

一类非线性抛物最优控制问题的 *Crank – Nicolson*有限元近似格式误差分析

丁美玲, 李欢欢, 罗贤兵*

贵州大学数学与统计学院, 贵州 贵阳

收稿日期: 2023年6月9日; 录用日期: 2023年8月16日; 发布日期: 2023年8月24日

摘要

本文对一类非线性抛物最优控制问题给出了 *Crank – Nicolson* 有限元近似格式。对于状态 y 和伴随状态变量 p 采用线性协调有限元离散, 对控制变量 u 采用分片常数近似; 得到了控制和状态变量近似的先验误差估计 $\mathcal{O}(h + h_u + (\Delta t)^2)$, 为验证算法的有效性给出了数值算例。

关键词

非线性, 抛物最优控制, *Crank – Nicolson* 格式, 先验误差估计, 有限元

Error Estimate for the *Crank – Nicolson* Finite Element Scheme Approximation of Nonlinear Parabolic Optimal Control Problems

Meiling Ding, Huanhuan Li, Xianbing Luo*

College of Mathematics and Statistics, Guizhou University, Guiyang Guizhou

Received: Jun. 9th, 2023; accepted: Aug. 16th, 2023; published: Aug. 24th, 2023

* 通讯作者。

Abstract

In this paper, we present a Crank – Nicolson scheme combined with finite element approximation for a class of nonlinear parabolic optimal control problems, where the state y and co-state p are discretized by piecewise linear continuous function and the control u is approximations by piecewise constant functions. Numerical experiments verify that the convergence order is $\mathcal{O}(h + h_U + (\Delta t)^2)$.

Keywords

Nonlinear, Parabolic Optimal Control, Crank – Nicolson Scheme, Priori Error Estimates, Finite Element

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

非线性最优控制问题在实际生活中应用十分广泛, 常用来描述电子学, 工程学, 金融学以及生物学中的相关模型, 如: 相场最优控制问题, *Navier – Stokes* 方程最优控制问题, *Burgers* 方程最优控制问题等. 由于方程中涉及到非线性项, 导致在理论分析和数值计算时具有一定的难度. 其中数值计算常用的方法有差分法, 粒子法, 谱方法, 有限体积法, 有限元法等. 在文献 [1] 及其相关引文中研究了最优控制问题的有限元逼近; 在 [2] 中, Ira Neitzel 等人对半线性抛物方程的最优控制问题采用在空间上使用有限元离散, 在时间上使用间断伽辽金法离散, 并得到了该离散格式的先验误差估计; 在 [3] 中, 通过有限元方法对一类非线性最优控制问题进行了先验误差估计; 在文献 [4] 给出了关于在凸多边形域内基于有限体积元法的抛物方程最优控制问题的半离散格式, 并作出误差分析; 在 [5] 中, 采用间断有限元方法对非线性最优控制问题进行离散求解; 在 [6] 中, 对瞬态平流扩散方程, 时间上采用 Crank – Nicolson 格式, 空间上采用有限元, 分析了全隐格式和半隐半显格式的收敛性; 在 [7] 中, 对状态空间使用混合有限元离散, 对时间基于差分方法从而得出半线性抛物方程控制的最优控制问题的全离散格式, 并给出误差分析. 文献 [8] 中采用插值系数混合有限元方法对空间进行离散, 对时间采用欧拉法离散, 最终得到半线性抛物型最优控制问题的全离散格式, 该格式关于时间和空间都是一阶收敛. 文献 [9] 通过构造向后欧拉变分离散格式, 得到了关于非线性抛物型最优控制问题

在空间上数值解的二阶收敛性. 在 [10] 中, 杨彩杰等人结合 *Crank – Nicolson* 格式和有限差分法对线性抛物最优控制问题进行离散, 并推导出了关于时间的二阶收敛性. 在 [11] 中, 结合混合有限元的 *Crank – Nicolson* 格式被用于线性抛物最优控制问题, 最后得到了时间和空间上的二阶收敛性. 然而关于非线性方程最优控制问题的 *Crank – Nicolson* 格式尚未见到相关文献. 因此, 本文基于有效的有限元方法, 结合 *Crank – Nicolson* 格式理论分析状态及控制变量的先验误差估计.

本文结构安排如下: 在第 2 节, 推导并给出非线性抛物控制问题的 *Crank – Nicolson* 有限元离散格式; 第 3 节, 通过引入辅助问题, 得到了控制和状态近似的先验误差估计; 第 4 节通过数值实验验证理论结果. 第 5 节对本文进行总结与展望.

2. 最优控制问题的 *Crank – Nicolson* 有限元离散格式

2.1. 最优控制问题

考虑分布式最优控制问题 [3]

$$\min_{u \in U_{ad}} \int_0^T (g(y) + \kappa(u)) dt, \quad (1)$$

其中

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} - \operatorname{div}(A \nabla y) + \phi(y) = f + Bu, & x \in \Omega, t \in (0, T), \\ y(x, t) = 0, & x \in \partial\Omega, t \in (0, T), \\ y(x, 0) = y_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (2)$$

这里 g 和 κ 为给定的凸泛函, $U_{ad} = \{u \in L^2(0, T; L^2(\Omega_U)) : u_a \leq u \leq u_b \text{ a.e. in } \Omega\}$ 是一闭凸集, $B : L^2(0, T; L^2(\Omega_U)) \rightarrow L^2(0, T; L^2(\Omega))$ 为线性连续算子.

给定 f, u 及 y_0 , 那么求解最优控制问题 (1)-(2) 等价于求解 $y \in H^1(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ 使得 (QCP) 成立, 如下式

$$\begin{cases} \min_{u \in U_{ad}} = \int_0^T (g(y) + \kappa(u)) dt, \\ (\frac{\partial y}{\partial t}, v) + a(y, v) + (\phi(y), v) = (f + Bu, v), & x \in \Omega, t \in (0, T), \\ y(x, 0) = y_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (3)$$

其中 $a(w, v) = \int_{\Omega} A \nabla w \cdot \nabla v$. 这里 $A(x) = (a_{i,j}(\cdot)_{n \times n}) \in (W^{1,\infty}(\Omega))^{n \times n}$ 为对称正定矩阵. 函数 ϕ 满足对任意 $R > 0$ 及 $y(t) \in H^1(\Omega)$, 成立 $\phi(\cdot) \in l^{\infty}(0, T; W^{1,\infty}(-R, R))$, $\phi'(y(t)) \in L^2(\Omega)$ 且 $\phi' \geq 0$, 在此假设下, 根据文献 [12] 和 [13] 可知控制问题 (3) 存在唯一弱解 (y, u) , 当且仅当存在伴随状态 $p \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ 使得 (y, p, u) 满足以下最优化条件 $(QCP-OPT)$:

$$\begin{cases} (\frac{\partial y}{\partial t}, v) + a(y, v) + (\phi(y), v) = (f + Bu, v), & \forall v \in H_0^1(\Omega), t \in (0, T), \\ y(x, 0) = y_0(x), & x \in \Omega. \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} -\left(\frac{\partial p}{\partial t}, w\right) + a(p, w) + (\phi'(y)p, w) = (g'(y), w), & \forall w \in H_0^1(\Omega), t \in (0, T), \\ p(x, T) = 0, & x \in \Omega. \end{cases} \quad (5)$$

$$\int_0^T (\kappa'(u) + B^* p, w - u)_U \geq 0. \quad \forall w \in U_{ad}. \quad (6)$$

其中 B^* 为 B 的伴随算子, g' 为 g 在 $H = L^2(\Omega)$ 意义下的导数, $(\cdot, \cdot)_U$ 表示空间 U 下的内积.

