Operations Research and Fuzziology 运筹与模糊学, 2020, 10(4), 296-302
Published Online November 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/orf
https://doi.org/10.12677/orf.2020.104031

Hans汉斯

完全和部分可观察模糊离散事件系统的状态反馈控制

张月慧，李桂莲

太原理工大学数学学院，山西 晋中
Email: SXXYzhangyuehui@163.com

收稿日期：2020年10月26日；录用日期：2020年11月11日；发布日期：2020年11月18日

摘 要

本文主要讨论完全和部分可观察模糊离散事件系统的状态反馈控制。首先，给出了模糊谓词可观察的定义，并证明了对于预先给定的模糊谓词存在合理的控制器使得闭环系统的可达模糊谓词等于所给定模糊谓词的充要条件是给定模糊谓词可控且可观察；其次，在一定条件下，将部分可观察模糊离散事件系统转化为完全可观察模糊离散事件系统，并讨论了模糊谓词在两类系统之间的控制不变性和可控性。

关键词

部分可观察模糊离散事件系统，模糊谓词，状态反馈控制

State Feedback Control of Fully and Partially Observable Fuzzy Discrete Event Systems

Yuehui Zhang, Guilian Li

School of Mathematics, Taiyuan University of Technology, Jinzhong Shanxi
Email: SXXYzhangyuehui@163.com

Received: Oct. 26th, 2020; accepted: Nov. 11th, 2020; published: Nov. 18th, 2020

Abstract

In this paper, we discuss the state feedback control of fully and partially observable fuzzy discrete event systems. Firstly, the definition of observable fuzzy predicate is given, and we construct a reasonable controller for a specified target fuzzy predicate such that the reachable fuzzy predicate of the closed-loop system equals to the specified fuzzy predicates if and only if the fuzzy predicate

文章引用：张月慧，李桂莲. 完全和部分可观察模糊离散事件系统的状态反馈控制[J]. 运筹与模糊学, 2020, 10(4): 296-302. DOI: 10.12677/orf.2020.104031

is controllable and observable. Secondly, under certain conditions, we transform a partially observable fuzzy discrete event system into a fully observable fuzzy discrete event system, and discuss the control invariance and controllability of fuzzy predicates of two types of systems.

Keywords

Partially Observable Fuzzy Discrete Event Systems, Fuzzy Predicates, State Feedback Control

1. 引言

离散事件系统(discrete event systems 简记为 DES)的控制理论首先由 Ramadge 和 Wonham [1] [2]提出，在该理论中 DES 以自动机为模型，并且将系统的控制分为事件反馈控制和状态反馈控制，DES 的状态反馈控制是通过状态反馈控制器来控制系统的。在 DES 的状态反馈控制中，我们并非直接观察系统的状态，而是通过一个输出映射将状态集映射为一个符号集来观察相应的输出符号。如果每一个状态都有一个对应的互不相同的输出符号，我们便称这类系统为完全可观察 DES；如果系统中的状态只有部分状态通过输出映射可以被观察到相应的输出符号，我们便称这类系统为部分可观察 DES。早在 20 世纪 90 年代，Li Y.和 Wonham W. M. [3]便开始了对部分可观察 DES 的探究。随后，诸多学者对部分可观察 DES 进行了研究，例如，Xiang Yin 和 Stéphane Lafortune [4]研究了部分可观察 DES 的最大允许控制问题；Liujuan Mei 和 Rongjian Liu [5]给出了验证部分可观察 DES 不透明度的矩阵方法等等。

然而，在实际生活中还有许多系统用 Li Y.和 Wonham W. M.所提出的模型难以进行模拟，因为这些系统中含有不确定性或模糊性。于是，Feng Lin 和 Hao Ying [6] [7]把模糊集理论引入到其中，给出了以模糊自动机为模型的模糊 DES，并研究了模糊 DES 的可观察性和最优控制问题，在此基础上 Yong Cao [8]研究了模糊 DES 的状态反馈控制。此外，还有许多学者对部分可观察模糊 DES 的很多其他性质也进行了研究，例如可检测性[9]，可预测性[10]，可诊断性[11]和安全诊断[12]以及基于梯度的在线学习[13]等。

