Advances in Education 教育进展, 2022, 12(5), 1577-1584
Published Online May 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/ae
https://doi.org/10.12677/ae.2022.125243

CPFS结构视域下的平面向量教学实践与探索

刘清韵*，陈　洋

苏州科技大学，数学科学学院，江苏　苏州

收稿日期：2022年4月20日；录用日期：2022年5月17日；发布日期：2022年5月24日

摘　要

CPFS结构是数学学科特有的、优良的个体数学认知结构，它对数学学习尤其是数学问题解决能力有直接的影响，基于CPFS结构理论以及CPFS结构理论相关研究，采用文献分析法，探究CPFS结构对问题解决能力的影响，研究表明CPFS结构对问题解决有正向的影响。根据以上分析，选取“平面向量”知识模块，发现并总结目前高中平面向量教学中存在的问题，并结合CPFS结构理论提出合理的平面向量教学实践建议，包括教学中重点体现概念的形成，帮助学生建立概念域与概念系；教学中重点体现命题之间的联系，帮助学生建立命题域与命题系；改善教学模式，引导学生自主建构与完善平面向量CPFS结构。

关键词

CPFS结构，平面向量，问题解决，教学实践

The Practice and Exploration of Flat Vector Teaching from the Perspective of CPFS Structure

Qingyun Liu*, Yang Chen

School of Mathematical Sciences, Suzhou University of Science and Technology, Suzhou Jiangsu

Received: Apr. 20th, 2022; accepted: May 17th, 2022; published: May 24th, 2022

Abstract

The CPFS structure is a unique and excellent individual mathematical cognitive structure in mathematics. It has a direct impact on mathematics learning, especially the ability to solve mathematical problems. Based on the CPFS structure theory and related researches on the CPFS struc-

*第一作者。

文章引用: 刘清韵, 陈洋. CPFS 结构视域下的平面向量教学实践与探索[J]. 教育进展, 2022, 12(5): 1577-1584.
DOI: 10.12677/ae.2022.125243

ture theory, this paper uses the method of literature analysis to explore the impact of CPFS structure on problem-solving ability. Research shows that CPFS structure has a positive impact on problem-solving. According to the above analysis, the knowledge module of "plane vector" is selected to discover and summarize the problems existing in the current high school plane vector teaching, and combine the CPFS structure theory to put forward reasonable practical suggestions for plane vector teaching, including the formation of key concepts in teaching, to help students establish concept domain and concept department; focus on the relationship between propositions in teaching, help students establish proposition domain and proposition system; improve teaching mode, guide students to independently construct and perfect the plane vector CPFS structure.

Keywords

CPFS Structure, Flat Vector, Problem Solving, Teaching Practice

1. 引言

认知结构作为教育心理学中的一个重要概念，它反映了学习者大脑内关于某一个知识的全部内容。2003 年，喻平与单墫教授首次提出了个体 CPFS 结构理论，其中"个体 CPFS 结构"是指由概念域(concept field)、概念系(concept system)、命题域(proposition field)、命题系(proposition system)所构成的数学学科特有的、优良的个体数学认知结构[1]。其中，对于一个数学概念 C (或命题 A)，它的所有等价定义的图式，叫做概念 C 的概念域(或命题 A 的命题域)；一些具有弱抽象、强抽象、广义抽象的概念及其之间的抽象关系形成概念链，一些具有推出关系的命题及其之间的推出关系形成命题链；如果两条概念链(命题链)的交集是非空的，那么这两条概念链(命题链)相交，如果 m 条概念链中至少有一条概念链(命题链)与其余 $(m-1)$ 条概念链(命题链)均相交，那么这 m 条概念链(命题链)的图式即为概念系(命题系)。个体 CPFS 结构对于研究数学学习者认知过程非常重要，它不仅是数学学习者特有的认知结构，也是数学学习者对于数学理论知识体系的真实反映。

当下高中数学教学中，学生与老师都倾向于培养与提升学习者的数学问题解决能力，在文[1]中，CPFS 结构作为一种数学学科特有的、优良的个体数学认知结构，这种认知结构对数学学习有直接的影响，特别是对数学问题解决有重要的影响。因此探究 CPFS 结构对数学问题解决能力的影响，有利于为教师提供合理的教学建议，为学生找到适合自己的学习途径。