2.2. 有限元离散

令 $\mathcal{T}^h, \mathcal{T}_U^h$ 分别表示 Ω 和 Ω_U 的正则三角形剖分, 剖分单元分别记为 K, \hat{K} , 剖分单元的最大直径为 h, h_U . 分别定义状态有限元空间 $V_h := \{v_h | v_h \in C(\bar{\Omega}) : v_h|_K \in P_1(K), \forall K \in \mathcal{T}^h\}$, 控制有限元空间 $U_h := \{u_h \in L^2(0, T; \Omega_U) : u_h|_{\hat{K}} \text{ is constant, } \forall \hat{K} \in \mathcal{T}_U^h\}$. 将时间区间 $(0, T]$ 离散化, 使得 $n = 0, \dots, N_T, t^n = n\Delta t$, 其中 $\Delta t = \frac{T}{N_T}$. 记

$$d_t \zeta^{n+1} = \frac{\zeta^{n+1} - \zeta^n}{\Delta t}, \quad \tilde{d}_t \zeta^{n+1} = \frac{\zeta^n - \zeta^{n+1}}{\Delta t},$$

对任意 $t \in (0, T]$, 定义 $\omega_I(t) \in V_h$ 为 $\omega(t) \in V$ 的椭圆投影, 即

$$a(\omega(t) - \omega_I(t), \mu_h) = 0, \quad \forall \mu_h \in V_h. \quad (7)$$

类似文献 [14] 可证对 $1 \leq r \leq 2$ 有

$$\|\omega - \omega_I\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))}^2 + h\|\omega - \omega_I\|_{L^2(0, T; H^1(\Omega))} \leq h^r \|\omega\|_{L^2(0, T; H^r(\Omega))}, \quad (8)$$

$$\left\| \frac{\partial(\omega - \omega_I)}{\partial t} \right\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))}^2 + h \left\| \frac{\partial(\omega - \omega_I)}{\partial t} \right\|_{L^2(0, T; H^1(\Omega))} \leq h^r \|\omega\|_{H^1(0, T; H^r(\Omega))}. \quad (9)$$

同时, 定义 L^2 投影 $\mathcal{R}_h : L^2(0, T; \Omega_U) \rightarrow U_h$ 为

$$(\mathcal{R}_h \gamma - \gamma, \gamma)_U = 0, \quad \forall \gamma \in U_h. \quad (10)$$

由于 U_h 为分片常数空间, 所以有

$$\mathcal{R}_h \gamma|_{\hat{K}} = \frac{1}{|\hat{K}|} \int_{\hat{K}} \gamma, \quad \forall \hat{K} \in \mathcal{T}_U^h, \quad (11)$$

其中 $|\hat{K}|$ 为 \hat{K} 的测度. 当 $\gamma \in U_{ad}$ 时, 显然有 $u_a \leq \mathcal{R}_h \gamma \leq u_b$, 因此 $\mathcal{R}_h \gamma \in U_h \subset U_{ad}$. 并且存在常数 $C > 0$, 使得

$$|v - \mathcal{R}_h v|_{0,p,\hat{K}} \leq Ch_U |v|_{1,p,\hat{K}}. \quad (12)$$

下面考虑控制问题 (3) 的有限元全离散格式, 记为 $(QCP)^{h,\Delta t}$.

$$J_h(y_h, u_h) = \sum_{n=0}^{N_T-1} \Delta t \left(g(y_h^{n+\frac{1}{2}}) + \kappa(u_h^{n+\frac{1}{2}}) \right) \quad (13)$$

$$\frac{1}{\Delta t} (y_h^{n+1} - y_h^n, v) + a(y_h^{n+\frac{1}{2}}, v) + (\phi(y_h^{n+\frac{1}{2}}), v) = (f^{n+\frac{1}{2}} + Bu_h^{n+\frac{1}{2}}, v) \quad (14)$$

$$y_h^0 = y_0^h, \quad (15)$$

其中

$$y_h^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(y_h^{n+1} + y_h^n), \quad u_h^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(u_h^{n+1} + u_h^n), \quad f^{n+\frac{1}{2}} = f(t^{n+\frac{1}{2}}).$$

关于全离散格式 (13)-(15) 有以下结论.

引理2.1. 全离散最优控制问题 (13)-(15) 存在唯一弱解 $(y_h^{n+\frac{1}{2}}, u_h^{n+\frac{1}{2}})$, 当且仅当存在伴随离散状态 $p_h^{n+\frac{1}{2}}$, 使得 $(y_h^{n+\frac{1}{2}}, p_h^{n+\frac{1}{2}}, u_h^{n+\frac{1}{2}}) \in V_h \times V_h \times U_{ad}^h$, 满足以下最优化条件 $(QCP - OPT)^{h,\Delta t}$:

$$\begin{cases} \frac{1}{\Delta t} (y_h^{n+1} - y_h^n, v) + a(y_h^{n+\frac{1}{2}}, v) + (\phi(y_h^{n+\frac{1}{2}}), v) = (f^{n+\frac{1}{2}} + Bu_h^{n+\frac{1}{2}}, v) \\ y_h^0 = y_0^h. \end{cases} \quad (16)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{\Delta t} (p_h^n - p_h^{n+1}, v) + a(p_h^{n+\frac{1}{2}}, v) + (\phi'(y_h^{n+\frac{1}{2}}) p_h^{n+\frac{1}{2}}, v) = (g'(y_h^{n+\frac{1}{2}}), v), \\ p_h^N = 0. \end{cases} \quad (17)$$

$$\sum_{n=0}^{N_T-1} \Delta t (\kappa'(u_h^{n+\frac{1}{2}}) + B^* p_h^{n+\frac{1}{2}}, v - u_h^{n+1}) \geq 0 \quad \forall v \in V_h. \quad (18)$$

证明. 首先, 对于给定的 u_h , 存在唯一的 y_h , 使得目标函数 (13) 可简化为

$$J_h(y_h, u_h) = J_h(y_h(u_h), u_h) = \mathcal{J}_h(u_h) = \sum_{n=0}^{N_T-1} \Delta t \left(g(y_h^{n+\frac{1}{2}}(u_h)) + \kappa(u_h^{n+\frac{1}{2}}) \right). \quad (19)$$

目标函数 (19) 对 u_h 在 ρ 方向求导数为

$$\begin{aligned} (\mathcal{J}'_h, \rho)_U &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathcal{J}_h(u_h + t\rho) - \mathcal{J}_h(u_h)}{t} \\ &= \Delta t \sum_{n=0}^{N_T-1} g'(y_h^{n+\frac{1}{2}}) \mathcal{D}y_h^{n+\frac{1}{2}}(\rho) + \Delta t \sum_{n=0}^{N_T-1} \kappa'(u_h^{n+\frac{1}{2}}) \rho, \end{aligned} \quad (20)$$

其中

$$\mathcal{D}y_h^{n+\frac{1}{2}}(\rho) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{y_h^{n+\frac{1}{2}}(u_h + t\rho) - y_h^{n+\frac{1}{2}}(u_h)}{t}$$

接下来, 方程 (16) 两端同时对 u_h 求方向导数为

$$\begin{cases} \frac{1}{\Delta t}(\mathcal{D}y_h^{n+1}(\rho) - \mathcal{D}y_h^n(\rho), v) + a(\mathcal{D}y_h^{n+\frac{1}{2}}(\rho), v) + (\phi'(y_h^{n+\frac{1}{2}})\mathcal{D}y_h^{n+\frac{1}{2}}(\rho), v) = (B\rho, v), \\ \mathcal{D}y_h^0(\rho) = 0. \end{cases} \quad (21)$$

令方程 (21) 中 $v = p_h^{n+\frac{1}{2}}$ 可得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t}(\mathcal{D}y_h^{n+1}(\rho) - \mathcal{D}y_h^n(\rho), p_h^{n+\frac{1}{2}}) + a(\mathcal{D}y_h^{n+\frac{1}{2}}(\rho), p_h^{n+\frac{1}{2}}) \\ &= (B\rho, p_h^{n+\frac{1}{2}}) - (\phi'(y_h^{n+\frac{1}{2}})\mathcal{D}y_h^{n+\frac{1}{2}}(\rho), p_h^{n+\frac{1}{2}}). \end{aligned} \quad (22)$$

在方程 (17) 中, 取 $v = \mathcal{D}y_h^{n+\frac{1}{2}}(\rho)$ 可得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t}(p_h^n - p_h^{n+1}, \mathcal{D}y_h^{n+\frac{1}{2}}(\rho)) + a(p_h^{n+\frac{1}{2}}, \mathcal{D}y_h^{n+\frac{1}{2}}(\rho)) \\ &= (g'(y_h^{n+\frac{1}{2}}), \mathcal{D}y_h^{n+\frac{1}{2}}(\rho)) - (\phi'(y_h^{n+\frac{1}{2}})p_h^{n+\frac{1}{2}}, \mathcal{D}y_h^{n+\frac{1}{2}}(\rho)) \end{aligned} \quad (23)$$

