

# Unsupervised Learning System with Prescription Constraint for Each Unit\*

Jin Zhou<sup>1</sup>, Hui Lin<sup>2#</sup>, Hengqing Tong<sup>2</sup>

<sup>1</sup>College of Mathematics and Quantitative Economics, Hubei University of Education, Wuhan

<sup>2</sup>Department of Mathematics, College of Science, Wuhan University of Technology, Wuhan  
Email: #463600152@qq.com

Received: May 4<sup>th</sup>, 2013; revised: May 23<sup>rd</sup>, 2013; accepted: Jun. 2<sup>nd</sup>, 2013

Copyright © 2013 Jin Zhou et al. This is an open access article distributed under the Creative Commons Attribution License, which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

**Abstract:** An unsupervised learning system with prescription condition (the weight coefficients are nonnegative and their sum is 1) is constructed, and its definite linear algorithms, the constraint least squares solutions, are proposed. This is the kernel content of this paper. The unsupervised learning system composed of some basic units is similar to a structural equation model (SEM), and is a kind of indeterminate equations. The traditional algorithms of SEM including partial least squares (PLS) and linear structure relationship (LISREL) are indefinite iterative algorithms, and may be non-convergent and non-unique. This paper constructed the inverse equations according to the idea of factor analysis, and obtained a middle solution based on modular length constraint (the length of latent variable is temporarily assumed as 1). Then the definite linear algorithm of the model making use of the latent regression with prescription constraints is constructed and to substitute traditional iterative algorithms. Data examples, including the index summarizing model for the Diffusion Indexes of Income and Price, and the model of Army Moral Index, show the analysis abilities and classification functions of the learning systems for economic or psychological problems, and extend the application scope of unsupervised learning systems. A kind of index summarizing modular with a latent variable and unknown weight coefficients are the basic units in the systems.

**Keywords:** Unsupervised Learning System; Prescription Condition; Constraint Least Squares; Definite Linear Algorithms

## 基于单元配方约束的无监督学习系统\*

周瑾<sup>1</sup>, 林卉<sup>2#</sup>, 童恒庆<sup>2</sup>

<sup>1</sup>湖北第二师范学院数学与数量经济学院, 武汉

<sup>2</sup>武汉理工大学理学院数学系, 武汉  
Email: #463600152@qq.com

收稿日期: 2013年5月4日; 修回日期: 2013年5月23日; 录用日期: 2013年6月2日

**摘要:** 本文核心内容是提出了一种基于单元配方约束条件(所有权系数非负而其和为1)的无监督学习系统, 以及基于约束最小二乘解的确定性算法。系统本身类似于结构方程模型(SEM), 属于不定方程组, 传统的算法包括偏最小二乘(PLS)与协方差拟合(LISREL)算法都是不确定的迭代算法, 存在计算可能不收敛、结果可能不唯一的问题。本文则根据因子分析思想构造逆向影响方程, 利用模长约束(潜变量的长度假设为1)作为中间技巧求得过渡解, 最后添加合理的配方约束进行潜变量回归, 成功构造了系统的确定性线性算法, 从而替代了传统的迭代算法。两个数据例子, 包括收入和价格扩散指数的汇总问题和军队士气模型, 演示了系统在经济和心理领域的分析和分类功能, 也是对无监督学习系统应用范围的极好扩充。

\*资助信息: 国家自然科学基金项目(81271513)。

#通信作者。

**关键词：**无监督学习系统；配方条件；约束最小二乘；确定性线性算法

## 1. 引言

无监督学习模式里虽然有输入变量和输出变量，但是没有已知的输出，无法进行监督学习，因而是神经网络和学习系统研究领域里极具挑战的困难问题<sup>[1]</sup>。典型的无监督学习系统如约束玻尔兹曼机(RBMs)<sup>[2]</sup>、深信念网络(DBNs)<sup>[3]</sup>、稀疏代码算法(SC)<sup>[4]</sup>等，已经得到学术界认同，并且在计算机视觉、网络反馈、文本分类等领域获得应用。但是迄今为止，还少有文献讨论社会经济指标的评估和分类问题<sup>[5]</sup>。