本文主要研究了完全可观察和部分可观察模糊 DES 的状态反馈控制。我们给出了模糊谓词可观察的定义，并证明了对于预先给定的模糊谓词存在合理的状态反馈控制器使得闭环系统的可达模糊谓词等于所给定模糊谓词的充要条件是给定模糊谓词可控且可观察；然后，在一定条件下将部分可观察模糊 DES 转换为完全可观察模糊 DES，并讨论模糊谓词在两类系统之间的控制不变性和可控性。

2. 基础知识

本小节主要介绍部分可观察一般 DES 和部分可观察模糊 DES 的基本模型以及模糊 DES 状态反馈控制中的基本概念。

部分可观察一般 DES 与模糊 DES 的模型

部分可观察一般 DES 可表示为自动机[3]

$$\bar{G}=\left(\bar{Q},\bar{\Sigma},\bar{\delta},\bar{q}_0,\bar{Y},\bar{h}\right) \tag{1}$$

其中 $\bar{Q}$ 为状态集，$\bar{\Sigma}$ 为事件集，$\bar{\delta}:\bar{\Sigma}\times\bar{Q}\rightarrow\bar{Q}$ 为状态转移函数，$\bar{q}_0$ 为初始状态，$\bar{Y}$ 是可观察的输

出符号集，而 $\bar{h}:\bar{Q}\to\bar{Y}$ 是输出映射。$\forall\bar{q},\bar{q}'\in\bar{Q}$，$\bar{\sigma}\in\bar{\Sigma}$，当 $\bar{\delta}(\bar{\sigma},\bar{q})=\bar{q}'$ 时，称 $\bar{\delta}(\bar{\sigma},\bar{q})$ 有定义，记为 $\bar{\delta}(\bar{\sigma},\bar{q})!$。

当 $\bar{Y}=\bar{Q}$ 且 $\bar{h}$ 是一一映射时系统是完全可观察的，并记为

$$\bar{G}=\left(\bar{Q},\bar{\Sigma},\bar{\delta},\bar{q}_0\right). \tag{2}$$

部分可观察模糊 DES 可表示为自动机

$$G=\left(Q,\Sigma,\delta,q_0,Y,h\right) \tag{3}$$

其中 Q 为模糊状态集，Σ 为模糊事件集，$\delta:\Sigma\times Q\to Q$ 为状态转移函数，q_0 为初始状态，Y 是可观察的输出符号集，而 $h:Q\to Y$ 是输出映射。

与一般状态集 $\bar{Q}$ 相对应的模糊状态集 Q 中的元素表示为 $q=\left[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\right]$，$\alpha_i\in[0,1](i=1,2,\cdots,n)$ 表示 q 属于 $\bar{q}_i\,(i=1,2,\cdots,n)$ 的程度；$\sigma=\left[\beta_{ij}\right]_{n\times n}\in\Sigma$ 且 $\beta_{ij}\in[0,1](i,j=1,2,\cdots,n)$ 表示事件 σ 发生后使系统从状态 $\bar{q}_i$ 可以转移到状态 $\bar{q}_j$ 的可能性；在 G 中，$\forall q\in Q$，$\sigma\in\Sigma$，

$\delta(\sigma,q)=q\circ\sigma=\left[\alpha_i\right]_{1\times n}\circ\left[\beta_{ij}\right]_{n\times n}=\left[\lambda_t\right]_{1\times n}$，$\lambda_t=\max\limits_{1\le j\le n}\left\{\min\limits_{1\le i\le n}\left(\alpha_i,\beta_{ij}\right)\right\}(t=0,1,\cdots,n)$。