由于 $\mathcal{D}y_h^0(\rho) = 0$, $p_h^N = 0$, 计算可得

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{N_T-1} \frac{1}{\Delta t}(\mathcal{D}y_h^{n+1}(\rho) - \mathcal{D}y_h^n(\rho), p_h^{n+\frac{1}{2}}) \\ &= \sum_{n=0}^{N_T-1} \frac{1}{2\Delta t}(\mathcal{D}y_h^{n+1}(\rho), p_h^{n+1} + p_h^n) - \sum_{n=0}^{N_T-1} \frac{1}{2\Delta t}(\mathcal{D}y_h^n(\rho), p_h^{n+1} + p_h^n) \\ &= \sum_{n=0}^{N_T-1} \frac{1}{2\Delta t}(\mathcal{D}y_h^{n+1}(\rho), p_h^{n+1}) - \sum_{n=0}^{N_T-1} \frac{1}{2\Delta t}(\mathcal{D}y_h^n(\rho), p_h^n) \\ &\quad + \sum_{n=0}^{N_T-1} \frac{1}{2\Delta t}(\mathcal{D}y_h^{n+1}(\rho), p_h^n) - \sum_{n=0}^{N_T-1} \frac{1}{2\Delta t}(\mathcal{D}y_h^n(\rho), p_h^{n+1}) \\ &= \sum_{n=0}^{N_T-1} \frac{1}{2\Delta t}(\mathcal{D}y_h^{n+1}(\rho), p_h^n) - \sum_{n=0}^{N_T-1} \frac{1}{2\Delta t}(\mathcal{D}y_h^n(\rho), p_h^{n+1}) \\ &= \sum_{n=0}^{N_T-1} \frac{1}{2\Delta t}(\mathcal{D}y_h^{n+1}(\rho), p_h^n - p_h^{n+1}) + \sum_{n=0}^{N_T-1} \frac{1}{2\Delta t}(\mathcal{D}y_h^n(\rho), p_h^n - p_h^{n+1}) \\ &\quad + \sum_{n=0}^{N_T-1} \frac{1}{2\Delta t}(\mathcal{D}y_h^{n+1}(\rho), p_h^{n+1}) - \sum_{n=0}^{N_T-1} \frac{1}{2\Delta t}(\mathcal{D}y_h^n(\rho), p_h^n) \\ &= \sum_{n=0}^{N_T-1} \frac{1}{\Delta t}(p_h^n - p_h^{n+1}, \mathcal{D}y_h^{n+\frac{1}{2}}). \end{aligned} \quad (24)$$

将方程 (22) 和 (23) 两端同时对 n 从 0 到 $N - 1$ 求和, 结合 (24) 可得

$$\sum_{n=0}^{N_T-1} \Delta t(g'(y_h^{n+\frac{1}{2}}), \mathcal{D}y_h^{n+\frac{1}{2}}(\rho)) = \sum_{n=0}^{N_T-1} \Delta t(B\rho, p_h^{n+\frac{1}{2}}) = \sum_{n=0}^{N_T-1} \Delta t(B^*p_h^{n+\frac{1}{2}}, \rho)_U, \quad (25)$$

将 (25) 代入 (20) 中, 可知

$$(\mathcal{J}'_h, \rho)_U = \Delta t \sum_{n=0}^{N_T-1} (\kappa'(u_h^{n+\frac{1}{2}}) + B^*p_h^{n+\frac{1}{2}}, \rho)_U.$$

证毕. \square

3. 收敛性分析与误差估计

下面将讨论最优控制问题 (*QCP*) 的 *Crank – Nicolson* 格式的先验误差估计, 并最终证明状态变量和控制变量分别在 $l_\infty(0, T; H^1(\Omega))$, $l^2(0, T; L^2(\Omega_u))$ 模意义下的最收敛阶.

引入辅助问题

$$\begin{cases} \frac{1}{\Delta t}(y_{h,u}^{n+1} - y_{h,u}^n, v) + (\nabla y_{h,u}^{n+\frac{1}{2}}, \nabla v) + (\phi(y_{h,u}^{n+\frac{1}{2}}), v) = (f^{n+\frac{1}{2}} + Bu^{n+\frac{1}{2}}, v), \\ y_{h,u}^0 = y_0^h. \end{cases} \quad (26)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{\Delta t}(p_{h,u}^n - p_{h,u}^{n+1}, v) + (\nabla p_{h,u}^{n+\frac{1}{2}}, \nabla v) + (\phi'(y_{h,u}^{n+\frac{1}{2}})p_{h,u}^{n+\frac{1}{2}}, v) = (g'(y_{h,u}^{n+\frac{1}{2}}), v), \\ p_h^N = 0. \end{cases} \quad (27)$$

针对此辅助问题有以下结论.

引理3.1. 令 (y_h, p_h) 与 $(y_{h,u}, p_{h,u})$ 分别是问题 (16)-(17) 与 (26)-(27) 的解, 并假设 g' 及 ϕ' 在解 y 附近 *Lipschitz* 连续. 则有

$$\begin{aligned} \|y_h - y_h(u)\|_{l^\infty(0,T;H^1(\Omega))} &\leq C\|u_h - u\|_{l^2(0,T;L^2(\Omega))}, \\ \|p_h - p_h(u)\|_{l^\infty(0,T;H^1(\Omega))} &\leq C\|u_h - u\|_{l^2(0,T;L^2(\Omega))}. \end{aligned}$$

证明. 为了证明方便, 引入以下记号

$$\begin{aligned} \zeta^n &= y_h^n - y_h^n(u), \quad n = 0, 1 \dots N, \\ \xi^n &= p_h^n - p_h^n(u), \quad n = N, \dots, 1, 0. \end{aligned}$$

显然 $\zeta^0 = 0$, $\xi^N = 0$. 由方程 (16) 减去方程 (26), 可得

$$\frac{1}{\Delta t}(\zeta^{n+1} - \zeta^n, v) + a(\zeta^{n+\frac{1}{2}}, \nabla v) + (\phi(y_h^{n+\frac{1}{2}}) - \phi(y_{h,u}^{n+\frac{1}{2}}), v) = (B(u_h^{n+\frac{1}{2}} - u^{n+\frac{1}{2}}), v), \quad (28)$$

取 (28) 中检验函数 $v = d_t \zeta^{n+1} = \frac{\zeta^{n+1} - \zeta^n}{\Delta t}$, 可得

$$\|d_t \zeta^{n+1}\|^2 + a(\zeta^{n+\frac{1}{2}}, d_t \zeta^{n+1}) = (\phi(y_{h,u}^{n+\frac{1}{2}}) - \phi(y_h^{n+\frac{1}{2}}), d_t \zeta^{n+1}) + (B(u_h^{n+\frac{1}{2}} - u^{n+\frac{1}{2}}), d_t \zeta^{n+1}),$$

其中

$$a(\zeta^{n+\frac{1}{2}}, d_t \zeta^{n+1}) = \frac{1}{2\Delta t} \|\zeta^{n+1}\|_a^2 - \frac{1}{2\Delta t} \|\zeta^n\|_a^2.$$

对于上式右端第一项, 由算子 B 的连续性以及 ϕ 的 Lipschitz 连续性, 利用 Cauchy – Schwarz 不等式可得

$$\begin{aligned} & (\phi(y_{h,u}^{n+\frac{1}{2}}) - \phi(y_h^{n+\frac{1}{2}}), d_t \zeta^{n+1}) + (B(u_h^{n+\frac{1}{2}} - u^{n+\frac{1}{2}}), d_t \zeta^{n+1}), \\ & \leq C(\epsilon_1) \|\zeta^{n+\frac{1}{2}}\|^2 + C(\epsilon_2) (\|u_h^{n+\frac{1}{2}} - u^{n+\frac{1}{2}}\|^2) + C(\epsilon_1 + \epsilon_2) \|d_t \zeta^{n+1}\|^2, \end{aligned} \quad (29)$$

这里 ϵ 为任意小的正数, $C(\epsilon)$ 与 $\frac{1}{\epsilon}$ 相关. 取 $C(\epsilon_1 + \epsilon_2) = \frac{1}{2}$, 将代入 (29), 并对 n 从 0 到 $N-1$ 求和, 有

$$\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \|d_t \zeta^{n+1}\|^2 + \frac{1}{2\Delta t} \|\zeta^N\|_a^2 \leq C \sum_{n=0}^{N-1} \|\zeta^{n+\frac{1}{2}}\|^2 + C \sum_{n=0}^{N-1} (\|u_h^{n+\frac{1}{2}} - u^{n+\frac{1}{2}}\|^2).$$