本文讨论一种新的无监督学习系统，它由若干基本单元组成。每个单元的输入变量通过线性加权汇总成一个输出变量，汇总过程受配方约束，即所有加权系数都非负，其和为1。单元之间有互相影响的路径，类似于路径分析里的结构方程模型(SEM)<sup>[6]</sup>。这种系统产生于社会经济指标评估和分类问题，也可以被表示为自组织路径约束的神经网络<sup>[7]</sup>，在顾客满意度测评等领域有广泛的应用<sup>[8]</sup>。

结构方程模型属于不定方程，已有的算法主要有偏最小二乘法(Partial least squares, PLS)和线性协方差拟合法(Linear structure relationship, LISREL)<sup>[9]</sup>，它们属于不确定的迭代算法。本文的主要工作在于发现了模型的基本单元，虽然也是不确定方程，但是结合实际问题普遍需要的配方约束，可以实现基于约束回归的确定性算法。在此基础上，本文提出了基于结构方程模型的无监督学习系统的确定性算法。

## 2. 基于结构方程模型的无监督学习系统

本文讨论的无监督学习系统包含两级变量：潜变量与观测变量；包含两个方程组：由潜变量与观测变量组成的观测方程组，以及潜变量之间的结构方程组，如图1所示。

图1所示的系统包含6个潜变量。 $\xi_1$ 和 $\xi_2$ 分别表示“信念”和“领导”，它们是自变量； $\eta_1 \sim \eta_4$ 分别表示“团结”、“自豪感”、“信心”和“团队精神”，它们是因变量。在潜变量之间有14条路径系数，从自变量到因变量之间的路径系数记为 $\gamma_{ij}$ ，以虚线箭头表示；在因变量之间的路径系数记为 $\beta_{ij}$ ，以实线箭头表示。

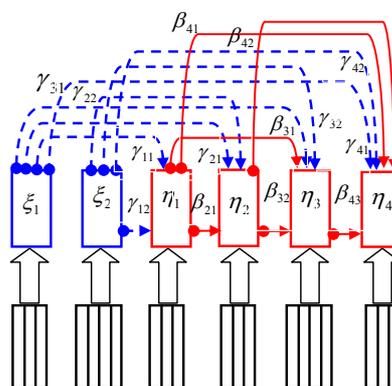


Figure 1. A learn system containing 6 latent variables  
图1. 含有6个潜变量的学习系统

图1所示系统的结构方程组是：

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \\ \eta_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_{21} & 0 & 0 & 0 \\ \beta_{31} & \beta_{32} & 0 & 0 \\ \beta_{41} & \beta_{42} & \beta_{43} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \\ \eta_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} \\ \gamma_{41} & \gamma_{42} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \end{pmatrix} \quad (1)$$

可以采用向量表示一般的结构方程组。令 $\xi^T = (\xi_1^T, \dots, \xi_k^T)$ ， $\eta^T = (\eta_1^T, \dots, \eta_m^T)$ 。因变量 $\eta$ 的系数矩阵是 $m \times m$ 的矩阵 $B = (\beta_{ij})$ ， $\xi$ 的系数矩阵是 $m \times k$ 矩阵 $\Gamma = (\gamma_{ij})$ ，残差向量是 $\varepsilon_\eta^T = (\varepsilon_1^T, \dots, \varepsilon_m^T)$ 。于是结构方程组(1)可以扩展为：

$$\eta = B\eta + \Gamma\xi + \varepsilon_\eta \quad (2)$$

潜变量不能直接度量，它的下层包含有若干观测变量，如图1。设系统总共有 $M$ 个观测变量，每个观测变量都进行了 $N$ 次观测，形成一个 $N \times M$ 的观测数据矩阵，作为系统的输入。

