

矩阵论的教学方法探讨

任林源

西安工业大学基础学院, 陕西 西安

收稿日期: 2022年4月20日; 录用日期: 2022年5月17日; 发布日期: 2022年5月24日

摘要

本文结合我校矩阵论教学方法的现状分析, 首先分析了矩阵范数教学中存在的一些主要问题和诸多因素, 研究影响范数教学效果的问题, 通过加强兴趣教学、案例教学、数学建模、对比等方法分层次进行课堂教学, 并且利用现代技术提高课堂教学效果, 研究表明这些方法较好的提高了教学质量。

关键词

矩阵论, 矩阵范数, 矩阵函数, 探讨

Discussion on the Teaching Method of Matrix Theory

Linyuan Ren

Basic College of Xi'an University of Technology, Xi'an Shaanxi

Received: Apr. 20th, 2022; accepted: May 17th, 2022; published: May 24th, 2022

Abstract

Combined with the analysis of the current situation of matrix theory teaching methods in our school, this paper first analyzes some main problems and many factors existing in matrix norm teaching, studies the problems affecting the effect of norm teaching, carries out classroom teaching at different levels by strengthening interest teaching, case teaching, mathematical modeling, comparison and other methods, and uses modern technology to improve the effect of classroom teaching. The research shows that these methods have better improved the teaching quality.

Keywords

Matrix Theory, Matrix Norm, Matrix Function, Discussion

Copyright © 2022 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

矩阵论课程是以《高等数学》、《高等代数》等课程的主要内容为基础,是将微积分学中一元实函数的理论、研究方法和研究思想等推广到矩阵函数领域的一门课程,是理科和工科研究生各个专业的一门核心数学课程。本课程旨在使学生能够掌握矩阵论的主要内容,培养学生运用所学知识,对具体的实际问题能够进行分析、解决的实际能力。本课程实用性很强,高度抽象,具有数学的严密性,又具有应用的广泛性[1]-[6],所以矩阵论是可以培养学生严密的逻辑性思维和处理工程应用中实际问题能力的一门数学基础和应用的课程,学好该课就具有重要的理论和实际意义,更为重要的是通过矩阵论的教学,可以培养学生的爱国热情和文化自信心[7] [8]。

但是,从我校近年的教学实际和学生学习情况来看,主要存在以下问题:教学内容庞杂,涉及到矩阵理论的各个研究方向,但是该课程的理论教学课时只有 32 学时,课时少,教学时间远远不够,所以老师只能采用满堂灌和简单的理论推导,每节课只讲解教材的内容,与实际工程应用结合远远不够,因此学生就对每节课的新内容,思想上很容易产生畏难情绪,实际教学效果不是很好。在 2021 级教学班中的实际教学中,我们通过以下一些教学方法的探讨研究,取得了不错的教学效果。

2. 加强以兴趣为导向的教学方法

“兴趣是最好的老师。”无论做什么事情,只要有了兴趣,才能积极主动地投入。作为学生在学习每门课程的过程中,只有先有了兴趣,才能增强对所学课程的求知欲和好奇心。矩阵范数具有概念抽象的特点,学习不容易。为了更好地激发学生的学习兴趣,“第一次课”的教学就显得尤为重要,在课堂第一节课要激发学生的学习兴趣,具体的,要以提高学生兴趣为导向、加强案例教学方法的的教学。

我们知道范数理论在计算数学中,尤其在数值代数中,研究数值方法的收敛性、稳定性以及误差分析等问题时,矩阵范数理论也是显得十分重要[3] [4] [5]。在讲矩阵范数时,可以介绍范数其实是用来刻画向量和矩阵大小的一种度量,起源于实数的绝对值和向量长度等概念。对于一个 $m \times n$ 阶的矩阵,自然也可以看成是 mn 维的向量,按照向量的方法定义它的“长度”。另外,当 A 是方阵时,那么有 $|\det A| \leq \prod_{i=1}^n \|a_{(i)}\|$, 其中 $a_{(i)}$ 是 A 的行向量,所以该式可以理解为以 $a_{(i)}$ 的长度,这样讲解,学生听得很认真,也理解了几何体的长度体积等概念的继续推广很有意义。

3. 加强以案例教学为导向的教学方法

案例式教学是指教师首先要精选适合本次教学内容的案例,然后由学生利用所学和将要学习的知识点进行深入分析,并给出案例的策划方案。通过案例式教学法,既看到了该门课程在实际生活中的应用,也提高了学生解决实际问题的能力。

例如,在讲解矩阵的幂级数是可以联系实变函数和复变函数的泰勒级数,重点讲解它们不同之处和容易混淆的地方,力求做到精讲、讲透。为了引入矩阵函数的定义,要给学生讲清,矩阵函数的定义不像实变函数的定义是利用三要素给出定义的,而是利用无穷级数的幂级数展开定义的[1]: 设 $f(z)$ 在 $z=0$ 的幂级数为 $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$, ($|z| < r, r > 0$), 矩阵 $A \in C^{n \times n}$ 的谱半径 $\rho(A) < r$, 称 $f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k$ 为

