

The Center-of-Gravity Fuzzy System and Its Probability Representation Theory Based on the Parameter Singleton Fuzzifier*

Xuehai Yuan

School of Control Science and Engineering, Dalian University of Technology, Dalian
Email: yuanxh@dlut.edu.cn

Received: Aug. 6th, 2012; revised: Aug. 15th, 2012; accepted: Aug. 27th, 2012

Abstract: The constructed fuzzy systems are not universal approximators when the normal fuzzy implications such as Lukasiewicz implication is chosen and the union operation is taken to aggregate fuzzy inference relations. It is pointed in this paper that one can dissolve the problem if the parameter singleton fuzzifier is used in the construction of fuzzy system. In this paper, the center-of-gravity fuzzy systems based on Lukasiewicz implication are first constructed by use of the parameter singleton fuzzifier, then the universal approximations of the fuzzy systems are proved and the sufficient conditions for the fuzzy system as universal approximator are given. In the end, the joint probability density functions, the marginal density functions and numerical characteristics such as mathematical expectations, variances and covariances for the fuzzy system are obtained.

Keywords: Fuzzy Control; Fuzzy System; Universal Approximation; Probability Density; Numerical Characteristics

基于参数单点模糊化的重心法模糊系统及其概率表示理论*

袁学海

大连理工大学控制科学与工程学院, 大连
Email: yuanxh@dlut.edu.cn

收稿日期: 2012年8月6日; 修回日期: 2012年8月15日; 录用日期: 2012年8月27日

摘要: 在模糊系统的构造中, 如果使用 Lukasiewicz 蕴涵且推理关系取并运算, 则所构造的模糊系统没有泛逼近性。针对这一问题, 本文指出: 通过应用参数单点模糊化方法可解决此问题。本文首先应用参数单点模糊化方法, 成功地构造出了基于 Lukasiewicz 蕴涵的重心法模糊系统, 然后证明了所构造的模糊系统具有泛逼近性, 并给出了这种模糊系统具有泛逼近性的充分条件。最后给出了所构造重心法模糊系统对应的联合概率密度函数和边缘概率密度函数, 给出了这些概率分布的数学期望、方差和协方差等数字特征。

关键词: 模糊控制; 模糊系统; 泛逼近性; 概率分布; 数字特征

1. 引言

模糊系统的构造主要有: 对输入变量进行模糊化; 构造模糊推理关系; 模糊推理和对输出模糊集进行解模糊化等四个过程。到目前为止, 常用的解模糊化方法有: 中心平均解模糊化方法; 重心法解模糊化方法和最大

*基金项目: 国家自然科学基金资助项目(No.90818025, No.61074044)。

值解模糊化方法等^[1]。文献[2,3]指出：对一些常用的正则模糊蕴涵算子，如 Lukasiewicz 蕴涵等，当采用单点模糊化且推理关系取“并”时，所构造的模糊系统没有响应能力。为此，文献[4]首次引入了参数单点模糊化方法，指出：利用参数单点模糊化可解决一些常用的正则模糊蕴涵算子不能构造模糊系统的问题，但文献[4]仅给出重心法模糊系统的近似形式。

我们知道，用重心法构造的模糊系统具有概率论意义，它是在最小二乘意义下对所逼近系统的最佳逼近^[5,6]。但如何得到重心法模糊系统所对应的概率密度函数是一个困难的问题。

本文应用参数单点模糊化和重心法构造出了基于 Lukasiewicz 蕴涵的模糊系统及对应的联合概率密度函数和边缘概率密度函数，我们证明了所构造的模糊系统具有泛逼近性，并给出了所构造的概率分布的数学期望、方差和协方差等数字特征。

2. 重心法模糊系统

设 $\{(x_i, y_i)\}_{(1 \leq i \leq n)}$ 为一组输入输出数据，本文做如下假设

$$\begin{aligned} a &= x_1 < x_2 < \dots < x_n = b, \\ c &= y_1 < y_2 < \dots < y_n = d. \end{aligned}$$

利用已知数据构造具有二相性的三角波，即对 $i = 2, 3, \dots, n-1$,

$$A_i(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}, & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i}, & x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad B_i(y) = \begin{cases} \frac{y-y_{i-1}}{y_i-y_{i-1}}, & y \in [y_{i-1}, y_i], \\ \frac{y_{i+1}-y}{y_{i+1}-y_i}, & y \in [y_i, y_{i+1}], \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$A_1(x) = \begin{cases} \frac{x_2-x}{x_2-x_1}, & x \in [x_1, x_2] \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad A_n(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}, & x \in [x_{n-1}, x_n] \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$B_1(y) = \begin{cases} \frac{y_2-y}{y_2-y_1}, & y \in [y_1, y_2] \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad B_n(y) = \begin{cases} \frac{y-y_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}, & y \in [y_{n-1}, y_n], \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