潜变量中设有 $k$ 个自变量和 $m$ 个因变量。和 $\xi_i$ 对应的观测变量记为 $x_{ij}$ ， $t=1, \dots, k$ ， $j=1, \dots, K(t)$ ，这里 $K(t)$ 是 $\xi_i$ 包含的观测变量个数。和 $\eta_i$ 对应的观测变量记为 $y_{ij}$ ， $i=1, \dots, m$ ， $j=1, \dots, L(i)$ ，这里 $L(i)$ 是 $\eta_i$ 包含的观测变量个数。图1中， $k=2$ ， $m=4$ ， $K(t)=3, 4$ ，而 $L(i)=3, 3, 4, 3$ 。

观测方程表达了潜变量与观测变量之间的关系。

图 1 中的观测方程是:

$$\xi_t = \sum_{j=1}^{K(t)} \omega_j x_{tj} + \varepsilon_{xt}, \quad t=1, \dots, k \quad (3)$$

$$\eta_i = \sum_{j=1}^{L(i)} \psi_{ij} y_{ij} + \varepsilon_{yi}, \quad i=1, \dots, m, \quad (4)$$

这里  $\omega_j$  和  $\psi_{ij}$  是汇总变量的权系数,  $\varepsilon$  是随机误差。

### 3. 基本单元的约束最小二乘解

可以从图 1 的系统里看到 6 个基本单元, 将一个基本单元水平放置如图 2 所示。一般的, 每个基本单元里含有输入变量  $x_1, \dots, x_p$ , 它们是独立观察变量; 还有输出变量  $\xi$ , 它们是未知的因变量即潜变量; 汇总系数是待定的权系数  $\omega_1, \dots, \omega_p$ , 满足方程:

$$\xi = \omega_1 x_1 + \dots + \omega_p x_p \quad (5)$$

这个方程是不定方程, 不能使用普通的回归方法。如果采用合理的配方约束和一定的数学技巧, 那么可以得到基本单元的配方约束解。

基于路径分析的思想, 可以认为不仅潜变量受到观测变量的影响, 而且观测变量也是受到潜变量的影响。相对于方程(5), 我们可以构造一种逆向影响方程:

$$\begin{pmatrix} x_1^T \\ \vdots \\ x_p^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{pmatrix} \xi^T + \begin{pmatrix} \zeta_1^T \\ \vdots \\ \zeta_p^T \end{pmatrix} \quad (6)$$

这里  $\zeta_i^T, i=1, \dots, p$  是  $N$  维随机误差向量。由于潜变量  $\xi$  和载荷系数  $\lambda_i, i=1, \dots, p$  都是未知, 所以(6)也是不定方程。注意(6)式左边, 每一个  $x_i^T$  是一个  $N$  维行向量, 而右边每一行是一个数  $\lambda_i$  乘以行向量  $\xi^T$ 。由于一个  $\xi^T$  要满足多个方程, 所以(6)还是矛盾方程组。

解矛盾方程组可以利用最小二乘法, 还可以添加合理的约束。令  $X = (x_1, \dots, x_p)$ ,  $\lambda^T = (\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ ,  $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_p)$ , 则  $X$  和  $\zeta$  都是  $N \times p$  矩阵, 方程(6)成为

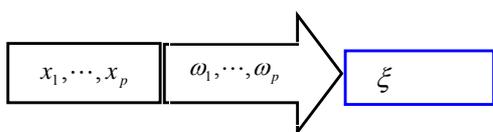


Figure 2. A basic unit of unsupervised learning  
图 2. 无监督学习的基本单元

$$X^T = \lambda \xi^T + \zeta^T \quad (7)$$

假设  $\xi$  和  $\zeta$  都是独立的, 则  $E(X^T X) = E(\lambda \xi^T \xi \lambda^T) + E(\zeta^T \zeta)$ 。进一步如果假设  $\xi$  是单位向量, 即  $\xi^T \xi = 1$ , 则有

$$X^T X \approx \lambda \lambda^T + E(\zeta^T \zeta) \quad (8)$$

于是可以得到模长约束最小二乘解(MCLS)<sup>[10,11]</sup>。

一般的, 可以假定  $E(\zeta^T \zeta)$  是一个对角矩阵, 即  $E(\zeta^T \zeta) = \text{diag}(\varphi_1^2, \dots, \varphi_p^2)$ 。于是(8)可以展开为:

$$\begin{pmatrix} x_1^T x_1 & \dots & x_1^T x_p \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_p^T x_1 & \dots & x_p^T x_p \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \lambda_1^2 + \varphi_1^2 & \dots & \lambda_1 \lambda_p \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_p \lambda_1 & \dots & \lambda_p^2 + \varphi_p^2 \end{pmatrix} \quad (9)$$

