，算子 $S_1:C^0\left([0,T];X_n\right)\to C^0\left([0,T];C^3\left(\mathbb{T}^3\right)\right)$ 且 $S_1(u)$ 满足 Lipshitz 连续条件：

$$\|S_1(u_1)-S_1(u_2)\|_{C^0\left([0,T];C^k\left(\mathbb{T}^3\right)\right)}\le C(n,k)\|u_1-u_2\|_{C^0\left([0,T];L^2\left(\mathbb{T}^3\right)\right)} \tag{17}$$

接下来我们在 X_n 中求解方程组(11)~(13)。对于任意给定的 $\bar{u}_n\in C\left([0,T];X_n\right)$，试验函数 $\phi\in X_n$ 有 $S(\bar{u}_n)=\rho_n$，存在近似解 $(u_n,B_n)\in C\left([0,T];X_n\right)$ 满足积分方程组

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{T}^3}\rho_n(u_n)_t\cdot\phi+\rho_n\bar{u}_n\cdot\nabla u_n\phi+\mu\Delta\rho_n u_n\phi-\left(P_1(\rho_n)+P_2(\rho_n)\right)div\phi\mathrm{d}x\\&=\int_{\mathbb{T}^3}\frac{\hbar^2}{2}\left(\sqrt{\rho_n}\nabla\sqrt{\rho_n}\cdot\nabla div\phi+2\nabla\sqrt{\rho_n}\otimes\nabla\sqrt{\rho_n}:\nabla\phi\right)+(\nabla\times B_n)\times B_n\cdot\phi\\&\quad-\mu\nabla(\rho_n u_n):\nabla\phi-\delta\left(\nabla u_n:\nabla\phi+u_n\cdot\phi\right)\mathrm{d}x\end{aligned}\tag{18}$$

$$\int_{\mathbb{T}^3}(B_n)_t\cdot\phi-\nabla\times(\bar{u}_n\times B_n)\cdot\phi\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{T}^3}-\nabla\times(\nu\nabla\times B_n)\cdot\phi\mathrm{d}x\tag{19}$$

初始条件：

$$\beta_{sn}(0)=(B_0,\omega_s)\tag{20}$$

首先，令试验函数 $\phi=\omega_j\ (j=1,2,\cdots,n)$ 我们将磁方程(19)改写成初始条件为(20)的非线性常微分方程，根据常微分方程解的存在性定理可知，对任意给定的 $\bar{u}_n\in C([0,T];X_n)$，磁方程(19)存在由 $\bar{u}_n$ 决定的唯一解 $B_n\in L^\infty\left([0,T];L^2(\mathbb{T}^3)\right)\cap L^2\left([0,T];H^1(\mathbb{T}^3)\right)$，其中 $T'\le T$。

其次，动量方程(18)等价于

$$\int_{\mathbb{T}^3}\rho_n(u_n)_t\cdot\phi+\rho_n\bar{u}_n\cdot\nabla u_n\phi+\mu\Delta\rho_n u_n\phi+\mu\nabla(\rho_n u_n):\nabla\phi+\delta\left(\nabla u_n:\nabla\phi+u_n\cdot\phi\right)\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{T}^3}G\phi\mathrm{d}x\tag{21}$$

其中

$$G=\frac{\hbar^2}{2}\rho_n\nabla\left(\frac{\Delta\sqrt{\rho_n}}{\sqrt{\rho_n}}\right)+\nabla\left(P_1(\rho_n)+P_2(\rho_n)\right)+(\nabla\times B_n)\times B_n\tag{22}$$

由 ρ_n,B_n 有界，得 $\|G\|_{L^\infty\left([0,T'];L^1(\mathbb{T}^3)\right)}\le C$。

设 $u_n(x,t)=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j(t)\omega_j(x)$，其中 $\alpha_j(t)$ 为未知函数，$\omega_j(x)$ 为试验函数，利用 Galerkin 方法，方程(21)写成

$$M(t)\alpha'(t)=A(t)\alpha(t)+B(t)$$

其中，未知函数 $\alpha(t)=\left(\alpha_1(t),\alpha_2(t),\cdots,\alpha_n(t)\right)^\top\in\mathbb{R}^n$，$M=\left(M_{i,j}\right)_{n\times n}$ 和 $A=\left(A_{i,j}\right)_{n\times n}$ 是 $n\times n$ 矩阵；向量 $B=\left(B_1,B_2,\cdots,B_n\right)^\top\in\mathbb{R}^n$ 且

$$\begin{aligned}&M_{i,j}=\int_{\mathbb{T}^3}\rho_n\omega_i\cdot\omega_j\mathrm{d}x\\&A_{i,j}=-\int_{\mathbb{T}^3}(\rho_n\bar{u}_n\nabla\omega_i)\omega_j+\mu\Delta\rho_n\omega_i\omega_j+\mu\nabla(\rho_n\omega_i):\nabla\omega_j+\delta\left(\nabla\omega_i:\nabla\omega_j+\omega_i\omega_j\right)\mathrm{d}x\\&B_i=\int_{\mathbb{T}^3}G\cdot\omega_i\mathrm{d}x\end{aligned}\tag{23}$$

因为 $\rho_n>\delta$，$\{\omega_j\}$ 线性无关，故对任意 $t\in[0,T']$，$M_{i,j}$ 可逆，由 Peano 存在定理得在 $[0,T']$ 存在唯一的 $\alpha(t)$ 连续。

设映射 $\Theta_n:C([0,T'];X_n)\to C([0,T'];X_n)$。下面我们证明映射 Θ_n 有且仅有一个点使得 $\Theta_n(\bar{u}_n)=u_n$。

首先，设 I 为凸集，证明映射 $\Theta_n:I\to I$。令方程(18)的试验函数 $\phi=\omega_i$ 同时乘 α_i，且对 $i=1,2,\cdots,n$ 时相加。