状态反馈控制是利用状态反馈控制器来控制系统。为了使系统在预先给定的状态集中发生变化，将事件集 Σ 分为可控事件集 Σ_c 和不可控事件集 Σ_u 且 $\Sigma_c\cap\Sigma_u=\varnothing$。定义控制输入 γ 为映射：$\Sigma\to[0,1]$ 满足 $\gamma(\sigma)=1,\sigma\in\Sigma_u$，记控制输入的全体为 Γ。模糊状态反馈控制器 f [15]为

$$f:Q\to\Gamma. \tag{4}$$

由于系统是部分可观察的，其控制器应该基于观察到的输出符号来进行控制，即此时的控制器还应该满足 $q,q'\in Q,h(q)=h(q')\Rightarrow f(q)=f(q')$，也就是说存在函数 $g:Y\to\Gamma$，称 g 为一个 h-控制器。

对 f 及 $\sigma\in\Sigma$，定义 $f_\sigma:Q\to[0,1]$ 为

$$f_\sigma(q)=f(q)(\sigma) \tag{5}$$

显然 f 完全由 $\left\{f_\sigma:\sigma\in\Sigma\right\}$ 决定。

2.2. 基础概念

定义 2.1 [14]部分可观察模糊 DES 中的模糊谓词 P 定义为状态集 Q 上的一个函数：

$$P:Q\to[0,1] \tag{6}$$

其中 $\forall q=\left[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\right]$，$P(q)=\max\limits_{1\le i\le n}(\alpha_i)$。

记 Q 上所有模糊谓词组成的集合为 $P(Q)$，定义 $P(Q)$ 上的算子~(否定)、$\wedge$(合取)、$\vee$(析取)如下：

$$\begin{aligned}&(\sim P)(q)=1-P(q),\forall q\in Q;\\&(P_1\wedge P_2)(q)=\min\left\{P_1(q),P_2(q)\right\},\forall q\in Q;\\&(P_1\vee P_2)(q)=\max\left\{P_1(q),P_2(q)\right\},\forall q\in Q\end{aligned} \tag{7}$$

定义 2.2 [15]对模糊谓词 P 和事件 $\sigma\in\Sigma$，模糊谓词变换 $sp_\sigma:P(Q)\to P(Q)$ 定义为：

$$sp_\sigma(P)(q)=\begin{cases}\max P(q'), & \exists q'\text{使得}q'\circ\sigma=q,\\0, & \text{否则}\end{cases} \tag{8}$$

与谓词变换 sp_σ 的含义向反，我们定义模糊谓词 P 的另一模糊谓词变换如下：

定义 2.3 [15]对模糊谓词 P 和事件 $\sigma\in\Sigma$，模糊谓词变换 $wlp_\sigma:P(Q)\to P(Q)$ 定义为：

$$wlp_\sigma(P)(q)=\max\left\{P(\sigma\circ q)\wedge D_\sigma(q),1-D_\sigma(q)\right\},\forall q\in Q \tag{9}$$

其中模糊谓词 $D_\sigma : Q \to [0,1]$ 为 $D_\sigma(q) = \max(q \circ \sigma)$。

显然，由定义 2.3 可知，若对 $\forall \alpha \in (0,1]$，$q \in Q$，$P(q) \ge \alpha$，若 $wlp_\sigma(P) = 0$，则 $D_\sigma(q) = 1$ 且 $P(\delta(\sigma,q)) < \alpha$。

定义 2.4 [15]对模糊谓词 P 和事件 $\sigma \in \Sigma$ 引入模糊状态反馈控制 f，定义模糊谓词变换 $wlp_{\sigma f} : P(Q) \to P(Q)$ 为：

$$wlp_{\sigma f}(P)(q) = \max\{wlp_\sigma(P)(q), 1 - f_\sigma(q)\}，\quad \forall q \in Q. \tag{10}$$

定义 2.5 [15]称模糊谓词 $P \in P(Q)$ 是控制不变的，如果存在模糊状态反馈控制器 f 使得：

$$P(q) \le wlp_{\sigma f}(P)(q)，\quad \forall \sigma \in \Sigma，\quad q \in Q. \tag{11}$$