注意左边矩阵元素是两个向量的点积, 右边矩阵的元素是两个数的乘积。取对角线的元素相等, 得到

$$x_i^T x_i \approx \lambda_i^2 + \varphi_i^2, \quad i=1, \dots, p \quad (10)$$

如果能够估计出  $\varphi_i^2$ , 那么就可以估计出  $\lambda_i^2$ 。设协方差矩阵  $\Sigma_x = E(X^T X)$ ,  $\hat{\Sigma}_x = X^T X$ , 假定  $\hat{\Sigma}_x^{-1}$  的对角线元素是  $\hat{\varphi}_i^2, i=1, \dots, p$ , 根据因子分析的方法,  $\varphi_i^2$  的估计是  $\hat{\varphi}_i^2 = \hat{\varphi}_i^{-1}$ ,  $i=1, \dots, p$ , 这里  $\{\hat{\varphi}_i\}$  是矩阵  $(X^T X)^{-1}$  的对角线元素。于是由(10)可得:

$$\hat{\lambda}_i^2 = x_i^T x_i - \hat{\varphi}_i^2, \quad i=1, \dots, p \quad (11)$$

有了  $\lambda_i$  的估计, 就容易计算  $\xi$  各个分量的估计了。由于(11)式里  $\lambda_i$  的估计已经包含随机误差项  $\zeta$  的影响, 所以(7)可以近似表达为  $X^T \approx \lambda \xi^T$ 。使用向量  $\lambda^T = (\lambda_1, \dots, \lambda_p)$  左乘  $X^T \approx \lambda \xi^T$  的两边得到:

$$A \xi = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_p x_p \quad (12)$$

这里  $A = \lambda_1^2 + \dots + \lambda_p^2$ 。于是潜变量  $\xi$  的估计是:

$$\hat{\xi} = \frac{\lambda_1}{A} x_1 + \dots + \frac{\lambda_p}{A} x_p \quad (13)$$

得到潜变量的估计, 回到(5)式就容易得到权系数  $\omega_i, i=1, \dots, p$  的估计。这只需要使用普通的最小二乘法。

上述算法的合理性是明显的。方程(6)是不定方程, 如果  $\lambda_i, \xi$  是一组解, 那么  $c \lambda_i, c \xi$  也是一组解, 这里  $c$  是任一非零常数。也就是说,  $\xi$  的方向不变, 但是模长可以拉伸或压缩, 于是可以假定  $\xi$  是单位向量, 从而得到模长压缩最小二乘解 MCLS。同时, 正是因为不定方程的解不唯一, 需要添加新的适当约束来求

得合理的唯一解，而 MCLS 只是过渡解。

既然解的模长可以拉伸或压缩，于是可以采用新的配方约束条件，要求指标汇总的所有系数都非负，其和为 1，就是

$$\sum_{i=1}^p \omega_i = 1, \omega_i \geq 0, i = 1, \dots, p \quad (14)$$

配方约束条件在指标汇总这一类极为广泛的应用问题里的合理性是明显的，它可以保证潜变量与观测变量的同质性，即它们分数值范围相同。例如顾客满意度的测量通常是从 1 分到 10 分，那么汇总后的分数也应该是从 1 分到 10 分。此外，当观测变量的分值越高，对应的潜变量分值也应该越高。如果所有观测变量的某一个分值相等，那么对应的潜变量分值也应该等于这个分值。配方条件可以很好的满足这些要求。