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{T}^3}\rho_n(t)|u_n|^2\mathrm{d}x=&\int_{\mathbb{T}^3}Gu\mathrm{d}x-\rho_n\bar{u}_n\cdot\nabla u_n u_n-\mu\Delta\rho_n u_n u_n-\mu\nabla(\rho_n u_n):\nabla u_n\\&-\delta\left(\nabla u_n:\nabla u_n+u_n\cdot u_n\right)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

对 $[0,T]$ 积分，由有限维赋范线性空间中范数是等价的，我们可以得到

$$\int_{\mathbb{T}^3}\rho_n(t)|u_n(t)|^2\mathrm{d}x\le C(n)\int_0^t\|G\|^2_{L^1(\mathbb{T}^3)}\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{T}^3}\rho_{0,\delta}|u_{0,\delta}|^2\mathrm{d}x$$

根据 $\|G\|_{L^\infty([0,T'];L^1(\mathbb{T}^3))} \le C$ 有界，在常数 M_0 使得

$$\frac{1}{\delta}\left(\left\|\sqrt{\rho_0}u_0\right\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}+\|B_0\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}\right)<M_0$$

当 $T(n)\le T'$ 足够小时，对于任意 $t\in[0,T(n)]$，我们有 $\|u_n(t)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}\le M_0$。定义 $I:=\left\{u_n\in C([0,T];X_n);\ \sup_{0\le t\le T(n)}\|u_n\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}\le M_0\right\}$。易得到映射 $\Theta_n: I\to I$，得证。

然后，令 $\phi=\omega_i$ 为试验函数，用 α_i' 乘(18)式并对 $i=1,2,3,\cdots,n$ 相加，由有限维赋范线性空间范数是等价性得

$$\begin{aligned}\delta\int_{\mathbb{T}^3}\left|(u_n)_t\right|^2\mathrm{d}x &\le \int_{\mathbb{T}^3}G\cdot(u_n)_t\,\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{T}^3}\rho_n\bar{u}_n\nabla u_n(u_n)_t+\mu\Delta\rho_n u_n(u_n)_t+\mu\nabla(\rho_n u_n):\nabla(u_n)_t\\ &\quad+\delta\left(\nabla u_n:\nabla(u_n)_t+u_n(u_n)_t\right)\mathrm{d}x\\ &\le\frac{\delta}{2}\|(u_n)_t\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)}+C(n,\delta,\mu)\left(\|G\|^2_{L^1(\mathbb{T}^3)}+\|\bar{u}_n\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)}\|\nabla u_n\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)}+\|u_n\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)}\right)\end{aligned}$$

因此，$\left\|\frac{\mathrm{d}u_n}{\mathrm{d}t}\right\|_{L^\infty([0,T];L^2(\mathbb{T}^3))}\le C$。根据 Aubin-Lions 引理知 Θ_n 将 I 映射到 $C([0,T(n)];X_n)$ 的紧子集。

最后，我们证明 Θ_n 的连续性。假设当 $k\to\infty$ 时，在 $C([0,T(n)];X_n)$ 中有 $\{\bar{u}_n^k\}_{k=1}^n\to\bar{u}_n$ 成立。

设 ρ_n^k,u_n^k,B_n^k 为方程组(18)~(19)的解，且 $\Theta_n(\bar{u}_n^k)=u_n^k$。借助 Aubin-Lions 引理知 ρ_n^k 在 $C([0,T(n)]\times\mathbb{T}^3)$ 中强收敛于 ρ_n，u_n^k,B_n^k 在 $C([0,T(n)];X_n)$ 中强收敛于 u_n,B_n。由方程的线性与解的唯一性推出 $\{u_n^k\}\to u_n$，且 $u_n=\Theta(\bar{u}_n)$。根据 Banach 不动点定理可知，I 中存在一点是近似方程组(10)~(13)的解，记为 (ρ_n,u_n,B_n)。然而，方程的解与 δ 有关，令 $(\rho_n^\delta,u_n^\delta,B_n^\delta)$ 为逼近系统(10)~(13)的解。为了计算方便我们先省略上标 δ，下标 n。同时，我们可将时间 t 延拓到 $[0,T]$。

4. 先验估计

在本节，我们将推导出一系列的先验估计，即能量估计。目的是为了获得弱解的紧性。

定理 2 对任意 $0<t<T$，假设 (ρ,u,B) 是方程组(10)~(13)的弱解，我们有

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(\rho,u,B)+\int_{\mathbb{T}^3}\left(H_1''(\rho)+H_2''(\rho)\right)|\nabla\rho|^2+\frac{\hbar^2}{4}\mu\rho\left|\nabla^2\log\rho\right|^2\\ &+\mu\rho|\nabla u|^2+\nu|\nabla B|^2+\delta|\nabla u|^2+\delta|u|^2\,\mathrm{d}x=0\end{aligned}\tag{24}$$

其中

$$E(\rho,u,B)=\int_{\mathbb{T}^3}\left(\frac{1}{2}\rho|u|^2+H_1(\rho)+H_2(\rho)+\frac{\hbar^2}{2}\left|\nabla\sqrt{\rho}\right|^2+\frac{1}{2}|B|^2\right)\mathrm{d}x\tag{25}$$

证明：首先，动量方程(11)两边同乘 u，然后进行分部积分，利用连续性方程(10)，可以得到

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{T}^3}\frac{1}{2}\rho|u|^2+H_1(\rho)+H_2(\rho)+\frac{\hbar^2}{2}\left|\nabla\sqrt{\rho}\right|^2\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{T}^3}\left(H_1''(\rho)+H_2''(\rho)\right)|\nabla\rho|^2\,\mathrm{d}x\\ &+\int_{\mathbb{T}^3}\left(\frac{\hbar^2}{4}\mu\rho\left|\nabla^2\log\rho\right|^2+\mu\rho|\nabla u|^2-(\nabla\times B)\times B\cdot u+\delta|\nabla u|^2+\delta|u|^2\right)\mathrm{d}x=0\end{aligned}\tag{26}$$

下面我们只考虑压力项，其余项的证明过程参考文献[19]