则 x_i, y_i 分别为 A_i 和 B_i 的峰点，即 $A_i(x_i) = 1, B_i(y_i) = 1$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 且当 $x \in [x_i, x_{i+1}]$ 时，

$$A_i(x) + A_{i+1}(x) = 1, A_j(x) = 0 \quad (j \neq i, i+1).$$

当 $y \in [y_i, y_{i+1}]$ 时， $B_i(y) + B_{i+1}(y) = 1, B_j(y) = 0$ ($j \neq i, i+1$)。于是有模糊推理规则

$$\text{If } x \text{ is } A_i, \text{ then } y \text{ is } B_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \tag{1}$$

令 θ 为 Lukasiewicz 模糊蕴涵算子，即 $\theta(a, b) = (1 - a + b) \wedge 1$ 。将规则(1)中的每条规则生成一个模糊关系 $R_i(x, y) = \theta(A_i(x), B_i(y))$ 。

设 A_i^* 为输入变量 x 的参数单点模糊化，即

$$A_i^*(x') = \begin{cases} A_i(x), & x' = x \\ 0, & x' \neq x \end{cases} \tag{2}$$

令 $B^* = \bigcup_{i=1}^n A_i^* \circ R_i$ ，取一个 t -范 T ，做 \vee - T 合成，当 $x \in [x_i, x_{i+1}]$ ， $y \in [y_i, y_{i+1}]$ 时，记 $u = A_i(x), v = A_{i+1}(x)$ ，

$$\bar{x}_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}, \bar{y}_i = \frac{y_i + y_{i+1}}{2}.$$

则有 $u+v=1$ 且

$$B^*(y) = uT\theta(u, B_i(y)) \vee vT\theta(v, B_{i+1}(y))$$

则重心法模糊系统为:

$$\bar{S}(x) = \frac{\int_c^d yB^*(y) dy}{\int_c^d B^*(y) dy} \quad (3)$$

则有以下定理:

定理 1

1) 当 $T(a,b) = a \wedge b$ 时, 则

$$\begin{aligned} \bar{S}(x) &= \begin{cases} A_{i1}^*(x)y_i + A_{i+1}^*(x)y_{i+1}, x \in [x_i, \bar{x}_i] \\ A_{i2}^*(x)y_i + A_{i+2}^*(x)y_{i+1}, x \in [\bar{x}_i, x_{i+1}] \end{cases} \\ &= \bar{A}_i(x)y_i + \bar{A}_{i+1}(x)y_{i+1}, \end{aligned}$$

其中 $A_{i1}^*(x) + A_{i+1}^*(x) = 1$, $A_{i2}^*(x) + A_{i+2}^*(x) = 1$ 且 $A_{i1}^*(x) = \frac{1-3u+12u^2-8u^3}{3(6u-4u^2-1)}$, $A_{i+2}^*(x) = \frac{1-3v+12v^2-8v^3}{3(6v-4v^2-1)}$ 。

2) 当 $T(a,b) = (a+b-1) \vee 0$ 时,

$$\begin{aligned} \bar{S}(x) &= \begin{cases} C_{i1}^*(x)y_i + C_{i+1}^*(x)y_{i+1}, x \in [x_i, \bar{x}_i] \\ C_{i2}^*(x)y_i + C_{i+2}^*(x)y_{i+1}, x \in [\bar{x}_i, x_{i+1}] \end{cases} \\ &= \bar{C}_i(x)y_i + \bar{C}_{i+1}(x)y_{i+1}, \end{aligned}$$

其中 $C_{i1}^*(x) + C_{i+1}^*(x) = 1$, $C_{i2}^*(x) + C_{i+2}^*(x) = 1$ 且 $C_{i1}^*(x) = \frac{1}{3} + u^2 - \frac{2}{3}u^3$, $C_{i+2}^*(x) = \frac{1}{3} + v^2 - \frac{2}{3}v^3$ 。

3) 当 $T(a,b) = ab$ 时

$$\begin{aligned} \bar{S}(x) &= \begin{cases} D_{i1}^*(x)y_i + D_{i+1}^*(x)y_{i+1}, x \in [x_i, \bar{x}_i] \\ D_{i2}^*(x)y_i + D_{i+2}^*(x)y_{i+1}, x \in [\bar{x}_i, x_{i+1}] \end{cases} \\ &= \bar{D}_i(x)y_i + \bar{D}_{i+1}(x)y_{i+1}, \end{aligned}$$

其中

$$D_{i1}^*(x) + D_{i+1}^*(x) = 1, \quad D_{i2}^*(x) + D_{i+2}^*(x) = 1,$$

$$D_{i1}^*(x) = \frac{1-6u+15u^2-17u^3+15u^4-6u^5}{3u(1-4u+8u^2-4u^3)},$$

$$D_{i+2}^*(x) = \frac{1-6v+15v^2-17v^3+15v^4-6v^5}{3v(1-4v+8v^2-4v^3)}.$$

证明:

1) 设 $T(a,b) = a \wedge b$, 则 $(x,y) \in [x_i, x_{i+1}] \times [y_i, y_{i+1}]$ 时

$$B^*(y) = [u \wedge (v + B_i(y)) \wedge 1] \vee [v \wedge (u + B_{i+1}(y)) \wedge 1].$$