由 Poincaré 不等式以及离散的 Gronwall 不等式可得

$$\|\zeta^N\|_a^2 \leq C \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t (\|u_h^{n+\frac{1}{2}} - u^{n+\frac{1}{2}}\|^2). \quad (30)$$

接下来, 估计 $\|p_h - p_h(u)\|$ 的误差. 由 (17) 和 (27) 相减可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} (\zeta^n - \zeta^{n+1}, v) + a(\zeta^{n+\frac{1}{2}}, v) & = (\phi'(y_{h,u}^{n+\frac{1}{2}}) p_{h,u}^{n+\frac{1}{2}} - \phi'(y_h^{n+\frac{1}{2}}) p_{h,u}^{n+\frac{1}{2}}, v) \\ & \quad + (g'(y_h^{n+\frac{1}{2}}) - g'(y_{h,u}^{n+\frac{1}{2}}), v). \end{aligned} \quad (31)$$

取 (31) 中检验函数 $v = \tilde{d}_t \xi^n = \frac{\xi^n - \zeta^{n+1}}{\Delta t}$, 可得

$$\begin{aligned} & \|\tilde{d}_t \xi^n\|^2 + \frac{1}{2\Delta t} \|\xi^n\|_a^2 - \frac{1}{2\Delta t} \|\zeta^{n+1}\|_a^2 \\ & = (\phi'(y_{h,u}^{n+\frac{1}{2}}) p_{h,u}^{n+\frac{1}{2}} - \phi'(y_h^{n+\frac{1}{2}}) p_h^{n+\frac{1}{2}}, \tilde{d}_t \xi^n) \\ & \quad + (g'(y_h^{n+\frac{1}{2}}) - g'(y_{h,u}^{n+\frac{1}{2}}), \tilde{d}_t \xi^n). \end{aligned} \quad (32)$$

对于 (32) 式右端第一项, 有

$$\phi'(y_{h,u}^{n+\frac{1}{2}}) p_{h,u}^{n+\frac{1}{2}} - \phi'(y_h^{n+\frac{1}{2}}) p_h^{n+\frac{1}{2}} = \phi'(y_{h,u}^{n+\frac{1}{2}}) \xi^{n+\frac{1}{2}} + p_h^{n+\frac{1}{2}} (\phi'(y_{h,u}^{n+\frac{1}{2}}) - \phi'(y_h^{n+\frac{1}{2}})).$$

利用 ϕ' 在解 y 附近的 *Lipschitz* 连续性, 有

$$\begin{aligned} (\phi'(y_{h,u}^{n+\frac{1}{2}})\xi^{n+\frac{1}{2}}, \tilde{d}_t\xi^n) &\leq \|\phi'(y_{h,u}^{n+\frac{1}{2}})\|_{0,\infty}\|\xi^{n+\frac{1}{2}}\| \|\tilde{d}_t\xi^n\| \\ &\leq C\|\xi^{n+\frac{1}{2}}\|^2 + C\epsilon\|\tilde{d}_t\xi^n\|^2, \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} (p_h^{n+\frac{1}{2}}(\phi'(y_{h,u}^{n+\frac{1}{2}}) - \phi'(y_h^{n+\frac{1}{2}})), \tilde{d}_t\xi^n) &\leq \|p_h^{n+\frac{1}{2}}\|_{0,4}\|(\phi'(y_{h,u}^{n+\frac{1}{2}}) - \phi'(y_h^{n+\frac{1}{2}}))\|_{0,4}\|\tilde{d}_t\xi^n\| \\ &\leq C\|\zeta^{n+\frac{1}{2}}\|_1^2 + C\epsilon\|\tilde{d}_t\xi^n\|^2, \end{aligned} \quad (34)$$

上式中用到了嵌入定理 $\|\omega\|_{0,4} \leq C\|\omega\|_1$ 及 $p_h^{n+\frac{1}{2}} \leq C$ (见文献 [15]). 对于 (32) 式右端第二项, 利用 g 的 *Lipschitz* 连续性, 可得

$$(g'(y_h^{n+\frac{1}{2}}) - g'(y_{h,u}^{n+\frac{1}{2}}), \tilde{d}_t\xi^n) \leq C\|\zeta^{n+\frac{1}{2}}\|^2 + C\epsilon\|\tilde{d}_t\xi^n\|^2. \quad (35)$$

取 $C\epsilon = \frac{1}{4}$, 将 (32) 式两端同时对 n 从 $N-1$ 到 M 求和, 结合 (33), (34), (35) 可知

$$\frac{1}{2}\sum_M^{N-1}\Delta t\|\tilde{d}_t\xi^n\|^2 + \frac{1}{2}\|\xi^M\|_a^2 \leq C\sum_M^{N-1}\Delta t\|\zeta^{n+\frac{1}{2}}\|_1^2 + C\sum_M^{N-1}\Delta t\|\xi^{n+\frac{1}{2}}\|^2. \quad (36)$$

结合 *Poincaré* 不等式, 离散的 *Gronwall* 不等式以及 (30) 可证

$$\|\xi^M\|_a^2 \leq C\sum_M^{N-1}\Delta t\|\zeta^{n+\frac{1}{2}}\|_1^2 \leq C\sum_{n=0}^{N-1}\Delta t(\|u_h^{n+\frac{1}{2}} - u^{n+\frac{1}{2}}\|^2).$$

证毕. \square

接下来证明 $\|u - u_h\|_{l^2(0,T;L^2(\Omega_U))}^2$. 由于最优控制问题 (4)-(6) 是非凸的, 参考文献 [3], 我们假设存在与 h 无关的常数 $c \geq 0$, 有

$$(J'(u) - J'_h(v), u - v) \geq c\|u - v\|_U^2, \quad \forall u, v \in L^2(0, T; L^2(\Omega_U)).$$

进而对充分小的 h , 可得

$$(J'_h(u) - J'_h(v), u - v) \geq c\|u - v\|_U^2. \quad (37)$$

引理3.2. 令 (y, p, u) 与 (y_h, p_h, u_h) 分别为最优控制问题 (4)-(6) 与 (16)-(18) 的解. 并假设 $u \in l^2(0, T; H^1(\Omega_U))$, $p \in l^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap H^1(0, T; L^2(\Omega))$, 有

$$\begin{aligned} &c\|u - u_h\|_{l^2(0,T;L^2(\Omega_U))}^2 \\ &\leq C\|p - p_{h,u}\|_{l^2(0,T;L^2(\Omega_U))}^2 + Ch_U^2 (\|p\|_{l^2(0,T;H^1(\Omega))}^2 + \|u\|_{l^2(0,T;H^1(\Omega_U))}^2). \end{aligned}$$

证明. 由(37) 可得

$$\begin{aligned}
& c\|u - u_h\|_{l^2(0,T;L^2(\Omega_U))}^2 \\
& \leq \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} (J'_h(u^{n+\frac{1}{2}}) - J'_h(u_h^{n+\frac{1}{2}}), u^{n+\frac{1}{2}} - u_h^{n+\frac{1}{2}}) \\
& = \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} (j'(u^{n+\frac{1}{2}}) + B^* p_{h,u}^{n+\frac{1}{2}}, u^{n+\frac{1}{2}} - u_h^{n+\frac{1}{2}}) - \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} (j'(u_h^{n+\frac{1}{2}}) + B^* p_h^{n+\frac{1}{2}}, u^{n+\frac{1}{2}} - u_h^{n+\frac{1}{2}}) \\
& = \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} (j'(u^{n+\frac{1}{2}}) + B^* p^{n+\frac{1}{2}}, u^{n+\frac{1}{2}} - u_h^{n+\frac{1}{2}}) + \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} (B^*(p_{h,u}^{n+\frac{1}{2}} - p^{n+\frac{1}{2}}), u^{n+\frac{1}{2}} - u_h^{n+\frac{1}{2}}) \\
& \quad - \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} (j'(u_h^{n+\frac{1}{2}}) + B^* p_h^{n+\frac{1}{2}}, u^{n+\frac{1}{2}} - u_h^{n+\frac{1}{2}}) \\
& \leq \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} (B^*(p_{h,u}^{n+\frac{1}{2}} - p^{n+\frac{1}{2}}), u^{n+\frac{1}{2}} - u_h^{n+\frac{1}{2}}) + \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} (j'(u_h^{n+\frac{1}{2}}) + B^* p_h^{n+\frac{1}{2}}, u_h^{n+\frac{1}{2}} - u^{n+\frac{1}{2}}) \\
& \leq \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} (B^*(p_{h,u}^{n+\frac{1}{2}} - p^{n+\frac{1}{2}}), u^{n+\frac{1}{2}} - u_h^{n+\frac{1}{2}}) + \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} (j'(u_h^{n+\frac{1}{2}}) + B^* p_h^{n+\frac{1}{2}}, u_h^{n+\frac{1}{2}} - u^{n+\frac{1}{2}}) - \mathcal{R}_h u^{n+\frac{1}{2}} \\
& \quad + \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} (j'(u_h^{n+\frac{1}{2}}) + B^* p_h^{n+\frac{1}{2}}, \mathcal{R}_h u^{n+\frac{1}{2}} - u^{n+\frac{1}{2}}) \\
& = \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} (B^*(p_{h,u}^{n+\frac{1}{2}} - p^{n+\frac{1}{2}}), u^{n+\frac{1}{2}} - u_h^{n+\frac{1}{2}}) + \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} (j'(u_h^{n+\frac{1}{2}}), \mathcal{R}_h u^{n+\frac{1}{2}} - u^{n+\frac{1}{2}}) \\
& \quad + \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} (B^* p_h^{n+\frac{1}{2}}, \mathcal{R}_h u^{n+\frac{1}{2}} - u^{n+\frac{1}{2}}) \\
& = \sum_{i=1}^3 \Lambda_i. \tag{38}
\end{aligned}$$