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{T}^3}\nabla P\cdot u\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{T}^3}\nabla P_1\cdot u\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{T}^3}\nabla P_2\cdot u\mathrm{d}x\\
&= \int_{\mathbb{T}^3}\frac{a^2\gamma}{\gamma-1}\nabla\rho^{\gamma-1}(\rho u)\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{T}^3}\frac{3a^2\epsilon}{\gamma-1}\rho^{-3}\nabla\rho u\mathrm{d}x\\
&= \int_{\mathbb{T}^3}-a^2\frac{\gamma}{\gamma-1}\rho^{\gamma-1}\nabla\cdot(\rho u)\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{T}^3}\frac{a^2\epsilon}{\gamma-1}\rho^{-3}\nabla\cdot(\rho u)\mathrm{d}x\\
&= \int_{\mathbb{T}^3}\frac{-a^2\gamma}{\gamma-1}\rho^{\gamma-1}(\mu\Delta\rho-\rho_t)\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{T}^3}\frac{a^2\epsilon}{\gamma-1}\rho^{-3}(\mu\Delta\rho-\rho_t)\mathrm{d}x\\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{T}^3}\frac{a^2}{\gamma-1}\rho^{\gamma}+\frac{a^2\epsilon}{2(\gamma-1)}\frac{1}{\rho^2}\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{T}^3}\left(a^2\gamma\mu\rho^{\gamma-2}+\frac{3a^2\epsilon\mu}{\gamma-1}\rho^{-4}\right)|\nabla\rho|^2\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{T}^3}\left(H_1(\rho)+H_2(\rho)\right)\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{T}^3}\left(H_1''(\rho)+H_2''(\rho)\right)|\nabla\rho|^2\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

磁方程(12)两边同乘 B，详细过程参见文献[19]，将所有的估计都代入(26)，我们就能够得到能量等式(24)。

引理 3 根据定理 2，用 Gronwall 不等式易得出如下结论：

$$\left\|\sqrt{\rho}u\right\|_{L^\infty\left([0,T];L^2\left(\mathbb{T}^3\right)\right)}+\left\|\sqrt{\rho}\nabla u\right\|_{L^2\left([0,T];L^2\left(\mathbb{T}^3\right)\right)}\le C \tag{27}$$

$$\|B\|_{L^\infty\left([0,T];L^2\left(\mathbb{T}^3\right)\right)}+\|B\|_{L^2\left([0,T];H^1\left(\mathbb{T}^3\right)\right)}\le C \tag{28}$$

$$L^\infty\left([0,T];H^1\left(\mathbb{T}^3\right)\right) \tag{29}$$

$$\left\|\sqrt{\rho}\nabla^2\log\rho\right\|_{L^2\left([0,T];L^2\left(\mathbb{T}^3\right)\right)}\le C \tag{30}$$

$$\sqrt{\delta}\|u\|_{L^2\left([0,T];H^1\left(\mathbb{T}^3\right)\right)}\le C \tag{31}$$

$$\|\rho\|_{L^\infty\left([0,T];L^\gamma\left(\mathbb{T}^3\right)\right)}\le C \tag{32}$$

$$\left\|\frac{1}{\rho}\right\|_{L^\infty\left([0,T];L^2\left(\mathbb{T}^3\right)\right)}\le C \tag{33}$$

$$\left\|\rho^{\frac{\gamma}{2}}\right\|_{L^2\left([0,T];H^1\left(\mathbb{T}^3\right)\right)}+\left\|\nabla\left(\frac{1}{\rho}\right)\right\|_{L^2\left([0,T];L^2\left(\mathbb{T}^3\right)\right)}\le C \tag{34}$$

证明：这里我们仅给出(34)式的证明过程

$$
\begin{aligned}
\int_0^T\int_{\mathbb{T}^3}H''(\rho)|\nabla\rho|^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t &= \int_0^T\int_{\mathbb{T}^3}\left(H_1''(\rho)+H_2''(\rho)\right)|\nabla\rho|^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
&= \int_0^T\int_{\mathbb{T}^3}\frac{P_1'(\rho)}{\rho}|\nabla\rho|^2+\frac{P_2'(\rho)}{\rho}|\nabla\rho|^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
&= \int_0^T\int_{\mathbb{T}^3}a^2\gamma\mu\rho^{\gamma-2}|\nabla\rho|^2+\frac{3a^2\epsilon\mu}{\gamma-1}\rho^{-4}|\nabla\rho|^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
&= \int_0^T\int_{\mathbb{T}^3}\frac{4a^2\mu}{\gamma}\left|\nabla\rho^{\frac{\gamma}{2}}\right|^2+\frac{3a^2\epsilon\mu}{\gamma-1}\left|\nabla\left(\frac{1}{\rho}\right)\right|^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t\le C
\end{aligned}
$$

引理 4 假设定理 2 的条件成立，则有下列不等式成立。

$$\left\|\sqrt{\rho}\right\|_{L^2\left([0,T];H^2\left(\mathbb{T}^3\right)\right)}+\left\|\sqrt[4]{\rho}\right\|_{L^2\left([0,T];W^{1,4}\left(\mathbb{T}^3\right)\right)}\le C \tag{35}$$

证明：根据 $\left\|\sqrt{\rho}\nabla^2\log\rho\right\|_{L^2\left([0,T];L^2\left(\mathbb{T}^3\right)\right)}\le C$ 可知

$$\frac{1}{4}\int_{\mathbb{T}^3}\rho\left|\nabla^2\log\rho\right|^2\mathrm{d}x\ge\frac{11}{15}\int_{\mathbb{T}^3}\left|\nabla^2\sqrt{\rho}\right|^2\mathrm{d}x$$

$$\int_{\mathbb{T}^3}\rho\left|\nabla^2\log\rho\right|^2\mathrm{d}x\ge\frac{176}{25}\int_{\mathbb{T}^3}\left|\nabla\sqrt[4]{\rho}\right|^4\mathrm{d}x$$