普通的配方约束回归的算法非常复杂<sup>[12]</sup>。当初步的回归系数计算出来有分量为负数时，其配方约束解应该为 0。这样相应的自变量就实际被删除了，这显然是一个缺点。现在面临的回归是潜变量回归，因变量是未知的，这给计算带来极大方便，不仅计算简便，而且避免删除自变量。

事实上，(14)和(5)是类似的，系数  $\lambda_1/A, \dots, \lambda_p/A$  就是系数  $\omega_1, \dots, \omega_p$ 。可以根据(14)完成计算，这只需要拉伸压缩系数  $\lambda_1/A, \dots, \lambda_p/A$  使其满足配方条件即可。令  $b = \lambda_1/A + \dots + \lambda_p/A$ ，以  $b$  除以(14)两边，则系数  $\lambda_1/bA, \dots, \lambda_p/bA$  满足配方条件：非负，其和为 1。于是(5)系数的估计值就是：

$$(\hat{\omega}_1, \dots, \hat{\omega}_p) = \left( \frac{\lambda_1}{bA}, \dots, \frac{\lambda_p}{bA} \right) \quad (15)$$

在上述算法里，模长约束只是一个过渡性数学技巧，配方约束才是根本性要求。

下面选择一个实例来计算，了解潜变量配方回归与普通算术平均的区别。表 1 的数据来自 <http://www.pbc.gov.cn/publish/html/kuangjia.htm?id=2012s15.htm>，是中国人民银行的官方网站。

有各种不同的方法计算加权指数  $\xi$ 。最简单的方法是普通算术平均，就是对于各列取各个加权系数为 1/4，计算结果为  $\xi = (51.0, 54.55, 20.225, 66.35)$ 。也可以采用本文的方法计算加权指数。计算结果加权系数

Table 1. Diffuse index of income and price of urban depositors  
表1. 城镇储户收入与物价扩散指数表(2012)

指数满分为 100					
	2012. Q1	2012. Q2	2012. Q3	2012. Q4	算术平均指数
	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$\xi$
指数 I	51.9	50.1	50.2	51.8	51.0
指数 II	54.9	53.2	53.8	56.3	54.55
指数 III	19.7	18.2	21.0	22.0	20.225
指数 IV	62.1	65.5	67.6	70.2	66.35
I	当期收入感受指数				
II	未来收入信心指数				
III	当期物价满意指数				
IV	未来物价预期指数				

$\omega_i$  分别是(0.2474, 0.2474, 0.2501, 0.2550)，其和为 1；而潜变量  $\xi$  计算结果是(51.0040, 54.5613, 20.2407, 66.3827)，这和算术平均略有不同。

计算由数据分析与统计计算软件 DASC 完成<sup>[13]</sup>。DASC 软件可以从“数据分析与统计计算园地”网站免费下载，无需注册，免费使用，网址是：  
<http://public.whut.edu.cn/slx/English/index.HTM>。

下载到压缩文件包 DASC-Chinese.rar (中文版)或者 DASC-English.rar (英文版)，解压它，形成了一个文件夹。进入文件夹点击可执行文件 DASC.exe，主菜单屏幕出现了。点击主菜单“路径分析→单总体指标汇总模型(单层 SEM)”，例子文件数据出现在屏幕 A 区。修改 A 区行数为 4，列数为 4(注意回车执行)，将本例中的 4 × 4 原始数据拷贝，鼠标指向 A 区左上角点击右键，在弹出的 POP 菜单选择“黏贴数据”，原始数据即黏贴到 A 区。再修改 B 区的行数和列数各为 4，点击“计算”按钮，计算过程就立即自动完成。计算结果可以在 C 区看到。