当 $x \in [x_i, \bar{x}_i]$ 时, $B^*(y) = u \wedge (v + B_i(y))$, $u \geq v + B_i(y) \Leftrightarrow y \geq 2vy_{i+1} + (u-v)y_i \triangleq y'_i$ 。所以, 当 $y \geq y'_i$ 时, $B^*(y) = v + B_i(y)$, 当 $y < y'_i$ 时, $B^*(y) = u$ 。

当 $x \in [\bar{x}_i, x_{i+1}]$, $B^*(y) = v \wedge (u + B_{i+1}(y))$, $v \geq u + B_{i+1}(y) \Leftrightarrow y \geq 2uy_i + (v-u)y_{i+1} \triangleq y''_i$ 。所以, 当 $y \geq y''_i$ 时, $B^*(y) = v$, 当 $y < y''_i$ 时, $B^*(y) = u + B_{i+1}(y)$ 。

当 $x \in [x_i, \bar{x}_i]$ 时, $y'_i - y_i = 2v(y_{i+1} - y_i)$, $y_i - y'_i = (u-v)(y_{i+1} - y_i)$,

$$\text{于是 } \int_{y_i}^{y_{i+1}} B^*(y) dy = \left[\int_{y_i}^{y'_i} u dy + \int_{y'_i}^{y_{i+1}} (v + B_i(y)) dy \right] = \frac{1}{2}(y_{i+1} - y_i)(6u - 4u^2 - 1),$$

$$\int_{y_i}^{y_{i+1}} y B^*(y) dy = \left[\int_{y_i}^{y'_i} y u dy + \int_{y'_i}^{y_{i+1}} y (v + B_i(y)) dy \right] = \frac{1}{2}(y_{i+1} - y_i) [C_{i+1}(x)y_{i+1} + C_i(x)y_i],$$

其中 $C_i(x) = \frac{1}{3}(1 - 3u + 12u^2 - 8u^3)$, $C_i(x) + C_{i+1}(x) = 6u - 4u^2 - 1$ 。

同理, 当 $x \in [\bar{x}_i, x_{i+1}]$ 时

$$\int_{y_i}^{y_{i+1}} B^*(y) dy = \left[\int_{y_i}^{y''_i} (u + B_{i+1}(y)) dy + \int_{y''_i}^{y_{i+1}} v dy \right] = \frac{1}{2}(y_{i+1} - y_i)(6v - 4v^2 - 1),$$

$$\int_{y_i}^{y_{i+1}} y B^*(y) dy = \left[\int_{y_i}^{y''_i} y (u + B_{i+1}(y)) dy + \int_{y''_i}^{y_{i+1}} y v dy \right] = \frac{1}{2}[y_{i+1} - y_i] [D_{i+1}(x)y_{i+1} + D_i(x)y_i],$$

其中 $D_{i+1}(x) = 1 - 3v + 12v^2 - 8v^3$, $D_i(x) + D_{i+1}(x) = 6v - 4v^2 - 1$ 。

因此, 由式(3)可推得: $\bar{S}(x) = \bar{A}_i(x)y_i + \bar{A}_{i+1}(x)y_{i+1}$ 。

2) 设 $T(a, b) = (a + b - 1) \vee 0$, 则 $(x, y) \in [x_i, x_{i+1}] \times [y_i, y_{i+1}]$ 时

$$B^*(y) = [u + (v + B_i(y)) \wedge 1 - 1] \vee [v + (u + B_{i+1}(y)) \wedge 1 - 1].$$

则 $u \geq B_i(y) \Leftrightarrow y \geq y_i^\Delta \Leftrightarrow B^*(y) = B_i(y) \vee v$, $B_i(y) \geq v \Leftrightarrow y \leq y_i^*$, 则当 $y_i^\Delta \leq y \leq y_i^*$, $B^*(y) = B_i(y)$, 当 $y \geq y_i^*$, $B^*(y) = v$ 。

同理, 当 $u < B_i(y)$ 时, 即 $y < y_i^\Delta$ 时, $B^*(y) = u \vee B_{i+1}(y)$ 。

则当 $y_i^* \leq y \leq y_i^\Delta$, $B^*(y) = B_{i+1}(y)$, 当 $y < y_i^*$, $B^*(y) = u$ 。

于是 y_i^*, y_i^Δ 将 $[x_i, x_{i+1}] \times [y_i, y_{i+1}]$ 划分为四个部分:

$$H_1 = \{(x, y) | x \in [x_i, \bar{x}_i], y_i \leq y \leq y_i^\Delta\} \cup \{(x, y) | x \in [\bar{x}_i, x_{i+1}], y_i \leq y \leq y_i^\Delta\}$$

$$H_2 = \{(x, y) | x \in [\bar{x}_i, x_{i+1}], y_i^* \leq y \leq y_i^\Delta\}$$

$$H_3 = \{(x, y) | x \in [x_i, \bar{x}_i], y_i^* \leq y \leq y_{i+1}\} \cup \{(x, y) | x \in [\bar{x}_i, x_{i+1}], y_i^\Delta \leq y \leq y_{i+1}\}$$

$$H_4 = \{(x, y) | x \in [x_i, \bar{x}_i], y_i^\Delta \leq y \leq y_i^*\}$$

则

$$B^*(y) = \begin{cases} u, & (x, y) \in H_1 \\ B_{i+1}(y), & (x, y) \in H_2 \\ v, & (x, y) \in H_3 \\ B_i(y), & (x, y) \in H_4 \end{cases}$$