证明过程见参考文献[9]附录。

引理 5 假设定理 2 的条件成立，则有下列不等式成立。

$$\left\|P_1(\rho)\right\|_{L^{\frac{5}{3}}\left([0,T];L^{\frac{5}{3}}\left(\mathbb{T}^3\right)\right)}+\left\|P_2(\rho)\right\|_{L^{\frac{5}{3}}\left([0,T];L^{\frac{5}{3}}\left(\mathbb{T}^3\right)\right)}\le C \tag{36}$$

$$\left\|\frac{1}{\sqrt{\rho}}\right\|_{L^{\frac{20}{3}}\left([0,T];L^{\frac{20}{3}}\left(\mathbb{T}^3\right)\right)}\le C \tag{37}$$

证明：根据(32)，(34)，运用 Gagliadro-Nirenberg 不等式，取 $\theta=\frac{3}{5},\ p=\frac{10}{3}$

$$\begin{aligned}\left\|\rho^{\frac{\gamma}{2}}\right\|^p_{L^p\left([0,T];L^p\left(\mathbb{T}^3\right)\right)}&\le C\int_0^T\left\|\rho^{\frac{\gamma}{2}}\right\|^{p\theta}_{H^1\left(\mathbb{T}^3\right)}\left\|\rho^{\frac{\gamma}{2}}\right\|^{p(1-\theta)}_{L^2\left(\mathbb{T}^3\right)}\mathrm{d}t\\&\le C\left\|\rho^{\frac{\gamma}{2}}\right\|^{p(1-\theta)}_{L^\infty\left([0,T];L^2\left(\mathbb{T}^3\right)\right)}\int_0^T\left\|\rho^{\frac{\gamma}{2}}\right\|^2_{H^1\left(\mathbb{T}^3\right)}\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{38}$$

可以得到 ρ^γ 在 $L^{\frac{5}{3}}\left([0,T];L^{\frac{5}{3}}\left(\mathbb{T}^3\right)\right)$ 中有界。

根据(33)，(34)，运用 Gagliadro-Nirenberg 不等式，取 $\theta=\frac{3}{5},\ p=\frac{10}{3}$

$$\begin{aligned}\left\|\frac{1}{\rho}\right\|^p_{L^p\left([0,T];L^q\left(\mathbb{T}^3\right)\right)}&\le C\int_0^T\left\|\frac{1}{\rho}\right\|^{p\theta}_{H^1\left(\mathbb{T}^3\right)}\left\|\frac{1}{\rho}\right\|^{p(1-\theta)}_{L^2\left(\mathbb{T}^3\right)}\mathrm{d}t\\&\le C\left\|\frac{1}{\rho}\right\|^{p(1-\theta)}_{L^\infty\left([0,T];L^2\left(\mathbb{T}^3\right)\right)}\int_0^T\left\|\frac{1}{\rho}\right\|^2_{H^1\left(\mathbb{T}^3\right)}\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{39}$$

可以得到 $\frac{1}{\rho^2}$ 在 $L^{\frac{5}{3}}\left([0,T];L^{\frac{5}{3}}\left(\mathbb{T}^3\right)\right)$ 中有界，同时还可以得到 $\frac{1}{\sqrt{\rho}}$ 在 $L^{\frac{20}{3}}\left([0,T];L^{\frac{20}{3}}\left(\mathbb{T}^3\right)\right)$ 中有界。

根据(38)，(39)，可知 $P_1(\rho),P_2(\rho)$ 在 $L^{\frac{5}{3}}\left([0,T];L^{\frac{5}{3}}\left(\mathbb{T}^3\right)\right)$ 中有界。

引理 6 假设定理 2 的条件成立，则有下列不等式成立。

$$\left\|\nabla u\right\|_{L^{\frac{20}{13}}\left([0,T];L^{\frac{20}{13}}\left(\mathbb{T}^3\right)\right)}\le C \tag{39}$$

$$\left\|u\right\|_{L^{\frac{20}{9}}\left([0,T];L^{\frac{20}{9}}\left(\mathbb{T}^3\right)\right)}\le C \tag{40}$$

证明：对引理 3 和不等式(37)，利用 Hölder 不等式有

$$\|\nabla u\|_{L^{\frac{20}{13}}\left([0,T];L^{\frac{20}{13}}(\mathbb{T}^3)\right)} \le \left\|\frac{1}{\sqrt{\rho}}\right\|_{L^{\frac{20}{3}}\left([0,T];L^{\frac{20}{3}}(\mathbb{T}^3)\right)} \left\|\sqrt{\rho}\nabla u\right\|_{L^2\left([0,T];L^2(\mathbb{T}^3)\right)} \le C \tag{41}$$

$$\|u\|_{L^{\infty}\left([0,T];L^{\frac{4}{3}}(\mathbb{T}^3)\right)} \le \left\|\frac{1}{\sqrt{\rho}}\right\|_{L^{\infty}\left([0,T];L^{4}(\mathbb{T}^3)\right)} \left\|\sqrt{\rho}u\right\|_{L^{\infty}\left([0,T];L^2(\mathbb{T}^3)\right)} \le C \tag{42}$$

根据 Sobolev 嵌入定理知 u 在 $L^{\frac{20}{13}}\left([0,T];W^{1,\frac{20}{13}}(\mathbb{T}^3)\right)$ 中一致有界，对(41)和(42)利用 Gagliadro-Nirenberg 不等式，取 $\theta'=\frac{9}{13}, q=\frac{20}{9}$ 有

$$\begin{aligned}\|u\|^q_{L^q\left([0,T];L^q(\mathbb{T}^3)\right)} &\le C\int_0^T \|u\|^{q\theta'}_{W^{1,\frac{20}{13}}(\mathbb{T}^3)} \|u\|^{q(1-\theta')}_{L^{\frac{4}{3}}(\mathbb{T}^3)} \mathrm{d}t \\ &\le C\|u\|^{q(1-\theta')}_{L^{\infty}\left([0,T];L^{\frac{4}{3}}(\mathbb{T}^3)\right)} \int_0^T \|u\|^2_{W^{1,\frac{20}{13}}(\mathbb{T}^3)} \mathrm{d}t\end{aligned}$$