定义 2.6 [15]定义 G 在 f 控制下闭环统的可达谓词

$$\mathrm{Re}(f/G, Q) : Q \to [0,1] \tag{12}$$

为 $\mathrm{Re}(f/G,Q)(q_0) = 1$ 且 $\mathrm{Re}(f/G,Q)(q) = \alpha$，$\alpha \in (0,1]$。存在 $q_0, q_1, \cdots, q_m = q \in Q$ 及 $\sigma_0, \sigma_1, \cdots, \sigma_{m-1} \in \Sigma$ 以及 $\gamma_i(\sigma_i) > 0$ $(\gamma_i \in \Gamma, i = 0,1,\cdots,m-1)$ 且 $\delta(\sigma_i, q_i) = q_{i+1}$ $(i = 1,2,\cdots,m-1)$ 满足：

1) $\min\limits_{0 \le i \le m-1} D_{\sigma_i}(q_i) \ge \alpha$；

2) $\min\limits_{0 \le i \le m-1} f_{\sigma_i}(q_i) \ge \alpha$；

3) 至少存在 $k \in \{0,1,\cdots,m-1\}$ 使得 $D_{\sigma_k}(q_k) = \alpha$ 或 $f_{\sigma_k}(q_k) = \alpha$；

4) 对其他任意不完全相同于状态 $q_0, q_1, \cdots, q_m = q \in Q$，事件 $\sigma_0, \sigma_1, \cdots, \sigma_{m-1} \in \Sigma$ 的状态 $x_j \in Q$ 及事件 $\sigma'_{j-1} \in \Sigma$ $(j = 1,\cdots,l)$ 满足 $\delta_{\sigma'_j}(r_j) = r_{j+1}$ 且 $r_l = q$，则有 $\min\limits_{0 \le j \le l-1} D_{\sigma'_j}(r_j) \le \min\limits_{0 \le i \le m-1} D_{\sigma_i}(q_i)$ 且 $\min\limits_{0 \le j \le l-1} f_{\sigma_j}(r_j) \le \min\limits_{0 \le i \le m\text{-}1} f_{\sigma_i}(q_i)$。

记 $\mathrm{Re}(f/G,Q)$ 为 f/G 的可达状态集。

定义 2.7 [15]设 $P \in P(Q)$ 且 $P(q_0) = 1$。定义模糊谓词

$$\mathrm{Re}(G,P) : Q \to [0,1] \tag{13}$$

为 $\mathrm{Re}(G,P)(q_0) = 1$ 且 $\mathrm{Re}(G,P)(q) = \alpha, \alpha \in (0,1]$。存在 $q_0, q_1, \cdots, q_m = q \in Q$ 及 $\sigma_0, \sigma_1, \cdots, \sigma_{m-1} \in \Sigma$ 且 $\delta(\sigma_i, q_i) = q_{i+1}$ $(i = 1,2,\cdots,m-1)$ 满足：

1) $\min\limits_{0 \le i \le m-1} D_{\sigma_i}(q_i) \ge \alpha$；

2) $\min\limits_{0 \le i \le m-1} P(q_i) \ge \alpha$；

3) 至少存在 $k \in \{0,1,\cdots,m-1\}$ 使得 $D_{\sigma_k}(q_k) = \alpha$ 或 $P(q_k) = \alpha$；

4) 对其他任意不完全相同于状态 $q_0, q_1, \cdots, q_m = q \in Q$，事件 $\sigma_0, \sigma_1, \cdots, \sigma_{m-1} \in \Sigma$ 的状态 $x_j \in Q$ 及事件 $\sigma'_{j-1} \in \Sigma$ $(j = 1,\cdots,l)$ 满足 $\delta_{\sigma'_j}(r_j) = r_{j+1}$ 且 $r_l = q$，则有 $\min\limits_{0 \le j \le l-1} D_{\sigma'_j}(r_j) \le \min\limits_{0 \le i \le m-1} D_{\sigma_i}(q_i)$ 且 $\min\limits_{0 \le j \le l-1} P(r_j) \le \min\limits_{0 \le i \le m\text{-}1} P(q_i)$。