#### 4. 学习系统的配方约束最小二乘解

本文讨论的无监督学习系统由若干基本单元组成。基于上节的约束最小二乘算法，可以给出整个学习系统的配方约束最小二乘解。本文的算法也适合一般的结构方程模型。

和(3), (4)式对应，图 1 所示的观测方程组也可以被表示为潜变量对于观测变量的影响，即逆向影响方

程组:

$$\begin{aligned} & \left(x_{t1}, \dots, x_{tK(t)}\right) \\ & = \left(v_{t1}, \dots, v_{tK(t)}\right) \xi_t + \left(\varepsilon_{xt1}, \dots, \varepsilon_{xtK(t)}\right), t=1, \dots, k \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} & \left(y_{t1}, \dots, y_{tL(i)}\right) = \\ & \left(\lambda_{t1}, \dots, \lambda_{tL(i)}\right) \eta_i + \left(\varepsilon_{yit1}, \dots, \varepsilon_{yitL(i)}\right), i=1, \dots, m \end{aligned} \quad (17)$$

这里  $v_{ij}$  和  $\lambda_{ij}$  是载荷系数,  $\varepsilon$  是随机误差。

为简单计, 舍去随机误差项, 等号变成约等于号:

$$\left(x_{t1}, \dots, x_{tK(t)}\right) \approx \left(v_{t1} \xi_t, \dots, v_{tK(t)} \xi_t\right) \quad (18)$$

左乘转置矩阵得到:

$$\begin{pmatrix} x_{t1}^T \\ \vdots \\ x_{tK(t)}^T \end{pmatrix} \left(x_{t1}, \dots, x_{tK(t)}\right) \approx \begin{pmatrix} v_{t1} \xi_t^T \\ \vdots \\ v_{tK(t)} \xi_t^T \end{pmatrix} \left(v_{t1} \xi_t, \dots, v_{tK(t)} \xi_t\right) \quad (19)$$

上述矩阵的对角元素为  $x_{ij}^T x_{ij} \approx v_{ij}^2 \xi_t^T \xi_t$ ,  $j=1, \dots, K(t)$ 。如果假定潜变量  $\xi_t$  是单位向量, 即  $\xi_t^T \xi_t = 1$ , 那么载荷系数  $v_{ij}$  的解可以获得:

$$\hat{v}_{ij} = \sqrt{x_{ij}^T x_{ij}}, j=1, \dots, K(t) \quad (20)$$

有了载荷系数的估计, 就可以估计潜变量  $\xi_t$ 。将(18)转置, 然后左乘  $\left(v_{t1}, \dots, v_{tK(t)}\right)^T$  可得:

$$\left(v_{t1} x_{t1}^T + \dots + v_{tK(t)} x_{tK(t)}^T\right) \approx \left(v_{t1}^2 + \dots + v_{tK(t)}^2\right) \xi_t^T$$

令  $a = v_{t1}^2 + \dots + v_{tK(t)}^2$ , 则

$$\tilde{\xi}_t = \frac{\hat{v}_{t1}}{a} x_{t1} + \dots + \frac{\hat{v}_{tK(t)}}{a} x_{tK(t)} \quad (21)$$

和(3)比较, 权系数的解是

$$\tilde{\Omega} = \left(\tilde{\omega}_{t1}, \dots, \tilde{\omega}_{tK(t)}\right) = \left(\frac{\hat{v}_{t1}}{a}, \dots, \frac{\hat{v}_{tK(t)}}{a}\right)。$$

但是现在  $\tilde{\Omega}$  还不满足配方条件, 而方程(3)是不定方程,  $\xi_t$  也不一定要是单位向量, 于是可以对向量  $\tilde{\Omega}$  拉伸压缩。令  $\tilde{\Omega}$  个分量的和为  $b = \frac{\hat{v}_{t1}}{a} + \dots + \frac{\hat{v}_{tK(t)}}{a}$ , 则(3)权系数的估计值为

$$\tilde{\Omega} = \left(\hat{\omega}_{t1}, \dots, \hat{\omega}_{tK(t)}\right) = \left(\frac{\hat{v}_{t1}}{ab}, \dots, \frac{\hat{v}_{tK(t)}}{ab}\right),$$