当 $x \in [x_i, \bar{x}_i]$ 时,

$$y_i^\Delta - y_i = v(y_{i+1} - y_i), y_i^* - y_i = u(y_{i+1} - y_i),$$

$$y_{i+1} - y_i^* = v(y_{i+1} - y_i), y_{i+1} - y_i^\Delta = u(y_{i+1} - y_i),$$

则

$$\int_{y_i}^{y_{i+1}} B^*(y) dy = \int_{y_i}^{y_i^\Delta} u dy + \int_{y_i^\Delta}^{y_{i+1}} v dy + \int_{y_i^\Delta}^{y_i^*} B_i(y) dy = \frac{(y_{i+1} - y_i)}{2},$$

$$\int_{y_i}^{y_{i+1}} y B^*(y) dy = \frac{1}{2}(y_{i+1} - y_i) [C_{i+1}(x) y_{i+1} + C_i(x) y_i],$$

其中 $C_i(x) = \frac{1}{3} + u^2 - \frac{2}{3}u^3$, $C_i(x) + C_{i+1}(x) = 1$ 。

因此, 由(3)可知: $\bar{S}(x) = C_{i1}^*(x) y_i + C_{i1+1}^*(x) y_{i+1}$, 其中 $C_{i1}^*(x) = \frac{1}{3} + u^2 - \frac{2}{3}u^3$, $C_{i1}^*(x) + C_{i1+1}^*(x) = 1$ 。

同理, 当 $x \in [\bar{x}_i, x_{i+1}]$ 时, $\bar{S}(x) = C_{i2}^*(x) y_i + C_{i2+1}^*(x) y_{i+1}$, 其中 $C_{i2+1}^*(x) = \frac{1}{3} + v^2 - \frac{2}{3}v^3$, $C_{i2}^*(x) + C_{i2+1}^*(x) = 1$ 。

因此, 由式(3)可推得: $\bar{S}(x) = \bar{C}_i(x) y_i + \bar{C}_{i+1}(x) y_{i+1}$ 。

3) 设 $T(a, b) = ab$, 当 $(x, y) \in [x_i, x_{i+1}] \times [y_i, y_{i+1}]$ 时

$$B^*(y) = [u(v + B_i(y)) \wedge 1] \vee [v(u + B_{i+1}(y)) \wedge 1].$$

由于 $v + B_i(y) \geq 1 \Leftrightarrow y \leq y_i^\Delta$, 因此, 当 $y \leq y_i^\Delta$ 时, $B^*(y) = u \vee v(u + B_{i+1}(y))$;

当 $y > y_i^\Delta$ 时, $B^*(y) = u(v + B_i(y)) \vee v$ 而

$$u \geq v(u + B_{i+1}(y)) \Leftrightarrow y \leq v y_{i+1} + \frac{v - u^2}{v} y_i \triangleq y_i^2,$$

$$v \geq u(v + B_i(y)) \Leftrightarrow y \geq \frac{u - v^2}{u} y_{i+1} + \frac{v^2}{u} y_i \triangleq y_i^3.$$

于是 y_i^2, y_i^3, y_i^Δ 将 $[x_i, x_{i+1}] \times [y_i, y_{i+1}]$ 划分为六个部分:

$$J_{11} = \{(x, y) | x \in [x_i, \bar{x}_i], y_i \leq y \leq y_i^\Delta\}$$

$$J_{12} = \{(x, y) | x \in [x_i, \bar{x}_i], y_i^\Delta \leq y \leq y_i^3\}$$

$$J_{13} = \{(x, y) | x \in [x_i, \bar{x}_i], y_i^3 \leq y \leq y_{i+1}\}$$

$$J_{21} = \{(x, y) | x \in [\bar{x}_i, x_{i+1}], y_i \leq y \leq y_i^2\}$$

$$J_{22} = \{(x, y) | x \in [\bar{x}_i, x_{i+1}], y_i^2 \leq y \leq y_i^\Delta\}$$

$$J_{23} = \{(x, y) | x \in [\bar{x}_i, x_{i+1}], y_i^\Delta \leq y \leq y_{i+1}\}$$

$$\text{则当 } x \in [x_i, \bar{x}_i] \text{ 时, } B^*(y) = \begin{cases} u, & (x, y) \in J_{11} \\ u(v + B_i(y)), & (x, y) \in J_{12} \\ v, & (x, y) \in J_{13} \end{cases}$$

$$\text{当 } x \in [\bar{x}_i, x_{i+1}] \text{ 时, } B^*(y) = \begin{cases} u, & (x, y) \in J_{21} \\ v(u + B_{i+1}(y)), & (x, y) \in J_{22} \\ v, & (x, y) \in J_{23} \end{cases} \text{ 则当 } x \in [x_i, \bar{x}_i] \text{ 时,}$$

$$\int_{y_i}^{y_{i+1}} B^*(y) dy = \left[\int_{y_i}^{y_i^*} u dy + \int_{y_i^*}^{y_i^3} u(v + B_i(y)) dy + \int_{y_i^3}^{y_{i+1}} v dy \right] = \frac{1}{2}(y_{i+1} - y_i) \frac{(1 - 4u + 8u^2 - 4u^3)}{u},$$

$$\int_{y_i}^{y_{i+1}} y B^*(y) dy = \left[\int_{y_i}^{y_i^*} y u dy + \int_{y_i^*}^{y_i^3} y u(v + B_i(y)) dy + \int_{y_i^3}^{y_{i+1}} y v dy \right] = \frac{1}{2}(y_{i+1} - y_i) [C_{i+1}(x) y_{i+1} + C_i(x) y_i],$$

