

基于APOS理论的初中数学概念教学实践初探

——初中“直线和圆的位置关系”教学

冯 亮, 戴阔斌, 杨玉梅, 王雪君

黄冈师范学院数学与统计学院, 湖北 黄冈

收稿日期: 2023年5月5日; 录用日期: 2023年7月26日; 发布日期: 2023年8月3日

摘 要

数学概念是数学学习的知识基础和逻辑起点, 对学生数学学习有非常重要的作用。APOS理论属于建构主义理论, 强调数学概念教学是构建学生心智的过程, 能有效揭示数学的本质。为了更好地指导教师进行概念教学, 笔者基于APOS理论设计了一次直线与圆的位置关系的概念教学, 分析了APOS理论下操作或活动阶段、过程阶段、对象阶段、模型阶段中教学过程的呈现, 期待在该APOS理论的指导下, 数学概念实践中能有效提升教学效率, 提高学习积极性, 学生的身心发展和学习能力得到更大的提升。

关键词

初中数学, APOS理论, 概念教学

Elementary Study on the Practice of Mathematics Concept Teaching in Junior Middle School Based on APOS Theory

—Teaching “the Position Relation between Line and Circle” in Junior Middle School

Liang Feng, Kuobin Dai, Yumei Yang, Xuejun Wang

School of Mathematics and Statistics, Huanggang Normal University, Huanggang Hubei

Received: May 5th, 2023; accepted: Jul. 26th, 2023; published: Aug. 3rd, 2023

Abstract

The concept of mathematics is the knowledge base and logical starting point of mathematics

文章引用: 冯亮, 戴阔斌, 杨玉梅, 王雪君. 基于 APOS 理论的初中数学概念教学实践初探[J]. 创新教育研究, 2023, 11(8): 2051-2057. DOI: 10.12677/ces.2023.118305

learning, which plays a very important role in students' mathematics learning. APOS theory belongs to constructivism theory, which emphasizes that the teaching of mathematical concepts is the process of constructing students' minds and can effectively reveal the essence of mathematics. In order to better guide teachers in concept teaching, the author designs a concept teaching based on the APOS theory of the position relationship between the line and the circle, analyzes the presentation of the teaching process in the operation or activity stage, process stage, object stage and model stage under the APOS theory. It is expected that the practice of mathematical concepts can effectively improve the teaching efficiency under the guidance of the APOS theory. Learning enthusiasm is improved, and students' physical and mental development and learning ability are enhanced.

Keywords

Junior Middle School Mathematics, APOS Theory, Concept Teaching

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 背景分析

数学课程标准中曾提出数学课程应该回归生活,返璞归真,还原数学的本来面貌,努力解释数学概念的发生过程和本质。数学概念具有两重性,即代表一种结果,又表示一种过程的演算,是具有现实背景和丰富寓意的数学过程。新课改下的课堂教学对教师提出了更多的要求,从而在教学中关注知识的发展历程,凸显教育教学的主线,彰显数学思想和方法,以落实数学核心素养的培养是我们的重要任务[1]。数学中有一些重要的内容、方法、思想是需要学生经历较长的认识过程,逐步理解和掌握吸收。概念的形成需要学生的主动建构,这就需要尊重学生的主体性。

当前,很多课堂还存在着追求教学进度、注重结果,而忽视过程的现状,教师过多依赖自身的教学经验和判断,采用传统的教学模式进行概念教学,缺乏科学的理论指导作为支撑。在进行概念教学时,没有遵循到完整的知识发展过程,缺少操作-过程-对象-模型阶段中任何一个环节,学生对概念的理解都会受到影响。这样的教学过程,不利于学生对数学概念进行深层次的理解,只能达到应试的基本要求,也没有对学生的能力起到质的提升,长此以往,对数学的兴趣会逐渐降低。实际上,对于数学课堂上的概念教学,应该注重以探究合作的方式进行,让学生在“做中学”,在做中生长,体会知识的生成过程,锻炼学生的发现问题、提出问题、分析问题、解决问题的能力,最后引出对象,澄清所学习对象的符号、定义,给学生以清晰地概念,再形成知识的综合模型。