2. CPFS 结构对数学问题解决能力的影响

2.1. CPFS 结构对问题解决各认知过程的影响

喻平教授在其博士学位论文中提出了解决数学问题的四个阶段以及相对应的数学问题解决的四个认知过程[2]。他认为，解题中每一个阶段都会对应相应的认知加工方式，他将解决数学问题的过程分成理解问题、选择算子、应用算子和结果评价 4 个阶段；与这 4 个阶段相对应的是问题表征、模式识别、解题迁移和解题监控 4 个解题认知过程。基于该理论，喻平教授分别做了三个与 CPFS 结构相关的实证研究，一是"个体 CPFS 结构与问题表征的相关研究"[3]，二是"个体 CPFS 结构对解题迁移的影响"[4]，三是"自我监控、CPFS 结构与数学成绩的相关研究"[5]。

在实证研究一中，结果表明个体的 CPFS 结构与问题解决中的问题表征有密切的相关性，也就是说，个体 CPFS 结构水平能够影响了个体对数学问题的表征，更具体地，CPFS 结构越完善的学生，越能够快速、正确并且合理地表征问题；反过来，能够正确、合理地表征数学问题的学生其 CPFS 结构越完善。

在实证研究二中，结果表明个体 CPFS 结构与数学问题解决中的远迁移有密切的相关性，更具体地，CPFS 结构越完善的学生，越能够在解题过程中产生远迁移，并且数学问题解决中的远迁移的实现与否受到 CPFS 结构中的程序性知识的影响更大。

在实证研究三中，结果表明学生解题自我监控能力及个体 CPFS 结构都与学生的数学学业成绩有密切的相关性，其中个体 CPFS 结构与成绩的相关程度更为紧密；在初中组中个体的 CPFS 结构与其自我监控水平具有相关性；数学成绩越优秀的学生自我监控能力越高、CPFS 结构越完善；解题自我监控能力与个体 CPFS 结构在解决数学问题中二者没有显著性相关，虽然二者相互独立，但可以相互补偿共同影响个体的数学成绩。

综上所述，我们了解到个体 CPFS 结构能够影响数学问题解决过程中的问题表征、解题迁移中的远迁移，并且个体 CPFS 结构与解题自我监控能够相互补偿地影响个体的数学成绩。

2.2. 特定数学知识模块下 CPFS 结构对问题解决能力的影响

伴随着 CPFS 结构理论的完善，越来越多的专家学者试图从具体的教学内容或数学知识角度，来讨论在该部分知识下的个体 CPFS 结构进行研究。

在函数部分，张雪萍以函数为例，研究了初中生 CPFS 结构与数学解题能力的相关性[6]；在三角函数部分，王宁基于 CPFS 结构理论分析了高中生三角函数部分问题解决的能力并提出了相关的教学建议[7]；沈健基于 CPFS 结构理论分别研究了高中生三角函数 CPFS 结构现状以及高中生解决三角函数问题的能力现状，并对高中生三角函数 CPFS 结构与解题能力的相关性进行分析，最后提出教学建议[8]；在平面解析几何部分，晁冉冉研究了 CPFS 结构下的解析几何解题能力。研究表明：文科生和理科生的解析几何 CPFS 结构有显著差别；性别不是解析几何 CPFS 结构的影响因素；不同年级对解析几何 CPFS 结构的影响显著[9]。

综上所述，相关研究多是围绕代数部分知识展开，少数围绕平面解析几何部分知识展开，析其原因大致有二，一方面，代数部分的知识点更加系统，利于构建 CPFS 结构也更利于对 CPFS 结构以及问题解决能力进行测评；另一方面，由于师范生实习时间多处于每个学年的第一学期，此时学校内所讲授的内容局限了研究内容。因此，研究将选取高中数学中的“平面向量”作为主体，基于 CPFS 结构理论以及 CPFS 结构对问题解决能力的影响，提出高中平面向量教学的合理建议。

3. 高中平面向量教学中存在的问题

3.1. 忽视概念的形成过程

在平面向量相关知识的讲授过程，许多教师认为平面向量的相关概念无须理解，只需强硬记忆即可，然而这种做法十分不利于学生对平面向量相关概念的形成过程，从而使得学生无法建构完善的平面向量知识结构，即无法建构完善的平面向量 CPFS 结构。此外，教师习惯于给出概念后直接讲解例题，让学生在解决例题的过程中理解相关知识，例题确实有助于学生理解知识点，但若学生无法自主地形成并建构相关概念，则无法对其进行应用，此时强行解决例题会事倍功半。