3. 主要结论

本节在文[15]所给出的模糊谓词定义的基础上，讨论了部分可观察模糊 DES 和完全可观察模糊 DES 的状态反馈控制。

定义 3.1 设 $P \in P(Q)$，如果 $\forall q \in Q$，$\sigma \in \Sigma_u$ 有

$$P \le \mathrm{Re}(G,P) \wedge wlp_\sigma(P) \tag{14}$$

则称模糊谓词 P 是可控的。

对任一模糊谓词 $P\in P(Q)$， $P(q)\ge\alpha\left(q\in Q,\alpha\in(0,1]\right)$，首先给出输出映射 h 的一个逆像 h^{-1}，即

$$h^{-1}\left(h(P)\right)=\left\{q\in Q\,\middle|\,h(P)\left(h(q)\right)\ge\alpha\right\}.$$

定义 3.2 设 $P\in P(Q)$，如果 $\forall q\in Q,\sigma\in\Sigma_c$ 有

$$P\ge h^{-1}\left(h\left(sp_\sigma(P)\wedge P\right)\right)\wedge sp_\sigma(P) \tag{15}$$

则称模糊谓词 P 是可观察的。

显然，模糊谓词 $P\in P(Q)$， $\alpha\in(0,1]$ 可观察等价于存在满足 $P(q')\ge\alpha$， $P(q'')\ge\alpha$ 的 $q',q''\in Q$，$\sigma\in\Sigma_c$， $h(q')=h(q'')$ 且 $P\left(\delta(\sigma,q'')\right)\ge\alpha$，则 $P\left(\delta(\sigma,q')\right)\ge\alpha$。

定理 3.1 设模糊谓词 P 可控可观察当且仅当存在一个合理的 h-控制器 f 使得 $\mathrm{Re}(f/G,Q)=P$。

证明 首先给出 G 的一个合理的模糊控制器

$$f_\sigma(q)=\begin{cases}wlp_\sigma(P)(q), & q\in Q,\sigma\in\Sigma_c,\\ 1, & q\in Q,\sigma\in\Sigma_u.\end{cases} \tag{16}$$

在给定上述控制器的前提下证明该引理。

充分性：假设 P 是可控且可观察的，下证 $\mathrm{Re}(f/G,Q)=P$。对任意的 $q=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]$，$\alpha\in[0,1]$，则有 $P(q)=\max\limits_{1\le i\le n}\alpha_i$。记 $\max\limits_{1\le i\le n}\alpha_i=\alpha$， 下证 $\mathrm{Re}(f/G,Q)(q)=\alpha$。由于 P 是可控可观察的且 $P(q_0)=1$，则 $P\le\mathrm{Re}(G,P)$ 成立。由定义 2.7 可知： $\exists m\ge0$， 状态 $q_0,q_1,\cdots,q_m=q\in Q$ 及事件 $\sigma_0,\sigma_1,\cdots,\sigma_{m-1}\in\Sigma$，$\delta_{m-1}(\sigma_i,q_i)=q_{i+1}$ 满足： $\min\limits_{0\le i\le m-1}D_{\sigma_i}(q_i)\ge\alpha$ 且 $\min\limits_{0\le i\le m-1}P(q_i)\ge\alpha$。由定义 2.6 可知要证 $\mathrm{Re}(f/G,Q)(q)=\alpha$ 成立，只需证 $\min\limits_{0\le i\le m-1}f_{\sigma_i}(q_i)\ge\alpha$ 即可。