APOS理论在概念教学中有着极强的科学性和指导性,重视学生的主体性,重视课堂上的实践活动、师生的互动交流,可以基于APOS理论展开对数学概念的探究,反映学生的思维过程,揭示数学概念的本质,能够较好地揭示概念形成的过程,与数学学科教学的特性一致[2]。通过APOS理论的研究,笔者基于APOS理论设计了《直线与圆的位置关系》的概念教学,按照四个阶段逐一分析教学过程。由此以本文章展现出来,期望对教师设计概念教学模式有所帮助。

2. 案例正文——如何理解概念教学中的“APOS理论”

APOS理论在概念教学中常用,属于建构主义的分支。该理论由美国数学家杜宾塞斯等人在教育研究实践中提出,该理论强调在教学过程中将数学概念和数学实例结合,学生通过自身的经验,将两者联

系起来, 让学生经历数学概念的形成过程。

APOS 理论将数学概念形成过程分为以下四个阶段: 操作或活动阶段(Action)、过程阶段(Process)、对象阶段(Object)、模型阶段(Schema)。其中, “操作或活动阶段”指学生通过外显的实践探究活动获得概念的本质属性; “过程阶段”是上一阶段的内化和提升, 即学生通过对外显的数学探究活动的进一步思考, 抽象出概念的本质特征, 将新概念纳入自己的认知结构; “对象阶段”是给抽象出的概念的本质特征赋予形式化的定义和符号, 使其成为一个具体的对象; “模型阶段”是学生知识积累的发挥阶段, 将新概念与其他概念建立联系, 形成知识的综合模型, 将这个模型纳入自身的认知结构, 与已有知识建立新的实质性联系。在这些阶段中, 以“问题链”为主线贯穿整个教学方式, 在实践中对学生的思维能力的培养是可行, 这些数学思维能力的形成和发展, 不仅是长期的教学目标, 更是师生实现自我突破的要求和挑战, 学生的认知结构再不断地优化调整, 学生的认知水平也在提高[3]。

《义务教育数学课程标准(2022 年版)》指出在数学课程中应有数与代数、图形与几何、统计与概率、综合与实践四个部分, 旨在培养学生的问题意识、创新意识和解决现实问题的能力, 其中图形与几何帮助学生直观地理解数学, 在整个数学过程中发挥着重要作用, 而多变形的内角和是数与代数中重要的一节。前人在多边形的内角和这一章节上, 在教学设计上进行了丰富的探索, 但是并未将其概念教学的本质与理论有效结合, 从而导致学生在探索时存在推导困难、概念模糊、想象力匮乏的特点, 难以进行变式练习, 针对以上问题, 笔者在 APOS 的理论基础上, 以直线与圆的位置关系为例阐述概念教学, 以期相互借鉴, 对后期存在困惑的教师在突破学生重难点时能够有所帮助。

3. 教学背景分析

3.1. 教学内容分析

本节课属于人教版教材初中数学九年级上册第 24 章第二节“直线与圆的位置关系”的内容, 是图像与几何领域中重要一节。本内容起着承上启下的作用, 学生在此之前已经学过了点与圆的位置关系, 此节以此为基础, 通过合作观察、动手探究直线和圆的相对运动, 研究直线和圆的位置关系。主要体现了类比、数形结合的思想, 为后面学习圆和圆的位置关系, 以及继续学习几何知识做好铺垫。

3.2. 学情分析

九年级的学生好奇心和求知欲强的特性, 联系生活实际问题吸引学生注意, 结合本节课要学习的内容, 多开展探究环节, 激发学生学习的兴趣和积极性。在日常生活经验中, 学生对于直线和圆的位置关系也有一定的感性认知, 数形结合的思维有一定基础, 但类比的能力还有待提高, 对于知识间的相互关联性还不够。

4. 教学目标及重难点

1) 知识与技能: 能根据直线和圆的位置关系的定义、性质和判定, 掌握判断直线和圆的位置关系的方法。

2) 过程与方法: 理解直线和圆的三种位置关系, 体验通过比较圆心到直线的距离和半径之间的大小及公共点的个数判断直线与圆的位置关系; 领会数形结合的数学思想方法, 提高问题发现、分析问题、解决问题的能力。