教师忽视概念的形成过程的另一个表现是重视习题讲解而忽视概念本身的性质，这不仅违背新课改中“以学生为主体”的理念，也违背了学生的认知过程。

3.2. 忽视知识点间的联结性

平面向量部分的知识点是一个整体性的知识体系，其中各个知识点之间的联系十分紧密，然而目前教师在讲授过程中，往往只讲解教学安排的内容，忽视平面向量各知识点之间的联系。例如“平面向量的数量积”与“向量的模”、“向量的夹角”以及“向量的投影”有直接联系，我们不仅可以利用“向量的模”、“向量的夹角”去求“向量的数量积”，还可以利用“数量积”反过来求“向量的模”、“向量的夹角”等，教师如果没有加以强调，则学生在求解“向量的模”时，很难联想到利用“向量的数量积”，无法进行举一反三。在讲解完一部分知识之后，教师也往往忽视知识的总结或总结不全面，无法给予学生建构平面向量 CPFS 结构的引导与帮助。

3.3. 教学方法存在的问题

目前高中内教师为节约时间，利用更多的课时向学生传授解题方法，因此在新授课中仍采用讲授法为主的教学方法，这在一定程度上忽视了学生的主体性，限制了学生的思考探究能力，不利于学生主动建构 CPFS 结构，学生在不理解知识的情况下被动地接收解题方法的讲授，无法将教师传授的解题方法进行应用，因此问题解决能力无法提升。

3.4. 忽视教材的重要性

教材作为课程内容的文本表现形式，是众多专家、学者结合课程计划、课程标准以及学生的认知过程所编制的，因此教材是教师在教学过程中的重要参考依据。然而一方面，目前高中教师更多地在教材基础上，依赖于教学参考书进行教学，而忽略教材中的例题与练习题；另一方面，许多高中教师无法很好地利用教材，机械地念教材中的概念与例题，并未很好地钻研其中暗含的知识引入、知识讲解、知识应用等过程，从而导致学生觉得数学课堂十分无聊，对数学学科失去了兴趣。

4. CPFS 结构视域下的平面向量教学实践与探索

综上所述，CPFS 结构能够影响学生的平面向量问题解决能力水平，并且 CPFS 结构越完善，问题解决能力水平越高。平面向量 CPFS 结构是学生在学习的过程中，通过理解、推理、归纳等方式主动建构的平面向量相关概念与概念之间的抽象关系、平面向量相关命题与命题之间的推出关系共同构成平面向量知识模块的知识体系。研究发现，CPFS 结构对问题解决能力均有显著的影响，因此平面向量 CPFS 结构越完善的学生解决平面向量问题的能力越高。因此，在平面向量教学过程中，重点应当完善学生平面向量 CPFS 结构。完善学生平面向量 CPFS 结构包括以下三个方式：一是通过引导学生主动形成平面向量相关概念，帮助学生建立平面向量概念域与概念系；二是通过引导学生对平面向量相关命题与命题之间逻辑关系的归纳、推理与证明，帮助学生建立平面向量建立平面向量命题域与命题系；三是通过教学模式的改善，构建教师引导、学生主体的教学环境，引导学生资助建构与完善平面向量 CPFS 结构。

4.1. 教学中重点体现概念的形成，帮助学生建立概念域与概念系

平面向量的概念域包括了平面向量某个知识点不同表示形式的等价定义的图式，概念与概念之间通过强抽象、弱抽象、广义抽象关系连接形成概念链，平面向量概念链以及它们之间的数学关系构成了平面向量概念系。在平面向量教学过程中，重视学生概念的形成过程，可以更好地帮助学生建立平面向量概念域与概念系，从而完善学生平面向量 CPFS 结构，提升学生平面向量问题解决能力。

4.1.1. 平面向量概念的形成

平面向量的概念为“平面内既有大小又有方向的量”，这与物理中的“矢量”的概念如出一辙，而

学生在学习平面向量之前，已经在物理课程中学习了“位移”、“速度”、“力”等矢量，因此引入物理中的“位移”、“速度”或“力”作为实际背景有利于学生对平面向量概念的形成过程。