由算子 B 的性质可得

$$\begin{aligned}
\Lambda_1 & \leq C\Delta t \sum_{n=0}^{N-1} \|p_{h,u}^{n+\frac{1}{2}} - p^{n+\frac{1}{2}}\|^2 + C\epsilon\Delta t \sum_{n=0}^{N-1} \|u^{n+\frac{1}{2}} - u_h^{n+\frac{1}{2}}\|^2 \\
& = C\|p_{h,u} - p\|_{l^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 + C\epsilon\|u - u_h\|_{l^2(0,T;L^2(\Omega_U))}^2.
\end{aligned}$$

由算子 \mathcal{R}_h 的定义可知

$$\Lambda_2 = 0,$$

且

$$\begin{aligned} & \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} (B^* p^{n+\frac{1}{2}}, \mathcal{R}_h u^{n+\frac{1}{2}} - u^{n+\frac{1}{2}}) \\ &= \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} (B^* p^{n+\frac{1}{2}} - \mathcal{R}_h(B^* p^{n+\frac{1}{2}}), \mathcal{R}_h u^{n+\frac{1}{2}} - u^{n+\frac{1}{2}}). \end{aligned}$$

从而有

$$\begin{aligned} \Lambda_3 &= \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} (B^*(p^{n+\frac{1}{2}} - p_h^{n+\frac{1}{2}}), u^{n+\frac{1}{2}} - \mathcal{R}_h u^{n+\frac{1}{2}}) \\ &\quad + \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} (B^* p^{n+\frac{1}{2}}, \mathcal{R}_h u^{n+\frac{1}{2}} - u^{n+\frac{1}{2}}) \\ &= \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} (B^* p^{n+\frac{1}{2}} - \mathcal{R}_h(B^* p^{n+\frac{1}{2}}), \mathcal{R}_h u^{n+\frac{1}{2}} - u^{n+\frac{1}{2}}) \\ &\quad + \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} (B^*(p^{n+\frac{1}{2}} - p_h^{n+\frac{1}{2}}), u^{n+\frac{1}{2}} - \mathcal{R}_h u^{n+\frac{1}{2}}). \end{aligned}$$

对于 Λ_3 右端第一项, 有

$$\begin{aligned} & \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} (B^* p^{n+\frac{1}{2}} - \mathcal{R}_h(B^* p^{n+\frac{1}{2}}), \mathcal{R}_h u^{n+\frac{1}{2}} - u^{n+\frac{1}{2}}) \\ & \leq C \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} \|p^{n+\frac{1}{2}} - \mathcal{R}_h p^{n+\frac{1}{2}}\|^2 + \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} \|u^{n+\frac{1}{2}} - \mathcal{R}_h u^{n+\frac{1}{2}}\|^2 \\ & \leq Ch_U^2 (\|p\|_{l^2(0,T;H^1(\Omega))}^2 + \|u\|_{l^2(0,T;H^1(\Omega_U))}^2). \end{aligned} \tag{39}$$

对于 Λ_3 右端第二项, 由引理 3.1 可得

$$\begin{aligned} & \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} (B^*(p^{n+\frac{1}{2}} - p_h^{n+\frac{1}{2}}), u^{n+\frac{1}{2}} - \mathcal{R}_h u^{n+\frac{1}{2}}) \\ &= \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} (B^*(p^{n+\frac{1}{2}} - p_{h,u}^{n+\frac{1}{2}}), u^{n+\frac{1}{2}} - \mathcal{R}_h u^{n+\frac{1}{2}}) \\ &\quad + \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} (B^*(p_{h,u}^{n+\frac{1}{2}}) - p_h^{n+\frac{1}{2}}, u^{n+\frac{1}{2}} - \mathcal{R}_h u^{n+\frac{1}{2}}) \\ & \leq Ch_U^2 \|u\|_{l^2(0,T;H^1(\Omega_U))}^2 + C\epsilon \|u - u_h\|_{l^2(0,T;L^2(\Omega_U))}^2 \\ &\quad + C\|p - p_{h,u}\|_{l^2(0,T;L^2(\Omega_U))}^2. \end{aligned} \tag{40}$$

将 (39), (40) 代入 Λ_3 , 结合 Λ_1, Λ_2 的估计, 取足够小的 ϵ , 整理可得

$$\begin{aligned} & \|u - u_h\|_{l^2(0,T;L^2(\Omega_U))}^2 \\ & \leq C \|p - p_{h,u}\|_{l^2(0,T;L^2(\Omega_U))}^2 + Ch_U^2 (\|p\|_{l^2(0,T;H^1(\Omega))}^2 + \|u\|_{l^2(0,T;H^1(\Omega_U))}^2). \end{aligned}$$

证毕. \square

引理3.3. 令 (y, p) 与 $(y_{h,u}, p_{h,u})$ 分别是问题的 (4)-(5) 与 (26)-(27) 的解. 假设引理 3.2 中的条件成立. 此外, 设 $y, p \in H^3(0, T; H^2(\Omega))$, $\|y_0 - y_0^h\|_1 \leq Ch$, 则有以下估计成立

$$\|y - y_h(u)\|_{l^\infty(0,T;H^1(\Omega))} \leq C(h + (\Delta t)^2), \quad (41)$$

$$\|p - p_h(u)\|_{l^\infty(0,T;H^1(\Omega))} \leq C(h + (\Delta t)^2). \quad (42)$$

证明. 将方程 (4) 左右两端取 $t = t_{n+\frac{1}{2}}$, 可得到

$$(y_t(t_{n+\frac{1}{2}}), v) + a(y(t_{n+\frac{1}{2}}), v) - \phi(y(t_{n+\frac{1}{2}}), v) = 0, \quad (43)$$

将方程 (43) 减去方程 (26) 可得误差方程为

$$\begin{aligned} & (d_t e_y^{n+1}, v) + a\left(\frac{e_y^{n+1} + e_y^n}{2}, v\right) \\ & = \frac{1}{\Delta t}(T_y^n, v) + a(R_y^n, v) + (\phi(y_{h,u}^{n+\frac{1}{2}}) - \phi(y(t_{n+\frac{1}{2}}), v)), \end{aligned} \quad (44)$$

其中截断误差项定义为

$$T_y^n = y(t_{n+1}) - y(t_n) - \Delta t y_t(t_{n+\frac{1}{2}}),$$

$$R_y^n = \frac{y(t_{n+1}) + y(t_n)}{2} - y(t_{n+\frac{1}{2}}).$$

令 (44) 中 $v = d_t(y_I^{n+1} - y_{h,u}^{n+1}) = d_t(y_I^{n+1} - y^{n+1}) + d_t e_y^{n+1}$, 可得

$$\begin{aligned} & \|d_t e_y^{n+1}\|^2 + \frac{1}{2\Delta t} \|e_y^{n+1}\|_a^2 - \frac{1}{2\Delta t} \|e_y^n\|_a^2 \\ & = (d_t e_y^{n+1}, d_t(y^{n+1} - y_I^{n+1})) + a(e_y^{n+\frac{1}{2}}, d_t(y^{n+1} - y_I^{n+1})) \\ & \quad + \left(\phi(y_{h,u}^{n+\frac{1}{2}}) - \phi(y^{n+\frac{1}{2}}), d_t(y_I^{n+1} - y_{h,u}^{n+1}) \right) \\ & \quad + \frac{1}{\Delta t}(T_y^n, d_t(y_I^{n+1} - y_{h,u}^{n+1})) + a(R_y^n, d_t(y_I^{n+1} - y_{h,u}^{n+1})). \end{aligned} \quad (45)$$