它的各分量非负, 其和为1。最后, 可以获得潜变量  $\xi_t$  的估计为:

$$\hat{\xi}_t = \frac{\hat{v}_{t1}}{ab} x_{t1} + \dots + \frac{\hat{v}_{tK(t)}}{ab} x_{tK(t)}, t=1, \dots, k \quad (22)$$

类似地可以在(4)中获得  $\psi_{ij}$  和  $\eta_i$  的估计,  $i=1, \dots, m, j=1, \dots, L(i)$ 。一旦得到潜变量  $\xi_t, t=1, \dots, k$  和  $\eta_i, i=1, \dots, m$  的估计, 就可以从结构方程组(1)里求得参数  $\beta_{ij}$  和  $\gamma_{ij}$  的估计, 或者从一般表达式(2)里求得参数矩阵  $B$  和  $\Gamma$  的估计。注意此时是联立方程组求解, 需要使用二阶段最小二乘法, 以使估计值满足统计学上的一致性<sup>[14]</sup>。

图1显示的士气模型已经有较长的研究历史<sup>[15]</sup>, 一般包含6个潜变量<sup>[16]</sup>。模型的原始数据来自战士们对问卷的回答, 这和顾客满意度测评是类似的。在图1里, 各个潜变量所包含的观测变量个数分别为3, 4, 3, 3, 4, 3, 观测数据矩阵的列数是这些列数之和, 为20。为简单计, 只列出10个战士的问卷分数, 原始数据矩阵行数是  $N=10$ , 见表2。

根据本节描述的确定性算法, 可以获得权系数的估计如表3, 路径系数  $\beta_{ij}$  和  $\gamma_{ij}$  的估计如表4。

Table 2. The original data of moral measurement  
表 2. 士气测评的原始数据

$\xi_1$	$\xi_2$	$\eta_1$	$\eta_2$	$\eta_3$	$\eta_4$
5	5	5	5	5	5
5	5	5	5	5	5
5	5	5	5	5	5
5	5	5	5	5	5
5	5	5	5	5	5
5	5	5	5	5	5
5	5	5	5	5	5
5	5	5	5	5	5
5	5	5	5	5	5
5	5	5	5	5	5

Table 3. The estimation of weight coefficients with prescription  
表 3. 满足配方条件的权系数的估计

$j$	1	2	3	4	和
$\omega_{1j}$	0.3227	0.3387	0.3387		1
$\omega_{2j}$	0.2509	0.2491	0.2509	0.2491	1
$\psi_{1j}$	0.3272	0.3364	0.3364		1
$\psi_{2j}$	0.3210	0.3516	0.3274		1
$\psi_{3j}$	0.2318	0.2553	0.2422	0.2707	1
$\psi_{4j}$	0.3140	0.3550	0.3310		1

**Table 4. The estimation of path coefficients**  
**表4. 路径系数的估计**

$\beta_{ij}$		$\gamma_{ij}$			
0.0000	0.0000	0.0000	0.000	-0.1002	1.0238
0.3380	0.0000	0.0000	0.000	0.1046	0.4975
0.1051	-0.0032	0.0000	0.000	0.0191	0.8966
0.0346	0.0890	0.7701	0.000	0.2949	-0.2620

一旦得到这些系数的估计值，系统的学习过程就完成了。更多的路径计算分析结果这里省略，可以参考专门的士气分析文献<sup>[15,16]</sup>。

本例计算过程也可以使用软件DASC自动完成，只需选择主菜单“路径分析→军队士气评估模型”，然后调整参数，将A区第一个页面调整为3, 4, 3, 3, 4, 3；第四个页面的行数调为10，列数调为20；B区行数也调为10，列数也调为20，然后按“计算”按钮即可完成计算。

## 5. 结论

本文研究了基于单元配方约束的学习系统及其算法。这个系统在处理社会、经济、心理等领域的指标汇总问题有非常广泛的应用。

本文使用基于配方约束的确定性算法取代传统的偏最小二乘(PLS)和协方差拟合法(LISREL)。使用单位模长约束作为一种中间技巧，然后利用潜变量回归的特点极大改进了传统的配方回归算法，是本文算法的两个亮点。