其中

$$C_i(x) = \frac{1 - 6u + 15u^2 - 17u^3 + 15u^4 - 6u^5}{3u^2}, \quad C_i(x) + C_{i+1}(x) = \frac{1 - 4u + 8u^2 - 4u^3}{u}.$$

同理, 当 $x \in [\bar{x}_i, x_{i+1}]$ 时

$$\int_{y_i}^{y_{i+1}} B^*(y) dy = \left[\int_{y_i}^{y_i^2} u dy + \int_{y_i^2}^{y_i^A} v(u + B_{i+1}(y)) dy + \int_{y_i^A}^{y_{i+1}} v dy \right] = \frac{1}{2}(y_{i+1} - y_i) \frac{(1 - 4v + 8v^2 - 4v^3)}{v},$$

$$\int_{y_i}^{y_{i+1}} y B^*(y) dy = \left[\int_{y_i}^{y_i^2} y u dy + \int_{y_i^2}^{y_i^A} y v(u + B_{i+1}(y)) dy + \int_{y_i^A}^{y_{i+1}} y v dy \right] = \frac{1}{2}(y_{i+1} - y_i) [D_{i+1}(x) y_{i+1} + D_i(x) y_i],$$

其中

$$D_{i+1}(x) = \frac{1 - 6v + 15v^2 - 17v^3 + 15v^4 - 6v^5}{3v^2}, \quad D_i(x) + D_{i+1}(x) = \frac{1 - 4v + 8v^2 - 4v^3}{v}.$$

因此, 由式(3)可推得 $\bar{S}(x) = \bar{D}_i(x) y_i + \bar{D}_{i+1}(x) y_{i+1}$ 。

注 1 前边的推导都是假定 $s(x)$ 是单调函数。对于非单调函数, 我们可将 X 分成几个小区间, 使 $s(x)$ 在每个小区间上单调, 则仍可得到模糊系统 $\bar{S}(x)$ 。

例如令 $s(x) = \sin x, X = [-\pi, \pi], X_1 = \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right], X_2 = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], X_3 = \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ 。则 $s(x)$ 在 X_1, X_2, X_3 上都是单调函数。

3. 泛逼近性

由前面得到的模糊系统 $\bar{S}(x)$ 均可以表示为 $\bar{S}(x) = A_i^*(x) y_i + A_{i+1}^*(x) y_{i+1}$, 其中 $A_i^*(x) + A_{i+1}^*(x) = 1$ 。

当 $x \in [x_i, x_{i+1}]$ 时, 令 $\bar{S}_1(x) = \bar{A}_i(x) y_i + \bar{A}_{i+1}(x) y_{i+1}, \bar{S}_2(x) = \bar{C}_i(x) y_i + \bar{C}_{i+1}(x) y_{i+1};$

$\bar{S}_3(x) = \bar{D}_i(x) y_i + \bar{D}_{i+1}(x) y_{i+1}$, 则 $\bar{S}_i(x) (i=1, 2, 3)$ 可以统一写成形式: $\bar{S}(x) = A_i^*(x) s(x_i) + A_{i+1}^*(x) s(x_{i+1})$ 且 $\bar{S}(x_i) = y_i, \bar{S}(x_{i+1}) = y_{i+1}$ 。

引理 1^[7] 设 $s(x)$ 在 $[a, b]$ 上二阶连续可导, 当 $x \in [x_i, x_{i+1}]$ 时, $F(x) = A_i(x) s(x_i) + A_{i+1}(x) s(x_{i+1})$ 。

则 $\|F - s\|_\infty \leq \frac{1}{8} \|s''\|_\infty h^2$ 。其中 $h = \max_{1 \leq i \leq n} \{x_{i+1} - x_i\}$ 。

定理 2 设 f 为被逼近函数且二阶连续可导, $h = \max_{1 \leq i \leq n} |x_{i+1} - x_i|$, 则

$$\|\bar{S} - s\|_\infty \leq \frac{1}{8} \|s''\|_\infty h^2 + \frac{1}{3} \|s'\|_\infty h \quad (4)$$

证明:

1) 选取 $T = T_1$ 。当 $x \in [x_i, \bar{x}_i]$ 时,

$$\bar{S}_1(x) - F(x) = (A_{i+1}^*(x) - A_{i+1}(x)) y_{i+1} + (A_i^*(x) - A_i(x)) y_i = (A_{i+1}^*(x) - A_i(x)) (y_i - y_{i+1}).$$