如《2019 人教 A 版高中数学必修二》中，先引入小船的位移，强调了位移的大小为 15n mile 和方向为东南方向；再引入小船的速度，大小为 10n mile/h，方向为东南方向；最后引入物体受到的重力与浮力，强调重力与浮力大小相等，方向相反。该实际背景从“位移”、“速度”与“力”三个量出发，强调它们不仅有大小，还有方向，从而总结出平面向量的概念——“既有大小又有方向的量”。教师在教学过程中应强调以学生学过的物理为基础的，由具体到抽象的平面向量概念形成过程，有利于加深学生对平面向量的理解。

除此之外，由平面向量的概念引申出了诸多相关概念，包括平面向量的长度(数量)——向量的模、平面向量的表示方法——几何表示与字母表示、两个特殊向量——零向量与单位向量、相等向量、平行向量、共线向量、相反向量。教师在教学过程中也应重视这些概念的形成，让学生体会利用联系的观点、类比的方法建构关于平面向量概念的概念系。

4.1.2. 平面向量运算概念的形成

高中的数学课程中，平面向量的运算包括平面向量的加法、减法、数乘与数量积四种，对于这四种向量运算概念的形成，可采用以下方法：

借助并类比物理中“力的合成与分解”来引导学生了解并理解向量的加减运算定义，有助于学生对平面向量的加法与减法运算定义的建构。

类比代数中“乘法”的引入方式——借助加法解释乘法，引导学生借助平面向量的加法运算，形成平面向量的数乘运算的概念，巧妙处理数量与向量之间的运算关系，强化学生对平面向量的数乘运算的理解。

强调平面向量的加法、减法、数乘运算之间的关系，三者均可称为平面向量的线性运算，有助于学生在头脑中建构三者之间的逻辑关系。

借助并类比物理中“功”的概念来引导学生了解并理解平面向量的数量积运算定义，有助于学生对平面向量的加法与减法运算定义的建构。

4.1.3. 平面向量坐标表示与运算概念的形成

平面向量的坐标表示是在平面向量基本定理的基础上进行展开的，因此，想要充分理解平面向量的坐标表示，就需要重点掌握平面向量基本定理。平面向量基本定理的内容是同一平面内两个不共线向量可以通过线性组合表示平面内任意一个向量，这两个不共线的向量称为基底。也就是说，给定一组基底，那么平面内任意一组向量都可以由这对基底表示，那么什么样的基底更方便呢？很明显，一对相互垂直的单位向量作为基底更方便，这样结合平面直角坐标系，我们不但可以用坐标标记点的位置，还可以用来表达平面向量。在平面向量基本定理概念中包含了“不共线”、“线性组合”、“任意”这样的关键词，说明平面向量基本定理与平面向量的概念、平面向量的运算均有千丝万缕的逻辑关系，因此平面向量的坐标表示也与其存在逻辑关系。教师在讲授过程中应重点强调通过平面向量基本定理引出平面向量的坐标表示的过程，帮助学生建构二者之间的联系，而不是简单地讲解平面向量坐标表示的定义。

平面向量的坐标表示是平面向量表示方法的一种，在前文中已经介绍了平面向量的两种表示方法，因此，在学习完平面向量的坐标表示后，教师应引导学生总结平面向量的三种表示方法——几何表示法(有向线段)、字母表示法(符号表示法)、坐标表示法。帮助学生完善平面向量相关概念的建构。

平面向量四种运算的坐标表示与平面向量四种运算一一对应，教师在教学过程中应强调平面向量的运算可以采用两种方式——定义法与坐标法，引导学生建构二者之间联系，进而能够做到一题多解。

4.2. 教学中重点体现命题之间的联系，帮助学生建立命题域与命题系

数学命题无法脱离数学概念而独立存在，因此研究平面向量相关命题时，需同时考虑其与平面向量相关概念的联系。平面向量知识模块中的命题域与命题系，可以是平面向量内部的一组或几组等价命题构成命题域，再由诸多命题域组成平面向量本身的命题系，它们强调平面向量概念与命题之间的内部联系；也可以是延伸到三角函数、解三角形等其他知识板块的一组或几组等价命题构成命题域，再由诸多命题域组成平面向量与代数和几何部分的全方位的命题系，强调平面向量概念与命题的外部联系。因此，教师重视平面向量命题的内部联系与外部联系，有利于帮助学生建立命题域与命题系，从而完善学生平面向量 CPFS 结构，提升学生平面向量问题解决能力。