3) 情感态度与价值观: 让学生亲身经历数学研究的过程, 体验探索的乐趣, 增强学习数学的兴趣, 感受数学思想内涵, 养成良好的思维习惯。

教学重点: 直线和圆的位置关系的判定和性质。

教学难点：直线和圆的位置关系的性质与判定的应用。

5. 教学实施过程

5.1. 操作阶段

操作阶段是让学生通过外显的操作活动和探究活动，让学生在亲身体验中收获知识，从而逐渐收获概念的内隐知识，这也是教学的关键所在。但需要注意的是，外显的操作活动容易被简单化为具体的动手表象活动，从而会给老师添加时长和组织的麻烦，也会加重学生的负担。其实，“外显的数学探究活动”还包括一些“抽象的经验或知识”对学习对象内隐本质的显现。

师：同学们有去天安门广场看过升旗吗？有没有注意到升旗的时间是不一样的呢

生：是因为日出的时间不同，而升旗是根据日出的时间来改变的。

师：很不错，那接下来，我们一同欣赏一下日出时的画面(播放幻灯片)，海上生明月，天涯共此时，太阳刚刚升起来时，然后红了半边天，十分的美丽。如果将太阳想象成圆，屋顶想象成直线，动用手中的直尺与圆形纸片，根据公共点的个数进行区分，判断一下直线与圆有几种位置关系，把你的探究成果与同学分享。

学生在观看的同时发现数学元素——圆与直线。让学生在中学，亲身体会知识的生长过程，能够有效培养学生的合作精神和交往精神，从实例中抽象出数学的特征，用现代化教学手段把抽象的物体形象化，使学生能更加深入的领会知识。思维是学习的起点，为了通过有效地“教”促进学生更好地“学”，教师应能够有效理解教材、理解学生，通过科学的预设困难来启发学生的数学思维，从而提高学生的课堂学习效率[4]。

生：就教师的提问动手探究并引出课题，在挪动直尺的过程中，感受几何图形位置关系的直观化。

师：讲授，带领学生共同得出答案：

① 直线 l 和 $\odot O$ 有2个公共点 \Leftrightarrow 直线 l 和 $\odot O$ 相交；

② 直线 l 和 $\odot O$ 只有1个公共点 \Leftrightarrow 直线 l 和 $\odot O$ 相切；

③ 直线 l 和 $\odot O$ 没有公共点 \Leftrightarrow 直线 l 和 $\odot O$ 相离。

相交：直线和圆有两个公共点，这时我们说这条直线和圆相交，这条直线叫做圆的割线。相切：直线和圆只有一个公共点，这时我们说这条直线和圆相切。这条直线叫做圆的切线，这个点叫做切点。相离：直线和圆没有公共点，这时我们说这条直线和圆相离。

生活实际与数学相结合，引出本节课的课题直线与圆的位置关系，让学生认识到数学来源于生活，并高于生活。将抽象的位置关系建立在实物的基础上，在经历和体验中，感受概念的本质属性。在探究图形的位置关系，我将一个图形固定不动，而另一个图形慢慢靠近，从而在这个运动过程中探究他们某个时刻的静态特征，是研究位置关系常用的方法。同时，探究活动也能够激发学生的学习兴趣，引导学生发现问题、提出问题、分析问题、解决问题，也就是在关注核心素养的过程中，着重聚焦“四能”，并且将其贯穿于整个数学教育过程[5]。

5.2. 过程阶段

过程阶段是操作阶段的内化和深化，用“形”来判断位置关系是模糊的，应该用数量关系，才具有严谨性和科学性，这样才能将科学的意识纳入学生的认知系统中[6]。不仅如此，在过程中穿插观察、讨论、合作等数学活动的开展，可使学生更加熟悉概念的性质，并在探究中逐渐获得解决问题的一般方法——类比转化等。

师：在面临以下情形时，你能否清晰地说明直线与圆的位置关系？

生：疑惑，表示不能。

与相应的公共点的个数相连接，如果直线与圆的位置太近时，无法从形的角度进行刻画，让学生明白需要严谨和科学的判断直线与圆的位置关系[7]。

师：能不能类化点与圆的位置关系得出直线与圆的位置关系，试着回想一下点与圆的位置关系。

生：我知道，点与圆有三种位置关系，当点在圆外时， $d > r$ ，点在圆内时， $d < r$ ，点在圆上时， $d = r$ 。

通过回顾埋下铺垫，以此知识为基础。

师：观察在直线与圆在运动过程中，能不能也更加量化的方式刻画，如果将半径定为 r ，将直线到圆心的位置定为 d ，那么应该如何刻画呢，数值的大小又是如何改变的呢，并填写下表。