对应于 $f(z)$ 的矩阵函数。

4. 加强以数学建模和软件教学为导向的教学方法

针对我校的学生特点和办学理念，在教学的过程中，教师应该制定一套合适的教学方案。例如，在教学中加强建模和软件教学就显得尤为重要，培养学生的实际应用能力，比如，可以介绍文献[5]中综合实验一：濒危动物生态仿真实验就是一个很好的应用实例，利用矩阵运算模拟生物种群的变化规律，在研究这个马尔可夫过程中，将系数矩阵对角化，同时也利用到特征向量，这样的实例和学生学习的线性代数中的特征值和特征向量就联系起来，抽象的概念有了实际的应用，从课堂反应来看，学生学习这部分内容兴趣盎然。

数学软件 Matlab 不仅具有强大的数值运算功能，也具有强大的二维和三维绘图能力。其数据的可视化和图像处理满足了工程、科学计算的处理需要。在实际工程领域可能经常遇到大型稀疏矩阵；稀疏矩阵更特殊一点，比如是带状矩阵，这样的实际工程例子 5~14 [6] [8]。另外也可以引入数学建模思想，培养学生的实际应用能力，例如，文献[5]中综合实验一：濒危动物生态仿真实验就是一个很好的应用实例，利用矩阵运算模拟生物种群的变化规律，在研究这个马尔可夫过程，将矩阵对角化，也利用到特征向量，这会使得学生兴趣盎然，喜欢上数学课。

5. 加强矩阵论对比式教学的教学方法

矩阵论作为高等数学的后续课程，与高等数学有许多相似之处也有不同之处。因此，在教学中采用对比式教学的方法就显得尤为重要。对于相同或相似的内容尽量少讲，或留给学生自学。例如，极限的运算法则、导数的公式和复积分的性质等。重点讲解两者不同的和容易混淆的地方，力求做到精讲、讲透。又比如实函数 $\sin x$ 是可以展开为泰勒级数的，复变函数 $\sin z$ 而矩阵函数 $\sin A \cos A$ 也可以具有以下的展开形式

$$\sin A = A - \frac{1}{3!}A^3 + \frac{1}{5!}A^5 + \dots$$

$$\cos A = A - \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{4!}A^4 + \dots$$

总之，对比学习可以使学生比较容易记忆和应用，当然老师在讲解这一块可以此列表讲解，更有利于进行对比，也可以展开推导，找出异同点，借以加深学生的理解和记忆，这样的教学可以使得学生加深对高等数学概念定理公式的再理解。

6. 加强矩阵论爱国主义的思政教育

中国古人具有极其深刻的极限思想，并把这一思想用于数学中，取得一系列重要的数学成果。《庄子》中就含有相当深刻的极限思想。其中“天下篇”有这样的话：“一尺之棰，日取其半，万世不竭”。意思是，有一个一尺长的木棒，第一天截取它的一半，以后每一天截取其前一天剩余的木棒的一半，这样截取法，取 1 万年也截取不完。通过分析，我们知道，数列的极限和矩阵列的极限表示： $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 和 $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ 也具有上述类似的意义，所以在矩阵极限教学就可以进行爱国主义教育，在矩阵论矩阵序列极限的教学中采用思政教学的方法就很有用。

又比如，我国魏晋时期的数学家刘徽在注释《九章算术》时创立了有名的“割圆术”，他创造性地将极限思想应用到数学领域。他设圆的半径为一尺，从圆内接正六边形开始，每次把边数加倍，用勾股定理算得圆内接正十二、二十四、四十八…边形的面积，内接正多边形的边数越多，内接多边形的面积

就与圆面积越接近。正如刘徽所说：“割之弥细，所失弥少，割之又割，以至不可割，则与圆周合体，而无所失矣”这已经运用了极限论的思想来解决求圆周率的实际问题了，“以至不可割，则与圆周合体”，这一思想是墨家“不可分”思想的实际应用[3] [6] [7] [8]。

这些中国古代早期萌芽的极限思想是我们进行爱国思政教育绝佳的案例。矩阵论课程思政的内容不仅仅是传统思政的教学内容，而应该包含诸如价值观、人生观、道德观以及中国传统文化等丰富广泛的内容，通过这些中国古代微积分思想的萌芽和矩阵论的对比讲解，使得学生对中国古代数学思想的先进性更具有自信性，从而进一步培养学生的爱国主义思想。

参考文献

- [1] 程云鹏, 张凯院, 徐仲. 矩阵论[M]. 西安: 西北工业大学, 2015.
- [2] 北京大学数学系. 高等代数[M]. 北京: 人民教育出版社, 1978.
- [3] 蒋正新, 施国梁. 矩阵理论及其应用[M]. 北京: 北京航空学院出版社, 1988.
- [4] 何汉林, 等. 数值分析[M]. 北京: 科学出版社, 2008.
- [5] 车刚明, 等. 数值分析[M]. 西安: 西北工业大学出版社, 2002.
- [6] 艾冬梅, 等. MATLAB 与数学实验[M]. 第二版. 北京: 机械工业出版社, 2005.
- [7] 王树禾. 数学演义[M]. 北京: 科学出版社, 2008.
- [8] 王强锋. 机械专业基础课程思政元素挖掘研究[J]. 高校研究学报, 2021(2): 4-6.