对(45)两端同时乘以 Δt , 并对 n 从 0 到 $N - 1$ 求和, 将右端项表示为 $\Upsilon_1, \Upsilon_2, \dots, \Upsilon_5$, 即

$$\sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \|d_t e_y^{n+1}\|^2 + \frac{1}{2} \|e_y^N\|_a^2 = \frac{1}{2} \|e_y^0\|_a^2 + \sum_{i=1}^5 \Upsilon_i. \quad (46)$$

首先, 利用 *Cauchy – Schwarz* 不等式以及(9)可得

$$\begin{aligned} \Upsilon_1 &\leq \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \|d_t e_y^{n+1}\|^2 + Ch^4 \|y\|_{H^1(0,T;H^2(\Omega))}^2, \\ \Upsilon_2 &\leq C \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \|e_y^{n+\frac{1}{2}}\|_a^2 + Ch^2 \|y\|_{H^1(0,T;H^2(\Omega))}^2, \\ \Upsilon_3 &\leq C \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \|e_y^{n+\frac{1}{2}}\|^2 + \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \|d_t e_y^{n+1}\|^2 + Ch^4 \|y\|_{H^1(0,T;H^2(\Omega))}^2, \end{aligned}$$

由截断误差 T_y^n, R_y^n 的定义和 *Young's* 不等式可得

$$\begin{aligned} \Upsilon_4 &\leq \frac{1}{\Delta t} \|T_y^n\|^2 + \Delta t \|d_t(y_I^{n+1} - y_{h,u}^{n+1})\| \\ &\leq C(\Delta t)^4 \|y_{ttt}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \|d_t e_y^{n+1}\|^2 + Ch^4 \|y\|_{H^1(0,T;H^2(\Omega))}^2, \\ \Upsilon_5 &\leq \Delta t \|\Delta R_y^n\| \|d_t(y_I^{n+1} - y_{h,u}^{n+1})\| \\ &\leq C(\Delta t)^4 \|y_{tt}\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega))}^2 + \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \|d_t e_y^{n+1}\|_a^2 + Ch^4 \|y\|_{H^1(0,T;H^2(\Omega))}^2, \end{aligned}$$

将以上 $\Upsilon_1, \Upsilon_2, \dots, \Upsilon_5$ 的估计代入(51), 由离散的 *Gronwall's* 不等式可得

$$\begin{aligned} \|e_y\|_{l^\infty(0,T;H^1(\Omega))}^2 &\leq C(\Delta t)^4 (\|y_{tt}\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega))}^2 + \|y_{ttt}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2) \\ &\quad + Ch^4 \|y\|_{H^1(0,T;H^2(\Omega))}^2 + Ch^2 \|y\|_{H^1(0,T;H^2(\Omega))}^2. \end{aligned} \quad (47)$$

接下来估计 $\|p - p_h(u)\|_{l^\infty(0,T;H^1(\Omega))}$. 同理, 将方程(5)左右两端取 $t = t_{n+\frac{1}{2}}$, 有

$$-(p_t(t_{n+\frac{1}{2}}), v) + a(p(t_{n+\frac{1}{2}}), v) - (\phi'(y(t_{n+\frac{1}{2}}))p(t_{n+\frac{1}{2}}), v) = g(y(t_{n+\frac{1}{2}})), \quad (48)$$

将方程(48)与方程(27), 可得误差方程为

$$\begin{aligned} &\left(\tilde{d}_t e_p^{n+1}, v \right) + a \left(\frac{e_p^{n+1} + e_p^n}{2}, v \right) \\ &= \frac{1}{\Delta t} (T_p^n, v) + a(R_p^n, v) + (\phi'(y_{h,u}^{n+\frac{1}{2}})p_{h,u}^{n+\frac{1}{2}} - \phi'(y(t_{n+\frac{1}{2}}))p(t_{n+\frac{1}{2}}), v) \\ &\quad + g'(y(t_{n+\frac{1}{2}})) - g'(y_{h,u}^{n+\frac{1}{2}}), \end{aligned} \quad (49)$$

其中截断误差项定义为

$$\begin{aligned} T_p^n &= p(t_{n+1}) - p(t_n) - \Delta t p_t(t_{n+\frac{1}{2}}), \\ R_p^n &= \frac{p(t_{n+1}) + p(t_n)}{2} - p(t_{n+\frac{1}{2}}). \end{aligned}$$

令 (44) 中 $v = \tilde{d}_t(p_I^{n+1} - p_{h,u}^{n+1}) = \tilde{d}_t(p_I^{n+1} - p^{n+1}) + \tilde{d}_t e_p^{n+1}$ 可得

$$\begin{aligned} &\|\tilde{d}_t e_p^{n+1}\|^2 + \frac{1}{2\Delta t} \|e_p^n\|_a^2 - \frac{1}{2\Delta t} \|e_p^{n+1}\|_a^2 \\ &= (\tilde{d}_t e_p^{n+1}, \tilde{d}_t(p^{n+1} - p_I^{n+1})) + a(e_y^{n+\frac{1}{2}}, \tilde{d}_t(p^{n+1} - p_I^{n+1})) \\ &\quad + (g'(y(t_{n+\frac{1}{2}})) - g'(y_{h,u}^{n+\frac{1}{2}}), \tilde{d}_t(p_I^{n+1} - p_{h,u}^{n+1})) \\ &\quad + \left(\phi'(y_{h,u}^{n+\frac{1}{2}}) p_{h,u}^{n+\frac{1}{2}} - \phi'(y(t_{n+\frac{1}{2}})) p(t_{n+\frac{1}{2}}), \tilde{d}_t(p_I^{n+1} - p_{h,u}^{n+1}) \right) \\ &\quad + \frac{1}{\Delta t} (T_p^n, d_t(p_I^{n+1} - p_{h,u}^{n+1})) + a(R_p^n, \tilde{d}_t(p_I^{n+1} - p_{h,u}^{n+1})). \end{aligned} \quad (50)$$

对 (50) 两端同时乘以 Δt , 并对 n 从 0 到 $N-1$ 求和, 将右端项表示为 $\Xi_1, \Xi_2, \dots, \Xi_6$, 即

$$\sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \|\tilde{d}_t e_p^{n+1}\|^2 + \frac{1}{2} \|e_p^N\|_a^2 = \frac{1}{2} \|e_p^0\|_a^2 + \sum_{i=1}^6 \Xi_i. \quad (51)$$

首先, 利用 *Cauchy – Schwarz* 不等式以及 (9) 可得

$$\Xi_1 \leq \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \|\tilde{d}_t e_p^{n+1}\|^2 + Ch^4 \|p\|_{H^1(0,T;H^2(\Omega))}^2,$$

$$\Xi_2 \leq C \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \|e_p^{n+\frac{1}{2}}\|_a^2 + Ch^2 \|p\|_{H^1(0,T;H^2(\Omega))}^2.$$

对于 Ξ_3 , 由 g' 的 Lipschitz 连续性可知

$$\begin{aligned} \Xi_3 &\leq C \Delta t |y(t_{n+\frac{1}{2}}) - y_{h,u}^{n+\frac{1}{2}}| \|\tilde{d}_t(p_I^{n+1} - p_{h,u}^{n+1})\| \\ &\leq C \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t (\|e_y^{n+\frac{1}{2}}\|^2 + \|R_y^n\|^2) + \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \|\tilde{d}_t e_p^{n+1}\|^2 + Ch^4 \|p\|_{H^1(0,T;H^2(\Omega))}^2 \\ &\leq C \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t (\|e_y^n\|^2 + \|e_y^{n+1}\|^2) + \Delta t^4 \|y_{tt}\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega))}^2 \\ &\quad + \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \|\tilde{d}_t e_p^{n+1}\|^2 + Ch^4 \|p\|_{H^1(0,T;H^2(\Omega))}^2. \end{aligned}$$