4.2.1. 完善平面向量概念与命题之间的内部联系

由于平面向量知识点内部的紧密联系，学生在学习过程中无法将某个知识点脱离整体去理解，因此在平面向量中，每定义一个命题(定理)，需要用其他相关概念或命题(定理)去铺垫。如“平面向量共线定理”，需要用到“共线向量”与“向量的数乘运算”为基础；再如平面向量基本定理，需要用到“共线向量”、“向量的加减运算”、“向量的数乘运算”为基础。

除此之外，命题与命题之间也存在一定的逻辑关系。平面向量部分本身包含了两大定理，分别是“平面向量共线定理”与“平面向量基本定理”。平面向量中有一个重要的命题——“若 A，B，C 三点共线，$\boldsymbol{OB}=\lambda\boldsymbol{OA}+\mu\boldsymbol{OC}$，则 $\lambda+\mu=1$。”该命题须运用到“平面向量共线定理”与“平面向量基本定理”共同推导。诸如此类的结论还有许多，因此同时需要善于归纳命题之间的逻辑，每掌握一个命题不仅要了解它的等价说法，还要了解其充分条件与必要条件。

充分掌握平面向量概念与命题之间的关系以及命题与命题之间的关系，有助于命题域与命题系的完善，因此教师在教学过程中，不仅要重视解题方法的讲授，更要重视知识点之间的连结性与关联性，可以利用概念图等形式帮助学生建构平面向量知识点之间的联系。每当学习一个新知识时，首先需引导学生思考并回顾相关概念与命题，重视知识点间的内部联系；每讲完一部分平面向量知识点，可以进行知识梳理，帮助学生整理并完善知识点之间的逻辑关系。

4.2.2. 完善平面向量概念与命题之间的外部联系

平面向量作为数学知识模块的一部分，也是代数与几何的桥梁，因此平面向量知识模块不是独立存在的，它与其他知识模块具有紧密联系。如“向量的模”、“向量的投影”与平面几何具有紧密联系，“向量的夹角”与三角函数具有紧密联系等。而且解三角形中，正弦定理与余弦定理的推导过程涉及到了平面向量的应用。

基于平面向量的性质，在数学问题中，平面向量也常常与其他内容联系起来，以平面向量综合问题的形式呈现，如平面向量与三角函数的综合、平面向量与平面解析几何的综合、平面向量与函数的综合等，而解决这类问题时就须重视平面向量概念与命题之间的外部联系。除此之外，平面向量不仅与数学知识之间紧密联系，它与物理学科也有紧密联系。

由于平面向量不仅与之前学过的知识产生联系，还与后面学习的知识产生联系，甚至沟通代数与几何两大模块、数学与物理两大学科，教师需要在平时的教学中不断建立平面向量概念与命题之间的外部联系，在讲解相关知识点时需要揣度能否贯穿平面向量知识，但需要注意跨度不宜过大，要符合学生的认知规律。

4.3. 改善教学模式，引导学生自主建构与完善平面向量 CPFS 结构

CPFS 结构作为数学学科特有的、优良的存在于个体头脑中的认知结构，需要在教学过程中以学生为

主体，教师作为引导者，引导学生主动建构，而不是一味地讲授与灌输。因此需要教师在教学过程中做到完成讲授法到问答法的教学方法的转变、创造性地使用教材、提供学生足够的思考时间。

4.3.1. 完成讲授法到问答法的教学方法的转变

在课堂中是教师主导还是学生主体一个明显的区分方式就是教师所采用的教学方法。在以学生为主体的课堂中，教师更多地采用问答法，引导学生主动地去建构知识结构。教师以提问的形式，引发学生进行思考，更多地培养学生独立思考能力与逻辑能力，并以提问形式一步步引出知识点，相比于直接抛出知识点更利于学生对该知识的深层理解。

问答法要求教师在问题的设置上严谨合理，不仅要符合学生自身的认知结构，还要建立起知识点之间的逻辑关系，循序渐进、由浅入深，突出典型概念与典型命题的形成过程。

4.3.2. 创造性地使用教材

新一次课程改革中提出“用教材教”、“创造性地使用教材”的理念。目前高中教师仍喜欢借助“教辅”进行教学，忽视了教材的必要性，一味的讲授也忽视了学生主动建构知识的过程。在最新一版的人教 A 版高中数学教材中，更多地体现了结合实例形成概念的过程以及知识之间的逻辑性，创造性地使用教材能够提升学生思考与建构知识的能力。