即证得(40)式。

引理 7 假设定理 2 的条件成立，则有下列不等式成立。

$$\|(\rho u)_t\|_{L^{\frac{20}{19}}\left([0,T];\left(H^s(\mathbb{T}^3)\right)^*\right)} \le C \tag{43}$$

证明：动量方程

$$(\rho u)_t = \mu\Delta(\rho u) - div(\rho u\otimes u) - \nabla P(\rho) + \frac{\hbar^2}{2}\rho\nabla\left(\frac{\Delta\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}}\right) + (\nabla\times B)\times B + \delta\Delta u - \delta u$$

根据引理 3，(40)以及 $H^2(\mathbb{T}^3)$ 连续地嵌入 $L^{\infty}(\mathbb{T}^3)$

$$\|\rho u\otimes u\|_{L^{\frac{20}{19}}\left([0,T];L^{\frac{20}{19}}(\mathbb{T}^3)\right)} \le \|\sqrt{\rho}\|_{L^2\left([0,T];L^{\infty}(\mathbb{T}^3)\right)} \|\sqrt{\rho}u\|_{L^{\infty}\left([0,T];L^2(\mathbb{T}^3)\right)} \|u\|_{L^{\frac{20}{9}}\left([0,T];L^{\frac{20}{9}}(\mathbb{T}^3)\right)}$$

推导出 $div(\rho u\otimes u)$ 在 $L^{\frac{20}{19}}\left([0,T];\left(H^s(\mathbb{T}^3)\right)^*\right)$ 中有界，由(29)，(30)可知 $\frac{\hbar^2}{2}\rho\nabla\left(\frac{\Delta\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}}\right)$ 在 $L^2\left([0,T];\left(W^{1,3}(\mathbb{T}^3)\right)^*\right)\subset L^2\left([0,T];\left(H^s(\mathbb{T}^3)\right)^*\right)$ 中有界。

任意试验函数 $\phi\in L^2\left([0,T];W^{1,3}(\mathbb{T}^3)\right)$ 有

$$\begin{aligned}\left|\int_0^T\int_{\mathbb{T}^3}\Delta(\rho u)\cdot\phi\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right| &= \left|\int_0^T\int_{\mathbb{T}^3}\nabla(\rho u)\cdot\nabla\phi\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right| \\ &= \left|\int_0^T\int_{\mathbb{T}^3}\left(\sqrt{\rho}\sqrt{\rho}\nabla u + 2\sqrt{\rho}u\nabla\sqrt{\rho}\right)\nabla\phi\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right| \\ &\le \Bigg(\|\sqrt{\rho}\|_{L^{\infty}\left([0,T];L^6(\mathbb{T}^3)\right)}\|\sqrt{\rho}\nabla u\|_{L^2\left([0,T];L^2(\mathbb{T}^3)\right)} \\ &\quad + 2\|\sqrt{\rho}u\|_{L^{\infty}\left([0,T];L^2(\mathbb{T}^3)\right)}\|\nabla\sqrt{\rho}\|_{L^2\left([0,T];L^6(\mathbb{T}^3)\right)}\Bigg)\|\nabla\phi\|_{L^2\left([0,T];L^3(\mathbb{T}^3)\right)} \\ &\le C\|\phi\|_{L^2\left([0,T];W^{1,3}(\mathbb{T}^3)\right)}\end{aligned}$$

可知，$\Delta(\rho u)$ 在 $L^2\left([0,T];\left(W^{1,3}\left(\mathbb{T}^3\right)\right)^*\right)\subset L^2\left([0,T];\left(H^s\left(\mathbb{T}^3\right)\right)^*\right)$ 中有界，Δu 在 $L^2\left([0,T];\left(H^1\left(\mathbb{T}^3\right)\right)^*\right)$ 中有界，$P(\rho)$ 在 $L^{\frac{5}{3}}\left([0,T];\left(W^{1,\frac{5}{3}}\left(\mathbb{T}^3\right)\right)^*\right)\subset L^{\frac{5}{3}}\left([0,T];\left(H^s\left(\mathbb{T}^3\right)\right)^*\right)$ 中有界。$(\nabla\times B)\times B=(B\cdot\nabla)B-\frac{1}{2}\nabla\left(|B|^2\right)$ 在 $L^2\left([0,T];L^1\left(\mathbb{T}^3\right)\right)$ 中有界。根据以上估计及 Sobolev 嵌入定理知 $(\rho u)_t$ 在 $L^{\frac{20}{19}}\left([0,T];\left(H^s\left(\mathbb{T}^3\right)\right)^*\right)$ 有界，得证。

引理 8 假设定理 2 的条件成立，则有下列不等式成立。

$$\left\|\left(\frac{1}{\rho}\right)_t\right\|_{L^{\frac{20}{19}}\left([0,T];L^{\frac{20}{19}}\left(\mathbb{T}^3\right)\right)}\le C \tag{44}$$

证明：连续性方程(10)两边同时除以 $-\rho^2$

$$\partial_t\left(\frac{1}{\rho}\right)=\frac{1}{\rho}divu-\nabla\left(\frac{1}{\rho}\right)u+\frac{2\mu\left(\Delta\sqrt{\rho}+4\left|\nabla\sqrt[4]{\rho}\right|^2\right)}{-\rho^{3/2}}$$

由引理 3 和(40)利用 Hölder 推导出

$$\left\|\nabla\left(\frac{1}{\rho}\right)u\right\|_{L^{\frac{20}{19}}[0,T];L^{\frac{20}{19}}(\Omega)}\le\left\|\nabla\left(\frac{1}{\rho}\right)\right\|_{L^2\left([0,T];L^2(\Omega)\right)}\|u\|_{L^{\frac{20}{9}}\left([0,T];L^{\frac{20}{9}}(\Omega)\right)}\le C$$

有界。同理得到其余项在 $L^{\frac{20}{19}}\left([0,T];L^{\frac{20}{19}}\left(\mathbb{T}^3\right)\right)$ 有界。