对于 Ξ_4 , 注意到

$$\begin{aligned} & \phi'(y_{h,u}^{n+\frac{1}{2}}) p_{h,u}^{n+\frac{1}{2}} - \phi'(y(t_{n+\frac{1}{2}})) p(t_{n+\frac{1}{2}}) \\ &= \phi'(y_{h,u}^{n+\frac{1}{2}})(p_{h,u}^{n+\frac{1}{2}} - p(t_{n+\frac{1}{2}})) + (\phi'(y_{h,u}^{n+\frac{1}{2}}) - \phi'(y(t_{n+\frac{1}{2}}))) p(t_{n+\frac{1}{2}}). \end{aligned}$$

由 ϕ' 的Lipschitz 连续性, 可化简为

$$\begin{aligned} \Xi_4 &\leq C \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t (||\nabla e_y^{n+\frac{1}{2}}||^2 + ||\nabla R_y^n||^2 + ||e_p^n||^2 + ||R_p^n||^2) \\ &\quad + \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t ||\tilde{d}_t e_p^{n+1}||^2 + Ch^4 ||p||_{H^1(0,T;H^2(\Omega))}^2 \\ &\leq C \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t (\nabla ||e_y^n||^2 + \nabla ||e_y^{n+1}||^2) + \Delta t^4 (||y_{tt}||_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}^2 + ||p_{tt}||_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2) \\ &\quad + \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t ||\tilde{d}_t e_p^{n+1}||^2 + Ch^4 ||p||_{H^1(0,T;H^2(\Omega))}^2. \end{aligned}$$

由截断误差 T_y^n , R_y^n 的定义和 *Young's* 不等式可得

$$\begin{aligned} \Xi_4 &\leq \frac{1}{\Delta t} ||T_p^n||^2 + \Delta t ||\tilde{d}_t(p_I^{n+1} - p_{h,u}^{n+1})|| \\ &\leq C(\Delta t)^4 ||p_{ttt}||_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t ||d_t e_p^{n+1}||^2 + Ch^4 ||p||_{H^1(0,T;H^2(\Omega))}^2, \\ \Xi_5 &\leq \Delta t ||\Delta R_p^n|| ||d_t(p_I^{n+1} - p_{h,u}^{n+1})|| \\ &\leq C(\Delta t)^4 ||p_{tt}||_{L^2(0,T;H^2(\Omega))}^2 + \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t ||d_t e_p^{n+1}||^2 + Ch^4 ||p||_{H^1(0,T;H^2(\Omega))}^2. \end{aligned}$$

将以上 $\Xi_1, \Xi_2, \dots, \Xi_5$ 的估计代入 (51), 由离散的 *Gronwall's* 不等式可得

$$\begin{aligned} ||e_p||_{l^\infty(0,T;H^1(\Omega))}^2 &\leq C(\Delta t)^4 (||p_{tt}||_{L^2(0,T;H^2(\Omega))}^2 + ||p_{tt}||_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2) \\ &\quad + C(\Delta t)^4 (||y_{tt}||_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}^2 + ||p_{ttt}||_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2) \\ &\quad + C(h^4 + h^2) ||p||_{H^1(0,T;H^2(\Omega))}^2 + C ||e_y||_{l^\infty(0,T;H^1(\Omega))}^2. \end{aligned} \tag{52}$$

结合(47) 和(52), 即可得证(42). \square

定理3.1. 令 (y, p, u) 与 (y_h, p_h, u_h) 分别为最优控制问题 (4)-(6) 与 (13)-(15) 的解. 假设引理 3.2 和引理 3.3 中的条件成立. 则

$$\|y - y_h\|_{l^\infty(0,T;H^1(\Omega))} + \|p - p_h\|_{l^\infty(0,T;H^1(\Omega))} + \|u - u_h\|_{l^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq C(h_U + h + (\Delta t)^2).$$

证明. 由引理 3.2 和引理 3.3 可知

$$\|u - u_h\|_{l^2(0,T;L^2(\Omega_U))} \leq C(h_U + h + (\Delta t)^2). \quad (53)$$

由三角不等式可得

$$\begin{aligned} & \|y - y_h\|_{l^2(0,T;H^1(\Omega))} + \|p - p_h\|_{l^2(0,T;H^1(\Omega))} \\ & \leq \|y - y_{h,u}\|_{l^2(0,T;H^1(\Omega))} + \|y_{h,u} - y_h\|_{l^2(0,T;H^1(\Omega))} \\ & \quad + \|p - p_{h,u}\|_{l^2(0,T;H^1(\Omega))} + \|p_{h,u} - p_h\|_{l^2(0,T;H^1(\Omega))} \\ & \leq \epsilon \|u - u_h\|_{l^2(0,T;L^2(\Omega))} + C(h + h_U + (\Delta t)^2). \end{aligned} \quad (54)$$

当取足够小的 ϵ 时, 结合 (53) 和 (54) 即可得证. 证毕.

4. 数值实验

本节我们给出以下数值例子验证理论结果. 设 $\Omega = \Omega_U = [0, 1] \times [0, 1]$, $T = 1$. 对状态和控制采用相同的空间网格剖分, 并取 $h = h_U = (\Delta t)^2$.

考虑如下形式最优控制问题

$$\min \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\int_\Omega (y - y_d)^2 + \int_\Omega (u - u_0)^2 \right) dt,$$

$$s.t. \quad y_t - \Delta y + y^3 = u + f, \quad (x, t) \in \Omega \times (0, 1]$$

$$y(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times (0, 1]$$

$$y(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega, \quad t = 0.$$

控制约束为

$$U_{ad} = \{u \in L^2(0, T; L^2(\Omega)) : u \geq 0\}.$$

相应的伴随方程为

$$\begin{aligned} -p_t - \Delta p + 3y^2 p &= y - y_d, \quad (x, t) \in \Omega \times (0, 1] \\ p(x, t) &= 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times [0, 1] \\ p(x, 1) &= 0, \quad x \in \Omega, \quad t = 0. \end{aligned}$$

为了得出精确解与近似解的误差, 给出该控制问题的一组精确解如下所示:

$$\begin{aligned} y(x, t) &= \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2) t, \\ p(x, t) &= \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2) (1 - t), \\ u_0(x, t) &= 0.5 - \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2) (1 - t), \\ y_d(x, t) &= y + p_t + \Delta p - 3y^2 p, \\ u(x, t) &= \max(u_0 - p, 0), \\ f(x, t) &= y_t - \Delta y + y^3 - u. \end{aligned}$$

Table 1. The numerical results and convergence order for $h = (\Delta t)^2$

表 1. $h = (\Delta t)^2$ 时相应的数值结果和收敛阶

Δt	$\ e_y^n\ _{l^\infty(0, T; H^1(\Omega))}$	Rate	$\ e_p^n\ _{l^\infty(0, T; H^1(\Omega))}$	Rate	$\ e_u^n\ _{l^2(0, T; L^2(\Omega))}$	Rate
1/2	6.4281e-01	/	6.4224e-01	/	1.0749e-01	/
1/4	1.6241e-01	1.9988	1.6242e-01	1.9834	1.0761e-02	3.3203
1/8	4.0636e-02	1.9999	4.0636e-02	1.9989	1.2329e-03	3.1257
1/16	1.0160e-02	2.0000	1.0160e-02	1.9999	1.3597e-04	3.1808
1/32	2.5399e-03	2.0000	2.5399e-03	2.0000	1.6909e-05	3.0074

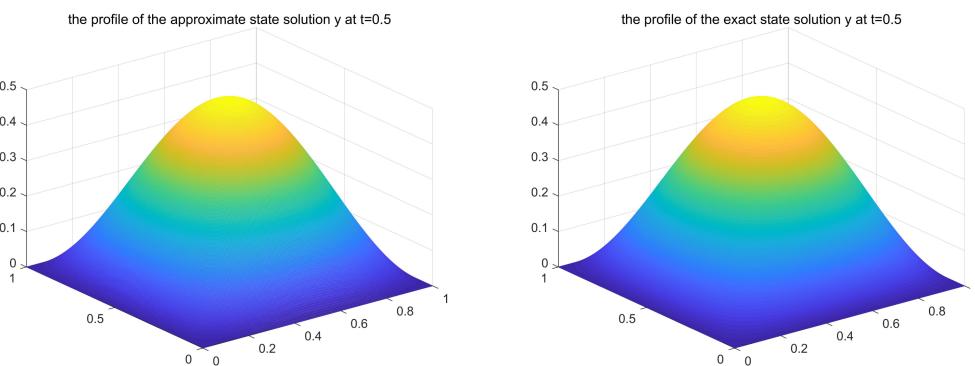


Figure 1. The approximate state solution y at $t=0.5$ (left). The exact state solution y at $t=0.5$ (right)

图 1. $t=0.5$ 时状态 y 的近似解(左)与精确解(右)

表 1 中列出了 $h = (\Delta t)^2$ 时相应的数值结果及其收敛阶. 图 1 图 2 分别给出了 $t=0.5$ 时的状态与伴随状态的精确解和近似解, 图 3 给出了 $t=0.53125$ 时的控制的精确解和近似解, 其中每幅图的左图表示的是近似解, 右图则为精确解.