易知 $|A_{i+1}^*(x) - A_i(x)| = \left| -\frac{1}{3} \frac{(2u-1)(2u-2u^2+1)}{\frac{5}{4} - 4\left(u - \frac{3}{4}\right)^2} \right| \leq \frac{1}{3}$, 故 $|A_{i+1}^*(x) - A_i(x)| \leq \frac{1}{3}$ 。于是

$|\bar{S}_1(x) - F(x)| \leq \frac{1}{3}|y_i - y_{i+1}| \leq \frac{1}{3}\|s'\|_\infty h$ 类似地, 当 $x \in [\bar{x}_i, x_{i+1}]$ 时, 可得 $|\bar{S}_1(x) - F(x)| \leq \frac{1}{3}|y_i - y_{i+1}| \leq \frac{1}{3}\|s'\|_\infty h$ 。

由引理 1 得 $\|\bar{S}_1 - s\|_\infty \leq \|\bar{S}_1 - F\|_\infty + \|F - s\|_\infty \leq \frac{1}{8}\|s''\|_\infty h^2 + \frac{1}{3}\|s'\|_\infty h$ 。

2) 选取 $T = T_2$, 当 $x \in [x_i, \bar{x}_i]$ 时, $C_{i1}^*(x) - A_i(x) = \frac{1}{3} + u^2 - \frac{2}{3}u^3 - u$, 则 $|C_{i1}^*(x) - A_i(x)| \leq \frac{1}{3}$ 。

于是

$$|\bar{S}_1(x) - F(x)| = |C_{i1}^*(x) - A_i(x)||y_i - y_{i+1}| \leq \frac{1}{3}|y_i - y_{i+1}| \leq \frac{1}{3}\|s'\|_\infty h。$$

同理, 当 $x \in [\bar{x}_i, x_{i+1}]$ 时,

$$C_{i2+1}^*(x) - A_{i+1}(x) = \frac{1}{3} + v^2 - \frac{2}{3}v^3 - v。$$

因此, $|\bar{S}_1(x) - F(x)| = |C_{i1}^*(x) - A_i(x)||y_i - y_{i+1}| \leq \frac{1}{3}|y_i - y_{i+1}| \leq \frac{1}{3}\|s'\|_\infty h$,

于是可得, $\|\bar{S} - s\|_\infty \leq \|\bar{S} - F\|_\infty + \|F - s\|_\infty \leq \frac{1}{8}\|s''\|_\infty h^2 + \frac{1}{3}\|s'\|_\infty h$ 。

3) 选取 $T = T_3$, 当 $x \in [x_i, \bar{x}_i]$ 时, $u = A_i(x) \in [\frac{1}{2}, 1]$, 则

$$|D_{i1}^*(x) - A_i(x)| = \frac{1}{3} \left| \frac{1 - 6u + 12u^2 - 5u^3 - 9u^4 + 6u^5}{u(1 - 4u + 8u^2 - 4u^3)} \right| \leq \frac{1}{3},$$

于是

$$|\bar{S}_3(x) - F(x)| = |D_{i1}^*(x) - A_i(x)||y_i - y_{i+1}| \leq \frac{1}{3}|y_i - y_{i+1}| \leq \frac{1}{3}\|s'\|_\infty h。$$

当 $x \in [\bar{x}_i, x_{i+1}]$ 时, $v = A_{i+1}(x) \in [\frac{1}{2}, 1]$, 则

$$|D_{i2+1}^*(x) - A_{i+1}(x)| = \frac{1}{3} \left| \frac{1 - 6v + 12v^2 - 5v^3 - 9v^4 + 6v^5}{v(1 - 4v + 8v^2 - 4v^3)} \right| \leq \frac{1}{3},$$

于是

$$|\bar{S}_3(x) - F(x)| \leq |D_{i2+1}^*(x) - A_{i+1}(x)||y_{i+1} - y_i| \leq \frac{1}{3}\|s'\|_\infty h。$$

因此,

$$\|\bar{S}_3 - s\|_\infty \leq \|\bar{S}_3 - F\|_\infty + \|F - s\|_\infty \leq \frac{1}{8}\|s''\|_\infty h^2 + \frac{1}{3}\|s'\|_\infty h。$$

注 2. 定理 2 实际上给出了模糊系统 $\bar{S}(x)$ 具有泛逼近性的充分条件, 由此定理可确定推理规则数目。

例 1. 设 $s(x) = \frac{\sin(x)}{x}$, $X = [-3, 3]$, 则 $\|s'\|_\infty < 0.44$, $\|s''\|_\infty < 0.34$ 。令逼近误差 $\varepsilon \leq 0.1$, $h = \frac{3 - (-3)}{n-1} = \frac{6}{n-1}$ 。