“创造性”体现在教师在教学过程中不完全按照教材顺序组织教学，也可巧妙地调换其中的顺序，使得在课堂上学生真正处于主体地位，教师能够帮助并引导学生建构平面向量知识。如“平行向量”的概念，教材中首先介绍了平行向量的概念再列举实例来作为概念的应用与巩固。而学生在掌握平面向量的概念之后，完全有能力首先思考实例，再进行“平行向量”概念的形成，按照这样的顺序组织教学，能够使学生自主形成并建构相关概念，即创造性地使用教材，有利于学生对于典型概念的理解，并且这样使用教材，显然要求学生联系相关的概念，有利于学生知识结构的完善。

4.3.3. 提供学生足够的思考时间

教师在提出问题后，需要给学生充分思考的时间，并由学生自己来回答问题，而不是教师急于给出正确答案忽略了学生思考的必要性。

在教学过程中，不仅教师可以提问题，学生通过思考后也可以提出与教学内容相关问题，教师应鼓励这种行为，并可引导其他同学对其问题进行解答或教师给出提示引导学生进一步思考。在学生思考过程中，教师可以选择合适的衔接语进行衔接，保证课堂的连贯性以及教师的引导作用。若在学生思考过程中遇到困难，或学生所给结果与教师预想存在偏差时，教师可对学生干预指导，帮助学生解决困难。除此之外，教师在设置问题时需要指向性明确，以免学生在思考时“走弯路”。

5. 结论

CPFS 结构是数学学科特有的、优良的个体数学认知结构，它对学生的问题解决能力有一定影响，CPFS 结构越完善，问题解决能力水平越高。基于此，高中生平面向量 CPFS 结构对平面向量问题解决能力也有一定影响。

分析目前高中平面向量教学中存在的问题，主要包括以下四点：忽视概念的形成过程；忽视知识点间的联结性；忽视教学方法存在的问题；忽视教材的重要性。

根据以上的研究与分析，若想提高高中生平面向量问题解决能力，则应重点完善高中生平面向量 CPFS 结构，主要包括以下几个方面：

1) 教学中重点体现概念的形成，帮助学生建立概念域与概念系。包括平面向量概念的形成、平面向量运算概念的形成、平面向量的坐标表示概念的形成。

2) 教学中重点体现命题之间的联系，帮助学生建立命题域与命题系。包括完善平面向量概念与命题之间的内部联系、完善平面向量概念与命题之间的外部联系。

3) 改善教学模式，引导学生自主建构与完善平面向量 CPFS 结构。包括完成讲授法到问答法的教学方法的转变、创造性地使用教材、提供学生足够的思考时间。

基金项目

江苏省研究生实践创新计划——高中生个体 CPFS 结构对问题解决能力的影响(SJCX21_1365)。

参考文献

[1] 喻平, 单墫. 数学学习心理的 CPFS 结构理论[J]. 数学教育学报, 2003, 12(1): 12-16.
[2] 喻平. 数学问题解决认知模式及教学理论研究[D]: [硕士学位论文]. 南京: 南京师范大学, 2002.
[3] 喻平. 个体 CPFS 结构与数学问题表征的相关性研究[J]. 数学教育学报, 2003, 12(3): 11-15.
[4] 喻平. 数学问题解决中个体的 CPFS 结构对迁移的影响[J]. 数学教育学报, 2004, 13(4): 13-16.
[5] 喻平. 中学生自我监控能力和 CPFS 结构对数学学业成绩的影响[J]. 数学教育学报, 2004, 13(1): 23-26.
[6] 张雪萍. 初中生 CPFS 结构与数学解题能力的相关性研究[D]: [硕士学位论文]. 西安: 陕西师范大学, 2017.
[7] 王宁. 基于 CPFS 结构下的高中生三角函数解题能力的研究[D]: [硕士学位论文]. 长春: 长春师范大学, 2019.
[8] 沈健. 高中生三角函数 CPFS 结构与解题能力的相关性研究[D]: [硕士学位论文]. 南京: 南京师范大学, 2020.
[9] 晁冉冉. 基于 CPFS 结构下的解析几何解题能力研究[D]: [硕士学位论文]. 济南: 山东师范大学, 2017.