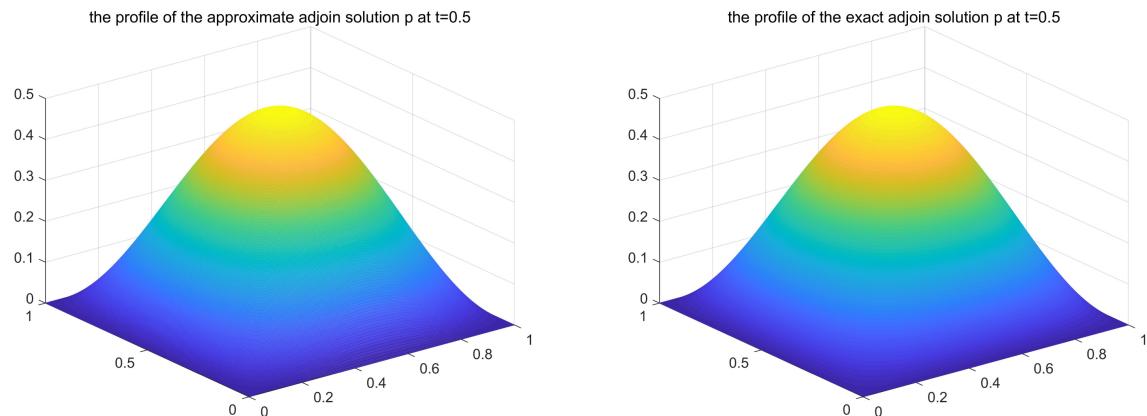


Figure 2. The approximate adjoint solution p at $t=0.5$ (left). The exact adjoint solution p at $t=0.5$ (right)
图 2. $t=0.5$ 时伴随 p 的近似解(左)与精确解(右)

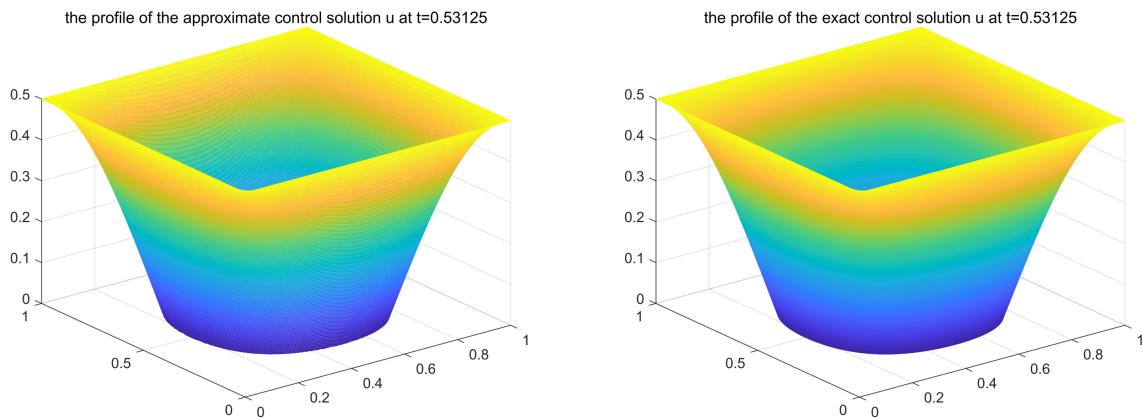


Figure 3. The approximate control solution u at $t=0.53125$ (left). The exact control solution u at $t=0.53125$ (right)
图 3. $t=0.53125$ 时控制 u 的近似解(左)与精确解(右)

5. 总结与展望

本文对一类非线性抛物最优控制问题进行离散, 在空间和时间上分别采用线性协调有限元和 Crank – Nicolson 格式. 通过先离散后优化的方法得到了离散最优化系统, 并结合数值实验验证了理论中的收敛结果. 在下一步的工作中, 我们可以考虑将该方法应用于非线性双曲方程最优控制问题中, 也可以利用该方法对边界控制问题进行研究. 此外, 也可采用更高阶的数值格式进行离散.

基金项目

国家自然基金项目(11961008)资助。

参考文献

- [1] Liu, W.B. and Yan, N.N. (2002) A Posteriori Error Estimates for Control Problems Governed by Stokes Equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **40**, 1850-1869.
<https://doi.org/10.1137/S0036142901384009>
- [2] Neitzel, I. and Vexler, B. (2012) A Priori Error Estimates for Space-Time Finite Element Discretization of Semilinear Parabolic Optimal Control Problems. *Numerische Mathematik*, **120**, 345-386. <https://doi.org/10.1007/s00211-011-0409-9>
- [3] 付红斐, 茹洪兴. 一类非线性抛物最优控制问题的有限元误差估计[J]. 数学物理学报, 2010, 30(6): 1542-1554.
- [4] Chatzipantelidis, P., Lazarov, R.D. and Thomée, V. (2004) Error Estimates for a Finite Volume Element Method for Parabolic Equations in Convex Polygonal Domains. *Numerical Methods for Partial Differential Equations: An International Journal*, **20**, 650-674.
<https://doi.org/10.1002/num.20006>
- [5] Marburger, J. and Pinna, R. (2013) Optimal Control for Burgers Equation Using Particle Methods. arXiv:1309.7619
- [6] Burman, E. (2011) Crank-Nicolson Finite Element Methods Using Symmetric Stabilization with an Application to Optimal Control Problems Subject to Transient Advection-Diffusion Equations. *Communications in Mathematical Sciences*, **9**, 319-329.
<https://doi.org/10.4310/CMS.2011.v9.n1.a16>
- [7] Chen, Y. and Lu, Z. (2010) Error Estimates of Fully Discrete Mixed Finite Element Methods for Semilinear Quadratic Parabolic Optimal Control Problem. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **199**, 1415-1423. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2009.11.009>
- [8] Wang, J., Lu, Z., Cai, F., et al. (2022) Fully Discrete Interpolation Coefficients Mixed Finite Element Methods for Semi-Linear Parabolic Optimal Control Problem. *IEEE Access*, **10**, 54291-54300. <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2022.3173402>
- [9] Hou, C., Lu, Z., Chen, X., et al. (2021) Error Estimates of Variational Discretization for Semilinear Parabolic Optimal Control Problems. *AIMS Mathematics*, **6**, 772-793.
<https://doi.org/10.3934/math.2021047>
- [10] Yang, C. and Sun, T. (2022) Crank-Nicolson Finite Difference Schemes for Parabolic Optimal Dirichlet Boundary Control Problems. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **45**, 7346-7363. <https://doi.org/10.1002/mma.8244>
- [11] Tang, Y. (2023) Error Estimates of Mixed Finite Elements Combined with Crank-Nicolson Scheme for Parabolic Control Problems. *AIMS Mathematics*, **8**, 12506-12519.
<https://doi.org/10.3934/math.2023628>
- [12] Lions, J.L. (1971) Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations. Springer-Verlag, Berlin.

- [13] Neittaanmaki, P. and Tiba, D. (1994) Optimal Control of Nonlinear Parabolic Systems—Theory, Algorithms and Applications. Marcel Dekker, New York.
- [14] Wheeler, M.F. (1973) A Priori L₂ Error Estimates for Galerkin Approximations to Parabolic Partial Differential Equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **10**, 723-759.
<https://doi.org/10.1137/0710062>
- [15] Ciarlet, P.G. (2002) The Finite Element Method for Elliptic Problems. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia. <https://doi.org/10.1137/1.9780898719208>