则根据公式(4)可知: 当 $n \geq 10$ 时, $\|\bar{S}_1 - s\|_\infty \leq 0.1$ 。

仿真曲线和误差曲线见图 1。

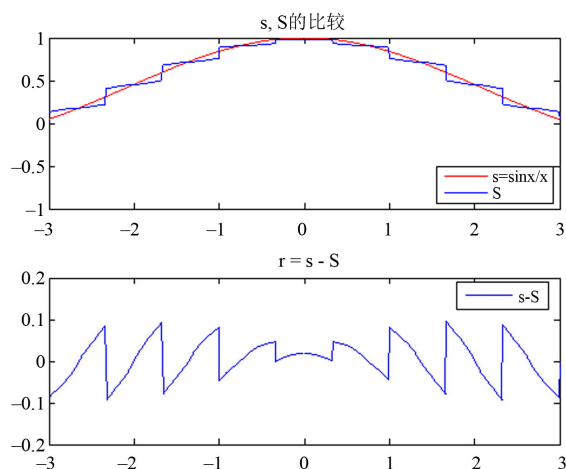


Figure 1. The simulation curve and the error curve
图 1. 仿真曲线和误差曲线

4. 概率表示理论

$$q(x, y) = \begin{cases} B^*(y), & (x, y) \in X \times Y \\ 0, & \text{其它} \end{cases}, \quad H = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} q(x, y) dx dy,$$

当 $X = [a, b], Y = [c, d]$ 时, 有

$$H = \int_a^b \int_c^d B^*(y) dx dy \tag{5}$$

若 $H > 0$, 则

$$f(x, y) = \frac{q(x, y)}{H} \tag{6}$$

满足:

$$f(x, y) \geq 0; \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1.$$

因此, $f(x, y)$ 可视为某随机向量 (ξ, η) 的联合密度函数^[5,6].

我们有:

定理 3

1) 若 $T(a, b) = a \wedge b$, 则

$$H = \frac{7}{12} \sum_{i=1}^{n-1} (y_{i+1} - y_i)(x_{i+1} - x_i) \tag{7}$$

2) 若 $T(a, b) = (a + b - 1) \vee 0$ 时, 则

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} (y_{i+1} - y_i)(x_{i+1} - x_i) \tag{8}$$

3) 若 $T(a, b) = ab$ 时, 则

$$H = \left(\ln 2 - \frac{1}{6} \right) \sum_{i=1}^{n-1} (y_{i+1} - y_i)(x_{i+1} - x_i) \tag{9}$$

证明:

1) 由定理 1 的证明知:

$$\begin{aligned}
 H &= \sum_{i=1}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_i}^{y_{i+1}} B^*(y) dy dx \\
 &= \sum_{i=1}^{n-1} \left[\int_{x_i}^{\bar{x}_i} \int_{y_i}^{y_i'} \mu dy dx + \int_{x_i}^{\bar{x}_i} \int_{y_i'}^{y_{i+1}} (v + B_i(y)) dy dx + \int_{\bar{x}_i}^{x_{i+1}} \int_{y_i}^{y_i'} (v + B_{i+1}(y)) dy dx + \int_{\bar{x}_i}^{x_{i+1}} \int_{y_i'}^{y_{i+1}} v dy dx \right] \\
 &= \frac{7}{12} \sum_{i=1}^{n-1} (y_{i+1} - y_i)(x_{i+1} - x_i),
 \end{aligned}$$

2)和 3)类似可证。

注 3 由定理 3 和公式 6 知：我们已得到模糊系统 $\bar{S}(x)$ 所对应的随机向量 (ξ, η) 的联合概率密度函数。

下面对 $T(a, b) = a \wedge b$ 和 $T(a, b) = (a + b - 1) \vee 0$ 的情况研究随机向量 (ξ, η) 的边缘概率密度函数及其对应的数字特征。我们有以下结论：

定理 4

1) 若 $T(a, b) = a \wedge b$ ，则随机向量 (ξ, η) 的边缘概率密度函数为

$$f_{\xi}(x) = \begin{cases} \frac{(y_{i+1} - y_i)}{2H} (4u - 4u^2 - 1), & x \in [x_i, \bar{x}_i] \\ \frac{(y_{i+1} - y_i)}{2H} (4v - 4v^2 - 1), & x \in [\bar{x}_i, x_{i+1}] \end{cases}, \quad f_{\eta}(y) = \frac{(x_{i+1} - x_i)}{2H} (1 + B_i(y) B_{i+1}(y)), y \in [y_i, y_{i+1}]$$

2) 若 $T(a, b) = (a + b - 1) \vee 0$ ，则随机向量 (ξ, η) 的边缘概率密度函数为

$$f_{\xi}(x) = \frac{y_{i+1} - y_i}{2H}, x \in [x_i, x_{i+1}]$$

$$f_{\eta}(y) = \frac{x_{i+1} - x_i}{2H}, y \in [y_i, y_{i+1}]$$

证明是显然的。

定理 5

1) 随机变量 ξ, η 的数学期望：

$$E(\xi) = \sum_{i=1}^n \omega_i \bar{x}_i, \quad E(\eta) = \sum_{i=1}^n \omega_i \bar{y}_i.$$

2) 随机变量 ξ, η 的方差：

$$D(\xi) \approx \sum_{i=1}^n \omega_i x_{i+1} x_i - \left(\sum_{i=1}^n \omega_i \bar{x}_i \right)^2, \quad D(\eta) \approx \sum_{i=1}^n \omega_i y_{i+1} y_i - \left(\sum_{i=1}^n \omega_i \bar{y}_i \right)^2.$$