引理 9 [19]假设定理 2 的条件成立，则有下列不等式成立。

$$\|B\|_{L^{\frac{10}{3}}\left([0,T];L^{\frac{10}{3}}\left(\mathbb{T}^3\right)\right)}\le C \tag{45}$$

$$\|\partial_t B\|_{L^{\frac{4}{3}}\left([0,T];\left(H^s\left(\mathbb{T}^3\right)\right)^*\right)}\le C \tag{46}$$

其中 $s>\frac{5}{2}$。

5. 敛散性

根据在前一节先验估计的基础上，本节我们根据 Sobolev 嵌入定理，紧性理论和 Aubin-Lions 引理求近似解 $\left(\rho_n^\delta,u_n^\delta,B_n^\delta\right),n\to\infty,\delta\to0$ 的极限。首先令 $\delta>0$，求 $n\to\infty$ 时极限，然后再求 $\delta\to0$ 的极限。由上述估计，易得到下述收敛。

定理 3 在定理 2 的假设下，当 $n\to\infty$ 时，

$\sqrt{\rho_n^\delta}\to\sqrt{\rho^\delta}$ 在 $L^2\left([0,T];H^1\left(\mathbb{T}^3\right)\right)$ 中强收敛；

$P_1\left(\rho_n^\delta\right)\to P_1\left(\rho^\delta\right)$ 在 $L^1\left([0,T];L^1\left(\mathbb{T}^3\right)\right)$ 中强收敛；

$P_2\left(\rho_n^\delta\right)\to P_2\left(\rho^\delta\right)$ 在 $L^1\left([0,T];L^1\left(\mathbb{T}^3\right)\right)$ 中强收敛；

$\frac{1}{\rho_n^\delta}\to\frac{1}{\rho^\delta}$ 在 $C\left([0,T];L^2\left(\mathbb{T}^3\right)\right)$ 中强收敛；

$\rho_n^\delta u_n^\delta \to \rho^\delta u^\delta$ 在 $L^2\left(\left[0,T\right];L^2\left(\mathbb{T}^3\right)\right)$ 中强收敛；
$\rho_n^\delta \to \rho^\delta$ 在 $C\left(\left[0,T\right];L^2\left(\mathbb{T}^3\right)\right)$ 中强收敛；
$u_n^\delta \to u^\delta$ 在 $L^{\frac{20}{9}}\left(\left[0,T\right];L^{\frac{20}{9}}\left(\mathbb{T}^3\right)\right)$ 中弱收敛；
$\nabla u_n^\delta \to \nabla u^\delta$ 在 $L^{\frac{20}{13}}\left(\left[0,T\right];L^{\frac{20}{13}}\left(\mathbb{T}^3\right)\right)$ 中弱收敛；
$B_n^\delta \to B^\delta$ 在 $L^2\left(\left[0,T\right];H^1\left(\mathbb{T}^3\right)\right)$ 中弱收敛；
$B_n^\delta \to B^\delta$ 在 $L^\infty\left(\left[0,T\right];L^2\left(\mathbb{T}^3\right)\right)$ 中弱*收敛；
$B_n^\delta \to B^\delta$ 在 $L^2\left(\left[0,T\right];L^2\left(\mathbb{T}^3\right)\right)$ 中强收敛。

证明：连续性方程(10) 除以 $\sqrt{\rho_n^\delta}$

$$\partial_t\sqrt{\rho_n^\delta} = -div\left(\sqrt{\rho_n^\delta}u_n^\delta\right) + \frac{1}{2}\sqrt{\rho_n^\delta}\,divu_n^\delta + \mu\Delta\sqrt{\rho_n^\delta} + \mu\frac{\left|\nabla\sqrt{\rho_n^\delta}\right|^2}{\sqrt{\rho_n^\delta}}$$

由引理 3 推导出右边第一项在 $L^2\left(\left[0,T\right];\left(H^1\left(\mathbb{T}^3\right)\right)^*\right)$ 中有界。根据引理 3 及(35)知其余项在 $L^2\left(\left[0,T\right];L^2\left(\mathbb{T}^3\right)\right)$ 中有界，因此可以得到 $\left\|\partial_t\sqrt{\rho_n^\delta}\right\|_{L^2\left(\left[0,T\right];\left(H^1\left(\mathbb{T}^3\right)\right)^*\right)} \le C$。(35)及上式运用 Aubin-Lions 引理推导出 $\sqrt{\rho_n^\delta}$ 强收敛于 $\sqrt{\rho^\delta}$。

首先，$H^1\left(\mathbb{T}^3\right)$ 到 $L^2\left(\mathbb{T}^3\right)$ 的插入是紧的，而 $L^p\left(\mathbb{T}^3\right)$ 的基本列 f_n 可选取子序列几乎处处收敛于 $f \in L^p\left(\mathbb{T}^3\right)$，故存在序列 $\left\{\rho_n^\delta\right\}$ 在 $L^1\left(\left[0,T\right];L^1\left(\mathbb{T}^3\right)\right)$ 几乎处处收敛。其次，由(36)知 $P_1\left(\rho_n^\delta\right),P_2\left(\rho_n^\delta\right)$ 在 $L^{\frac{5}{3}}\left(\left[0,T\right];L^{\frac{5}{3}}\left(\mathbb{T}^3\right)\right)$ 弱收敛。因此 $P_1\left(\rho_n^\delta\right),P_2\left(\rho_n^\delta\right)$ 在 $L^1\left(\left[0,T\right];L^1\left(\mathbb{T}^3\right)\right)$ 强收敛。

引理 3 和(44)运用 Aubin-Lions 引理推导出 $\frac{1}{\rho_n^\delta}$ 强收敛。

$$\nabla\left(\rho_n^\delta u_n^\delta\right) = \rho_n^\delta\nabla u_n^\delta + u_n^\delta\nabla\rho_n^\delta = \sqrt{\rho_n^\delta}\sqrt{\rho_n^\delta}\nabla u_n^\delta + 2\sqrt{\rho_n^\delta}u_n^\delta\nabla\left(\sqrt{\rho_n^\delta}\right) \tag{47}$$