当 $\sigma\in\Sigma_u$ 时，由 f 的定义可知 $f_\sigma(q_i)=1\ge\alpha$ 恒成立；

当 $\sigma\in\Sigma_c$ 时，利用反证法，假设存在 k 使得 $f_{\sigma_k}(q_k)<\alpha$，则由 f 可知有 $h(P)\left(h\left(\delta(\sigma_k,q_k)\right)\right)<\alpha$ 成立。由自动机 $G(P)$ 的定义可知 $P(\sigma_k\circ q_k)<\alpha$。这与定义 2.7 中的 $\min\limits_{0\le i\le m-1}P(q_i)\ge\alpha$ 矛盾，因此 $f_{\sigma_k}(q_k)\ge\alpha$ 成立，即 $\min\limits_{0\le i\le m-1}f_{\sigma_i}(q_i)\ge\alpha$ 成立。故而有 $\mathrm{Re}(f/G,Q)(q)=\alpha$， 即 $\mathrm{Re}(f/G,Q)=P$。

必要性：假设对任意的 $q\in Q$，对上述所给合理的控制器 f 有 $\mathrm{Re}(f/G,Q)(q)=P(q)$ 成立，下证模糊谓词 P 是可控且可观察的。

由文[15]中定理 3.2 可知，存在合理的模糊控制器 f 使得 $\mathrm{Re}(f/G,Q)=P$ 成立时，P 是可控的。

下证模糊谓词 P 是可观察的，即任给的 $\alpha\in[0,1]$，若存在某 $\sigma\in\Sigma_c$， $q',q''\in Q$，满足 $\delta(\sigma,q')!$，$\delta(\sigma,q'')!$， $P(q')\ge\alpha$， $P(q'')\ge\alpha$， $h(q')=h(q'')$， $P\left(\delta(\sigma,q'')\right)\ge\alpha$ 时，有 $P\left(\delta(\sigma,q')\right)\ge\alpha$。

因为 $\mathrm{Re}(f/G,Q)=P$，所以只须证 $\mathrm{Re}(f/G,Q)\left(\delta(\sigma,q')\right)\ge\alpha$ 即可。

由 $\delta(\sigma,q')!$， $\delta(\sigma,q'')!$ 且 $h(q')=h(q'')$，故而有 $\delta(\sigma,q')=\delta(\sigma,q'')$。又因为 $P\left(\delta(\sigma,q'')\right)\ge\alpha$，所以 $\mathrm{Re}(f/G,Q)\left(\delta(\sigma,q'')\right)\ge\alpha$，由定义 2.6 可知 $f_\sigma\left(\delta(\sigma,q'')\right)\ge\alpha$。又因为模糊控制器 f 是合理的，所以 $f_\sigma\left(\delta(\sigma,q')\right)\ge\alpha$，由 f 可知 $wlp_\sigma(P)(q)\ge\alpha$，$\max\left\{P\left(\delta\left(\sigma,\delta(\sigma,q')\right)\right)\wedge D_\sigma\left(\delta(\sigma,q')\right),1-D_\sigma\left(\delta(\sigma,q')\right)\right\}\ge\alpha$，故 $P\left(\delta\left(\sigma,\delta(\sigma,q')\right)\right)\ge\alpha$， 所以 $P\left(\delta(\sigma,q')\right)\ge\alpha$， 因此模糊谓词 P 是可观察的。

综上所述，模糊谓词 P 是可控且可观察的。

证毕。

为进一步研究模糊 DES 的状态反馈控制，我们在给定下面条件 A 的基础上，将部分可观察模糊 DES 转化为完全可观察模糊 DES。

条件 A 对 $\sigma\in\Sigma$ 及满足 $P(q)\ge\alpha$， $P(q')\ge\alpha$ 的 $q,q'\in Q$，若 $\delta(\sigma,q)!$， $\delta(\sigma,q')!$，则 $h(q)=h(q')$ $\Rightarrow h(\delta(\sigma,q))=h(\delta(\sigma,q'))$。

对可控可观察模糊谓词 P，设 $\delta(\sigma,q)!$，记 $y=h(q)$。

$$G(P)=(Y\cup\{Y_J\},\Sigma,\delta',y_0). \tag{17}$$

其中 $\sigma\in\Sigma$，

$$\delta'(\sigma,y)=\begin{cases}h(\delta(\sigma,q)), & \text{若存在}P(q)\ge\alpha\text{且}P(\delta(\sigma,q))\ge\alpha,\alpha\in(0,1]\\ Y_J, & \text{若存在}P(q)\ge\alpha\text{且}P(\delta(\sigma,q))<\alpha,\alpha\in(0,1]\\ \text{无定义}, & \text{否则}\end{cases} \tag{18}$$