让学生从直线与圆的位置关系得到定义，通过定义的探索，加深对相关概念的理解，在让学生思考是否还有其他的方法，培养学生的探究精神，引出对数量关系的探究，承上启下。通过师生互动，生生互动的教学活动过程，形成学生的体验性认识，体会成功的愉悦，提高数学学习的兴趣，树立学好数学的信心，培养锲而不舍的钻研精神和合作交流的科学态度。

师：你画的图有公共点吗？有几个？如果 $\odot O$ 的半径为 r ，圆心到直线的距离为 d ，类比两者的大小：① 直线和圆相交 $\Leftrightarrow d < r$ ，直线与圆有 个公共点；② 直线和圆相切 $\Leftrightarrow d = r$ ，直线与圆有 个公共点；③ 直线和圆相离 $\Leftrightarrow d > r$ ，直线与圆有 个公共点。

生：模仿点与圆的位置关系刻画直线与圆的位置关系，并根据数量的改变用半径和距离判断直线与圆的位置关系。

在用数量研究位置关系的过程中，同学们通过观察数量大小的变化，体验数学严谨的精神。通过预设连环追问，螺旋式提升学生思维能力，激发学生探究数学的兴趣，课堂生成也反应了课堂追问的必要性[8]。根据点与圆的位置关系的理解和掌握运用知识的正迁移，类化得出直线与圆的位置关系，在过程阶段，就展现了对操作阶段的深化，更加突出了概念的本质，并引导学生一层层的推导，从而深化了学生的理解、感悟。整个过程中也渗透出了类比、转化的数学思想。

5.3. 对象阶段

对象阶段是赋予抽象概念以明确定义和符号，使其明确化、标准化，设计到知识的结构性。在直线与圆的位置关系中，对象阶段就是将位置关系数量化，将概念明晰，三种关系都能够有效通过数量关系刻画出来。

师：设 $\odot O$ 的半径为 r ，圆心 O 到直线 L 的距离为 d ， d 与 r 的大小关系是怎样的？

生：2 个公共点 \Leftrightarrow 相交 \Leftrightarrow 圆心到直线 l 的距离 $d < r$ ；1 个公共点 \Leftrightarrow 相切 \Leftrightarrow 圆心到直线 l 的距离 $d = r$ ；0 个公共点 \Leftrightarrow 相离 \Leftrightarrow 圆心到直线 l 的距离 $d > r$ 。

引导学生用类比的方法进行探究，将两种方法相结合，通过交点的个数、位置关系、数量关系进行判断，让学生理解三者之间的内在联系和结构框架，能有效训练学生的迁移思维，又能调动学生的积极性，突破重难点，形成大数学观。

师：在直角 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AC = 3$ cm， $BC = 4$ cm，则以 C 为圆心， r 为半径的圆 C 与 AB 有怎样的位置关系？1) $r = 2$ cm，2) $r = 2.4$ cm，3) $r = 3$ cm，要判断圆与 AB 的位置关系须比较什么？通过多媒体设备以 C 为圆心做圆，动态直观感受。

生：动手练习，完成知识点的回顾。

通过这个练习，能够使使学生更加清楚知识结构，能够在题目中去挖掘我们所需要的信息，再与所学的知识点建立联系，从而起着巩固新知的作用。

5.4. 模型阶段

模型阶段是学生知识的积累与应用，将知识与其他相关联的知识建立起联系，形成知识的综合模型，从而更好地去解决问题。模型阶段是知识点的总结和深化，会使学生在实际中不断加深自己对知识点的理解，是总结和拓展阶段，通过持续的加工，会更加完善学生的知识结构，思维也能够得到有效训练，认知水平也会更上一个台阶。