相对于指标汇总的其它方法如模糊数学法<sup>[17]</sup>、灰色系统法<sup>[18]</sup>、变异系数法<sup>[19]</sup>、层次分析法<sup>[20]</sup>、算术平均法等，本文的确定性算法是一种新方法。这种算法基于最小二乘、因子分析、配方约束，是科学而合理的。相对于结构方程模型传统的偏最小二乘算法和协方差拟合算法，本文算法是确定性算法，优点在于不必讨论迭代收敛的存在性与唯一性问题，计算简便而快捷。

## 参考文献 (References)

[1] R. I. Chang, P. Y. Hsiao. Unsupervised query-based learning of neural networks using selective-attention and self-regulation. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 1997, 8(2): 205-217.

[2] D. LeLy, P. Chow. High-performance reconfigurable hardware architecture for restricted Boltzmann machines. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 2010, 21(11): 1780-1792.

[3] W. K. Wong, M. Sun. Deep learning regularized Fisher mappings. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 2011, 22(10): 1668-1675.

[4] K. Labusch, E. Barth and T. Martinetz. Simple method for high-performance digit recognition based on sparse coding. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 2008, 19(11): 1985-1989.

[5] R. Gençay, R. Gibson. Model risk for European-style stock index options. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 2007, 18(1): 193-202.

[6] H. J. Ader, I. Bramsen. *Computer modeling of social processes*, Chapter 7: Representation of a structural equation model as a neural network. London: SAGE Publications, 1998: 126-138.

[7] H. Tong, L. Xiong and H. Peng. Self-organized path constraint neural network structure and algorithm. 13th International Conference on Neural Information Processing, Hong Kong, 3-6 October 2006, 457-466.

[8] C. Fornell, M. D. Johnson, E. W. Anderson, J. Cha and B. E. Bryant. The American customer satisfaction index: Nature, purpose, and findings. *Journal of Marketing*, 1996, 60(4): 7-18.

[9] S. Hsua, W. Chenb and M. Hsiehc. Robustness testing of PLS, LISREL, EQS and ANN-based SEM for measuring customer satisfaction. *Total Quality Management & Business Excellence*, 2006, 17(3): 355-372.

[10] C. Wang, H. Tong. Best iterative initial values for PLS in a CSI model. *Mathematical and Computer Modelling*, 2007, 46(3-4): 439-444.

[11] Q. Tong, X. Zou, C. Wang and H. Tong. A definite linear algorithm for structural equation model. *Mathematical and Computer Modelling*, 2010, 52(5-6): 744-751.

[12] 方开泰, 王东谦, 吴国富. 一类带约束的回归——配方回归[M]. *计算数学*, 1982, 4: 57-69.

[13] 董恒庆. *数据分析与统计计算软件 DASC[M]*. 北京: 科学出版社, 2005.

[14] H. Tong, T. K. Kumar and Y. Huang. Developing econometrics—Statistical inference for simultaneous equations model; Definite linear algorithm for SEM. Chichester: John Wiley & Sons, 2011.

[15] M. Artelli, R. Deckro, D. Zalewski, S. Leach and M. Perry. A control theory model of deployed soldiers' morale. *International Journal of Operational Research*, 2010, 7(1): 31-53.

[16] C. Li. Review of morale research. *Advances in Psychological Science*, 2006, 14(2): 193-198.

[17] 郭树行, 李妍. 基于投影寻踪方法的模糊综合估计与聚类的工程项目风险评估[J]. *Computer Science and Application(计算机科学与应用)*, 2011, 1(2): 63-68.

[18] T. L. Tien. A new grey prediction model FGM(1, 1). *Mathematical and Computer Modelling*, 2009, 49(7-8): 1416-1426.

[19] H. Arabshahi. Modeling low field electron mobility in group III nitride materials. *Computer Science and Application(计算机科学与应用)*, 2012, 1(1): 4-8.

[20] T. L. Saaty. Decision making with the analytic hierarchy process. *International Journal of Services Sciences*, 2008, 1: 83-98.