这里 Y_J 为 Y 的一个虚设状态，而 $y_0=h(q_0)$。对于任意可观察的模糊谓词 P，由 $G(P)$ 的转移函数可知 $G(P)$ 中的每一个状态都会有相对应的输出符号，因此 $G(P)$ 是一个完全可观察的模糊 DES。

下面我们讨论 $h(P)$ 作为 $G(P)$ 的谓词与 P 作为 G 的谓词之间的关系。

定理 3.2 设模糊谓词 P 满足条件 A 且可控可观察，则

1) P 相对于 G 是控制不变的当且仅当 $h(P)$ 相对于 $G(P)$ 是控制不变的。

2) 若 P 相对于 G 是可控的，则 $h(P)$ 相对于 $G(P)$ 是可控的。

证明 (1)充分性：要证 $h(P)$ 相对于 $G(P)$ 是控制不变的，只须证对任给的 $\sigma\in\Sigma_u$， $y\in Y$， $\delta'(\sigma,y)!$ 且 $h(P)(y)\ge\alpha$，$\alpha\in(0,1]$，则有 $h(P)(\delta'(\sigma,y))\ge\alpha$ 即可。若对 $\forall\sigma\in\Sigma_u$，$y\in Y$，$\delta'(\sigma,y)!$ 且 $h(P)(y)\ge\alpha$，可知 $\exists q\in Q$ 且 $P(q)>\alpha$，使得 $y=h(q)$ 且 $\delta(\sigma,q)!$。又因为 P 相对于 G 是控制不变的，则有 $P\le wlp_\sigma(P)$，即对 $\forall\sigma\in\Sigma$，$q\in Q$，$\delta(\sigma,q)!$，若 $P(q)>\alpha$，则有 $\delta(\sigma,q)=q'$ 且 $P(\delta(\sigma,q))\ge\alpha$。因此 $\delta'(\sigma,y)=h(q')$ 且 $h(P)(\delta'(\sigma,y))\ge\alpha$。

必要性：要证 P 相对于 G 是控制不变的，只须证对 $\forall\sigma\in\Sigma_u$， $q\in Q$， $\delta(\sigma,q)!$ 且 $P(q)\ge\alpha$，则有 $P(\delta(\sigma,q))\ge\alpha$ 即可。对任给的 $\sigma\in\Sigma_u$， $q\in Q$， $\delta(\sigma,q)!$ 且 $P(q)\ge\alpha$，记 $y=h(q)$，由 $G(P)$ 的定义可知 $\delta'(\sigma,y)!$。又因为 $h(P)$ 相对于 $G(P)$ 是控制不变的，故而有 $h(P)(\delta'(\sigma,y))\ge\alpha$，从而 $P(\delta(\sigma,q))\ge\alpha$。

若 P 相对于 G 是可控的，则 $P\le\mathrm{Re}(G,P)\wedge wlp_\sigma(P)$。由定义 2.7 知 $\exists m\ge 0$，状态 $q_0,q_1,\cdots,q_m\in Q$ 及事件 $\sigma_0,\sigma_1,\cdots,\sigma_{m-1}\in\Sigma,\delta_{\sigma_i}(q_i)=q_{i+1},q_m=q$，满足 $\min\limits_{0\le i\le m-1}D_{\sigma_i}(q_i)\ge\alpha$ 且 $\min\limits_{0\le i\le m-1}P(q_i)\ge\alpha$。记 $y_i=h(q_i)$，则 $\min\limits_{0\le i\le -m-1}D'_{\sigma_i}(y_i)\ge\alpha$ 且 $\min\limits_{0\le i\le m-1}h(P)(y_i)\ge\alpha$，所以有 $h(P)\le\mathrm{Re}(Y,h(P))$。因此，结合(1)可知 $h(P)$ 相对于 $G(P)$ 是可控。