师：这节课接近尾声了，同学们都收获了哪些知识呢？哪位同学愿意与大家分享一下？

生：判定直线与圆的位置关系的方法有两种：根据定义，由直线与圆的公共点的个数来判断；根据性质，由圆心到直线的距离 d 与半径 r 的关系来判断。在实际应用中，常采用第二种方法判定。

在小结环节先让学生发言，最后教师表扬全部学生并总结，不仅可以检验学生对本节课重点内容的认知情况，更能进一步增强学生的自信心和荣誉感，使他们更加热爱数学。

师：请同学们填写表 1。

Table 1. Judgement and nature of three positional relationships

表 1. 三种位置关系的判定与性质

直线与圆的位置关系	相交	相切	相离
公共点的个数	2	1	0
圆心到直线的距离 d 与半径 r 的关系	$d < r$	$d = r$	$d > r$
公共点的名称	交点	切点	无
直线的名称	割线	切线	无

生：完成并相互核对。

师：通过学习，总结回顾学习内容，交流收获与不足，让学生理清知识脉络。

布置作业：基础题：习题 24.2：第 1、2 题(必做)

思考题：如何作圆的切线？过圆上一点可以作几条切线？过圆外一点呢？(必做)

探究题：准备两个钥匙扣，类比本节课探索过程，自主在课下探索圆与圆的位置关系。(选做)圆心到直线的距离如何计算？有哪些方法？直线和圆的公共点的个数与二次函数有什么联系？(选做)

归纳所学知识，让学生养成学习 - 总结 - 再学习的良好学习习惯，培养学生用数学语言归纳问题的能力。根据学生的能力布置必做题和选做题，必做题是基础是对本节课基础知识巩固运用以及对下节课的思考引入；选做题是对学生类比思想的培养，以及对学生学习能力的提高，培养学生兴趣，促进个性化发展。

6. 结语

从设计的过程中可以看出每个阶段都是循序渐进的，环环相扣，紧密相连的。通过“认识问题，思考问题，解决问题”的教学模式，对常态课问题引领教学进行了尝试[9]。操作环节能够调动学生的积极

性,吸引学生的注意力,活跃课堂氛围,更好地投入到学习的状态中来;过程环节使学生感悟知识的生成过程,从直观转移到抽象,既是教学的过程,又是教学的指向;对象环节可以让学生看到学习的成果,感受到知识的喜悦和成功攀登知识高峰的自豪感,也能让教师在此阶段反思进程,调控教学进度;模型阶段则可以让学生真正将知识内化吸收,是更高层次的枢纽,而非知识学习的终点。

APOS 理论具有自身的优越性,尤其在概念教学上应用广泛,期望更多的教师可以认识它、理解它,更多的将它作为自己的教学策略,推动学生的进步和成长。

参考文献

- [1] 章振飞. 指向数学核心素养的教学设计——以“直线与圆的位置关系”为例[J]. 数学教学通讯, 2021(27): 32-33.
- [2] 徐明敏. 基于 APOS 理论的初中数学概念教学实践初探——一次“直线和圆的位置关系”的概念教学[J]. 数学教学通讯, 2022(2): 35-37.
- [3] 林志强. 以“问题链”为主线,培养初中数学高阶思维——以“直线和圆的位置关系”教学为例[J]. 数学教学通讯, 2022(29): 5-8.
- [4] 刘畅. 启发数学思维 助力高效课堂——以“直线与圆的位置关系”的教学为例[J]. 数学教学通讯, 2022(26): 62-63.
- [5] 张英. 基于“四能”目标的初中数学教学设计与反思——以“直线与圆的位置关系”一课的教学为例[J]. 中学数学, 2021(16): 27-28.
- [6] 朱玲玲. 基于 APOS 理论的概念变式教学探析[J]. 数学之友, 2022, 36(12): 20-21+25.
- [7] 孙秀珍. 课例: 直线与圆的位置关系[J]. 中学数学教学参考, 2021(8): 7-9.
- [8] 刘天程. 解密数学课堂追问 提升思维能力——以“直线与圆的位置关系(第 1 课时)”新授课为例[J]. 中学教研(数学), 2021(2): 24-27.
- [9] 李兵. 深度理解教材 把握知识本质——以“直线与圆的位置关系”为例[J]. 中学数学教学参考, 2021(13): 39-41.