推导出 $\rho_n^\delta u_n^\delta \in L^2\left(\left[0,T\right];W^{1,\frac{3}{2}}\left(\mathbb{T}^3\right)\right)$ 结合(43)，借助 Aubin-Lions 引理得到 $\rho_n^\delta u_n^\delta$ 在 $L^2\left(\left[0,T\right];L^2\left(\mathbb{T}^3\right)\right)$ 强收敛于 $\rho^\delta u^\delta$。

引理 3 和(47)推导出 ρ_n^δ 在 $L^\infty\left(\left[0,T\right];L^3\left(\mathbb{T}^3\right)\right)$ 有界和 $\partial_t\rho_n^\delta$ 在 $L^2\left(\left[0,T\right];L^{\frac{3}{2}}\left(\Omega\right)\right)$ 有界，借助 Aubin-Lions 引理可得到 ρ_n^δ 在 $C\left(\left[0,T\right];L^2\left(\mathbb{T}^3\right)\right)$ 强收敛于 ρ^δ。

定理 3 最后一项的证明见参考文献[19]。

$\sqrt{\rho_n^\delta}u_n^\delta \to \sqrt{\rho^\delta}u^\delta$ 在 $L^2\left(\left[0,T\right];L^2\left(\mathbb{T}^3\right)\right)$ 中强收敛。

(40)和 u_n^δ 几乎处处收敛推导出 u_n^δ 在 $L^2\left(\left[0,T\right];L^2\left(\Omega\right)\right)$ 强收敛，以及 $\rho_n^\delta u_n^\delta$ 在 $L^2\left(\left[0,T\right];L^2\left(\mathbb{T}^3\right)\right)$ 中强收敛且几乎处处收敛，通过 Aubin-Simon's 引理可知 $\sqrt{\rho_n^\delta}u_n^\delta$ 在 $L^2\left(\left[0,T\right];L^2\left(\mathbb{T}^3\right)\right)$ 中强收敛。

接下来，在近似系统(10)~(13)中求 $n\to\infty$ 的极限且 $\rho=\rho_n^\delta, u=u_n^\delta, B=B_n^\delta, \bar{u}_n=u_n^\delta$。在弱解的意义上得到 $\partial_t\rho^\delta + div\left(\rho^\delta u^\delta\right) = \mu\Delta\rho^\delta$。然后，我们逐项考虑方程组(11)~(13)。

根据定理 3 可知 $\sqrt{\rho_n^\delta}$ 在 $L^2\left(\left[0,T\right];H^1\left(\mathbb{T}^3\right)\right)$ 中强收敛，从而推断出量子项 $\sqrt{\rho_n^\delta}\nabla\sqrt{\rho_n^\delta}$，$\nabla\sqrt{\rho_n^\delta}\otimes\nabla\sqrt{\rho_n^\delta}$ 在 $L^1\left(\left[0,T\right];L^1\left(\mathbb{T}^3\right)\right)$ 中弱收敛。

接下来，我们考虑非线性项。根据定理 3 知 $\sqrt{\rho_n^\delta}u_n^\delta$ 在 $L^2\left(\left[0,T\right];L^2\left(\mathbb{T}^3\right)\right)$ 强收敛，$\sqrt{\rho_n^\delta}$ 在 $L^2\left(\left[0,T\right];H^1\left(\mathbb{T}^3\right)\right)$ 强收敛结合引理 3 推导出

$\rho_n^\delta u_n^\delta \otimes u_n^\delta \to \rho^\delta u^\delta \otimes u^\delta$ 在 $L^1\left(\left[0,T\right];L^1\left(\mathbb{T}^3\right)\right)$ 中弱收敛；

$\rho_n^\delta u_n^\delta \to \rho^\delta u^\delta$ 在 $L^1\left(\left[0,T\right];L^1\left(\mathbb{T}^3\right)\right)$ 中弱收敛。

定理 3 中 B 分别在 $L^2\left(\left[0,T\right];H^1\left(\mathbb{T}^3\right)\right)$ 弱收敛，$L^2\left(\left[0,T\right];L^2\left(\mathbb{T}^3\right)\right)$ 强收敛结合引理 3 推得：

$\left(\nabla\times B_n^\delta\right)\times B_n^\delta \to \left(\nabla\times B^\delta\right)\times B^\delta$ 在 $L^1\left(\left[0,T\right];L^1\left(\mathbb{T}^3\right)\right)$ 中弱收敛；

$u_n^\delta \times B_n^\delta \to u^\delta \times B^\delta$ 在 $L^1\left(\left[0,T\right];L^1\left(\mathbb{T}^3\right)\right)$ 中弱收敛。

根据上述收敛，我们得到逼近系统(10)~(13)的弱解 $\left(\rho^\delta,u^\delta,B^\delta\right)$。我们可以利用同样的方式，证明当 $\delta\to 0$ 时，存在解为 $\left(\rho,u,B\right)$ 且满足初始条件(5)和相容性条件(6)的系统(1)~(4)。定理 1 得证。

6. 总结与展望

本文研究了三维粘性量子磁流体系统，通过引入冷压处理对流项证明了该系统全局弱解的存在性。首先，利用 Galerkin 方法构造了逼近系统，其次通过能量不等式推导出一系列的先验估计，最后运用 Sobolev 嵌入定理，Aubin-Lions 引理等证明了近似解 $\left(\rho_n^\delta,u_n^\delta,B_n^\delta\right)$，$n\to\infty,\delta\to 0$ 时，即原系统的弱解。

本文的创新点在于通过引入不同的冷压处理对流项，将文献[19]定理 1.1 中的绝热指数 $\gamma>3$ 扩大到 $\gamma>1$。接下来可以考虑将冷压引入不同的粘性系统求解其弱解的存在性。

基金项目

山西省国际合作基地与平台项目(202104041101019)。

参考文献

[1] Loffredo, M.I. and Morato, L.M. (1993) On the Creation of Quantized Vortex Lines in Rotating He II. *Il Nuovo Cimento B*, **108**, 205-215. https://doi.org/10.1007/BF02874411

[2] Ferry, D. and Zhou, J.R. (1993) Form of the Quantum Potential for Use in Hydrodynamic Equations for Semiconductor Device Modeling. *Physical Review B*, **48**, 7944-7950. https://doi.org/10.1103/PhysRevB.48.7944

[3] Grant, J. (1973) Pressure and Stress Tensor Expressions in the Fluid Mechanical Formulation of the Bose Condensate Equations. *Journal of Physics A*: *Mathematical*, *Nuclear and General*, **6**, L151-L153. https://doi.org/10.1088/0305-4470/6/11/001

[4] Wyatt, R.E. (2005) Quantum Dynamics with Trajectories: Introduction to Quantum Hydrodynamics. Springer Science & Business Media, Berlin.