3) 随机变量 ξ, η 的协方差：

$$\text{Cov}(\xi, \eta) \approx \sum_{i=1}^n \omega_i \bar{z}_i - \left(\sum_{i=1}^n \omega_i \bar{x}_i \right) \left(\sum_{i=1}^n \omega_i \bar{y}_i \right).$$

其中， $\omega_i = \frac{(y_{i+1} - y_i)(x_{i+1} - x_i)}{\sum_{i=1}^{n-1} (y_{i+1} - y_i)(x_{i+1} - x_i)}$ 。

证明： 仅对 $T(a, b) = a \wedge b$ 加以证明。

$$\begin{aligned}
 E(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{\xi}(x) dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_i}^{x_{i+1}} x f_{\xi}(x) dx = \sum_{i=1}^{n-1} \left[\int_{x_i}^{\bar{x}_i} x f_{\xi}(x) dx + \int_{\bar{x}_i}^{x_{i+1}} x f_{\xi}(x) dx \right] \\
 &= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{7(y_{i+1} - y_i)(x_{i+1} - x_i)}{12H} \cdot \frac{(x_{i+1} + x_i)}{2} = \sum_{i=1}^n \omega_i \bar{x}_i.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E(\xi^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_{\xi}(x) dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_i}^{x_{i+1}} x^2 f_{\xi}(x) dx = \sum_{i=1}^n \frac{(y_{i+1} - y_i)(x_{i+1} - x_i)}{H} \cdot \frac{7}{12} \left(x_{i+1} x_i + \frac{93}{280} (x_{i+1} - x_i)^2 \right) \\
 &\approx \sum_{i=1}^n \frac{7(y_{i+1} - y_i)(x_{i+1} - x_i)}{12H} \cdot x_{i+1} x_i = \sum_{i=1}^n \omega_i x_{i+1} x_i.
 \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}
 D(\xi) &= E(\xi^2) - (E(\xi))^2 \approx \sum_{i=1}^n \omega_i x_{i+1} x_i - \left(\sum_{i=1}^n \omega_i \bar{x}_i \right)^2, \\
 E(\xi\eta) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy f(x, y) dy dx = \sum_{i=1}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_i}^{y_{i+1}} xy f(x, y) dy dx \\
 &= \frac{1}{H} \sum_{i=1}^{n-1} \left[\int_{x_i}^{\bar{x}_i} \int_{y_i}^{y_i'} xy A_i(x) dy dx + \int_{x_i}^{\bar{x}_i} \int_{y_i'}^{y_{i+1}} xy (A_{i+1}(x) + B_i(y)) dy dx \right. \\
 &\quad \left. + \int_{\bar{x}_i}^{x_{i+1}} \int_{y_i}^{y_i'} xy (A_i(x) + B_{i+1}(y)) dy dx + \int_{\bar{x}_i}^{x_{i+1}} \int_{y_i'}^{y_{i+1}} xy A_{i+1}(x) dy dx \right] \\
 &= \sum_{i=1}^{n-1} \omega_i \bar{z}_i - \frac{13}{60} \sum_{i=1}^{n-1} \omega_i (y_{i+1} - y_i)(x_{i+1} - x_i) \approx \sum_{i=1}^{n-1} \omega_i \bar{z}_i, \\
 \text{Cov}(\xi, \eta) &= E(\xi\eta) - E(\xi)E(\eta) \approx \sum_{i=1}^n \omega_i \bar{z}_i - \sum_{i=1}^n \omega_i \bar{x}_i \cdot \sum_{i=1}^n \omega_i \bar{y}_i.
 \end{aligned}$$

5. 结论

本文应用参数单点模糊化方法，构造出了基于 Lukasiewicz 蕴涵的重心法模糊系统，证明了所构造的模糊系统具有泛逼近性，给出了所构造的模糊系统对应的联合概率密度函数、边缘概率密度函数和这些概率分布的数学期望、方差和协方差等数字特征。这些讨论进一步揭示了模糊系统的概率意义。

参考文献 (References)

- [1] 王立新著, 王迎军译. 模糊系统与模糊控制教程[M]. 北京: 清华大学出版社, 2003.
- [2] 李洪兴, 尤飞, 彭家寅, 曾文艺. 基于模糊蕴涵算子的模糊控制器及其响应函数[J]. 自然科学进展, 2003, 13(10): 1073-1077.
- [3] 李洪兴, 彭家寅, 王加银. 常见模糊蕴涵算子的模糊系统及其响应函数[J]. 控制理论与应用, 2005, 22(3): 341-347.
- [4] 袁学海, 李洪兴, 孙凯彪. 基于参数单点模糊化方法的模糊系统及其逼近能力[J]. 电子学报, 2011, 39(10): 2372-2377.
- [5] 李洪兴. 模糊系统的概率表示[J]. 中国科学 E 辑, 2006, 36(4): 373-397.
- [6] 袁学海, 李洪兴. 基于输入-输出数据的概率分布和数字特征[J]. 模糊系统与数学, 2011, 25(1): 69-78.
- [7] X. J. Zeng, M. G. Singh. Approximation theory of fuzzy systems-SISO case. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 1994, 2(2): 162-176.