但其逆并不成立。例如，若 P 相对于 G 是可控，取 $q_J\notin Q$ 但有 $\delta(\sigma,q_J)=q_J$ 且 $h(q_J)=h(q_0)$ 成立，此时 q_J 是不可达的，故有 $P\cup\{q_J\}$ 是不可控的，但我们根据 $G(P)$ 的定义可知 $h(P)\cup\{q_J\}$ 却是可控的。

参考文献

[1] 徐国华, 胡奇英. 离散事件动态系统的监控方法[M]. 郑州: 河南科学技术出版社, 1996.

[2] Ushio, T. (1989) On Controllable Predicates and Languages in Discrete Event Systems. *Proc*. 28*th on Decision and Control*, Tampa, December 1989, 123-124.

[3] Li, Y. and Wonham, W.M. (1998) Controllability and Observability in the State-Feedback Control of Discrete Event Systems. *Proceedings of the* 27*th IEEE Conference on Decision and Control*, Austin, 7-9 December 1988, 203-208.

[4] Yin, X. and Lafortune, S. (2016) Synthesis of Maximally Permissive Supervisors for Partially-Observed Discrete-Event Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **61**, 1239-1254. https://doi.org/10.1109/TAC.2015.2460391

[5] Mei, L., Liu, R., Lu, J., *et al*. (2020) Matrix Approach for Verification of Opacity of Partially Observed Discrete Event

Systems. *Circuits Systems and Signal Processing*. https://doi.org/10.1007/s00034-020-01462-2

[6] Lin, F. and Ying, H. (2001) Fuzzy Discrete Event Systems and Their Observability. *Proceedings Joint* 9*th IFSA World Congress and 20th NAFIPS International Conference*, Vancouver, 25-28 July 2001, 1271-1276.

[7] Lin, F. and Ying, H. (2002) Modeling and Control of Fuzzy Discrete Event Systems. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics Part B: Cybernetics*, **32**, 408-415. https://doi.org/10.1109/TSMCB.2002.1018761

[8] Cao, Y.Z., Ying, M.S. and Chen, G.Q. (2007) State-Based Control of Fuzzy Discrete Event Systems. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics Part B: Cybernetics*, **37**, 410-424. https://doi.org/10.1109/TSMCB.2006.883429

[9] Mekki, A.O., Feng, L., *et al*. (2017) Fuzzy Detectabilities for Fuzzy Discrete Event Systems. 2017 *IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, Naples, 9-12 July 2017, 1-6. https://doi.org/10.1109/FUZZ-IEEE.2017.8015431

[10] Benmessahel, B., Touahria, M. and Nouioua, F. (2017) Predictability of Fuzzy Discrete Event Systems. *Discrete Event Dynamic Systems*, **27**, 21-33. https://doi.org/10.1007/s10626-017-0256-7

[11] Kilic, E. (2008) Diagnosability of Fuzzy Discrete Event Systems. *Information Sciences*, **178**, 858-870. https://doi.org/10.1016/j.ins.2007.09.009

[12] Liu, F. and Wu, L. (2018) Decentralized Safe Diagnosis of Fuzzy Discrete-Event Systems. 37*th Chinese Control Conference* (*CCC*), Wuhan, 25-27 July 2018, 270-275.

[13] Ying, H., Lin, F. and Sherwin, R. (2019) Fuzzy Discrete Event Systems with Gradient-Based Online Learning. *IEEE International Conference on Fuzzy Systems* (*FUZZ-IEEE*), New Orleans, 23-26 June 2019, 1-6. https://doi.org/10.1109/FUZZ-IEEE.2019.8859012

[14] 王雅楠. 模糊离散事件系统中的控制不变度[J]. 太原理工大学学报, 2016, 47(6): 818-820.

[15] 王文荣. 模糊离散事件系统的状态反馈控制[J]. 模糊系统与数学, 2019, 33(5): 67.