[5] Antonelli, P. (2021) Remarks on the Derivation of Finite Energy Weak Solutions to the QHD System. *Proceedings of American Mathematical Society*, **149**, 1985-1997. https://doi.org/10.1090/proc/14502

[6] Wang, G. and Guo, B. (2021) A New Blow-Up Criterion of the Strong Solution to the Quantum Hydrodynamic Model. *Applied Mathematics Letters*, **119**, Article ID: 107045. https://doi.org/10.1016/j.aml.2021.107045

[7] Wang, G. and Guo, B. (2020) A Blow-Up Criterion of Strong Solutions to the Quantum Hydrodynamic Model. *Acta Mathematica Scientia*, **40**, 795-804. https://doi.org/10.1007/s10473-020-0314-3

[8] Zhang, J., Wang, S. and Geng, F. (2022) Blow up of Smooth Solutions to the Isentropic Compressible Quantum Hydrodynamic Model. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **45**, 10917-10924. https://doi.org/10.1002/mma.8425

[9] Jüngel, A. (2010) Global Weak Solutions to Compressible Navier-Stokes Equations for Quantum Fluids. *Siam Journal on Mathematical Analysis*, **42**, 1025-1045. https://doi.org/10.1137/090776068

[10] Dong, J. (2010) A Note on Barotropic Compressible Quantum Navier-Stokes Equations. *Nonlinear Analysis*, *Theory*, *Methods and Applications*, **73**, 854-856. https://doi.org/10.1016/j.na.2010.03.047

[11] Jiang, F. (2011) A Remark on Weak Solutions to the Barotropic Compressible Quantum Navier-Stokes Equations. *Nonlinear Analysis*: *Real World Applications*, **12**, 1733-1735. https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2010.11.005

[12] Gisclon, M. and Lacroix-Violet, I. (2015) About the Barotropic Compressible Quantum Navier-Stokes Equations.

Nonlinear Analysis, **128**, 106-121. https://doi.org/10.1016/j.na.2015.07.006

[13] Lü, B., Zhang, R. and Zhong, X. (2019) Global Existence of Weak Solutions to the Compressible Quantum Navier-Stokes Equations with Degenerate Viscosity. *Journal of Mathematical Physics*, **60**, Article ID: 121502. https://doi.org/10.1063/1.5127797

[14] Tang, T. and Zhang, Z. (2019) A Remark on the Global Existence of Weak Solutions to the Compressible Quantum Navier-Stokes Equations. *Nonlinear Analysis*: *Real World Applications*, **45**, 255-261. https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2018.07.009

[15] 董建伟, 琚强昌. 可压缩量子 Navier-Stokes 方程组光滑解的爆破[J]. 中国科学: 数学, 2020, 50(6): 873-884.

[16] Yang, J., Peng G., Hao, H., *et al*. (2020) Existence of Global Weak Solution for Quantum Navier-Stokes System. *International Journal of Mathematics*, **31**, Article ID: 2050038. https://doi.org/10.1142/S0129167X2050038X

[17] Antonelli, P., Hientzsch, L.E. and Spirito, S. (2021) Global Existence of Finite Energy Weak Solutions to the Quantum Navier-Stokes Equations with Non-Trivial Far-Field Behavior. *Journal of Differential Equations*, **290**, 147-177. https://doi.org/10.1016/j.jde.2021.04.025

[18] 唐童, 牛聪. 量子 Navier-Stokes 方程弱解的全局存在性[J]. 数学物理学报, 2022, 42(2): 387-400.

[19] Yang, J. and Ju, Q. (2014) Global Existence of the Three-Dimensional Viscous Quantum Magnetohydrodynamic Model. *Journal of Mathematical Physics*, **55**, Article ID: 081501. https://doi.org/10.1063/1.4891492

[20] Li, H., Cheng, M. and Yan, W. (2017) Global Existence and Large Time Behavior of Solutions for Compressible Quantum Magnetohydrodynamics Flows in T^3. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **452**, 1209-1228. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2017.03.060

[21] Wang, G. and Guo, B. (2019) Existence and Blow-Up of the Solutions to the Viscous Quantum Magnetohydrodynamic Nematic Liquid Crystal Model. *Science China Mathematics*, **62**, 469-508. https://doi.org/10.1007/s11425-017-9165-4

[22] 王朋杰. 量子磁流体-液晶方程组经典解的整体存在性和衰减[D]: [硕士学位论文]. 贵阳: 贵州师范大学, 2022.

[23] Yang, Y. Zhou, Y. and Tao, Q. (2020) Time-Periodic Solution to the Compressible Viscous Quantum Magnetohydrodynamic Model. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik Und Physik*, **71**, 172-193. https://doi.org/10.1007/s00033-020-01404-7

[24] Simon, J. (1987) Compact Sets in the Space $L^p(O, T; B)$. *Annali di Matematica Pura ed Applicate*, **146**, 65-96. https://doi.org/10.1007/BF01762360

[25] Nirenberg, L. (1959) On Elliptic Partial Differential Equations. *Annali Della Scuola. Normale Superiore di Pisa-Scienze Fisiche e Maremathiche*, **13**, 115-162.

[26] Feireisl, E. (2004) Dynamics of Viscous Compressible Fluids. Oxford University Press, Oxford. https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780198528388.001.0001