Pure Mathematics 理论数学, 2014, 4, 208-217
Published Online September 2014 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2014.45030

Schauder Estimates for the Solutions of the Heat Equation

Wenwen Chen

College of Sciences, Shanghai University, Shanghai
Email: suntty520@163.com

Received: Jul. 11th, 2014; revised: Aug. 7th, 2014; accepted: Aug. 16th, 2014

Abstract

In this paper we study Schauder estimates for the solutions of the heat equation by a new method similar to the compactness method.

Keywords

Compactness Method, Heat Equation, Parabolic, Schauder Estimates

热传导方程解的Schauder估计

陈雯雯

上海大学理学院，上海
Email: suntty520@163.com

收稿日期：2014年7月11日；修回日期：2014年8月7日；录用日期：2014年8月16日

摘　要

本文主要通过一种类似于紧方法的新方法来研究热传导方程解的Schauder估计。

关键词

紧方法，热传导方程，抛物，Schauder估计

1. 引言

Schauder (参见文献[1] [2])首先获得了一些二阶线性椭圆型方程解的先验估计。20 世纪 50 年代，Schauder 理论被推广到抛物型方程。由于 Schauder 的逐点估计在研究椭圆型与抛物型偏微分方程中的重要性，故命名 Schauder 所做的估计为 Schauder 估计。如今，Schauder 估计在二阶线性椭圆型与抛物型偏微分方程的理论研究中起到了至关重要的作用，并且它已经被很多学者推广和简化。现在基本上有四种研究 Schauder 估计的方法。第一种方法是 Schauder 本人基于牛顿位势理论所用的方法。第二种方法由 Campanato [3]利用 Campanato 空间与 Holder 空间的等价性质来进行研究的方法。第三种方法由 Trudinger [4]构造磨光函数来研究解的 Schauder 估计。第四种由 Caffarelli [5]应用扰动理论来得到二阶椭圆型方程黏性解的 Schauder 估计。抛物方程解的 Schauder 估计最早是由 Ciliberto [6]证明。事实上，在研究 Schauder 估计时，我们还可以使用一些新的方法(参见文献[7]-[12])。最近，王在书[11]系统地应用最大值原理方法，能量方法，紧方法等研究了椭圆型方程解的 Schauder 估计。本文我们将采用类似于紧方法的方法来研究下述热传导方程解的 Schauder 估计

$$u_t - \Delta u = f, (x,t) \in Q_\rho, \tag{1}$$

这里我们定义 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$， $Q_\rho = B_\rho \times (-\rho^2, \rho^2)$， 且 $B_\rho = \{|x| < \rho\}$。

下面给出本文所要证明的主要结论。

定理 1：设 u 为方程(1)在 Q_ρ 中的解，对任意的 $0 < \alpha < 1$，存在一个正常数 C_0，使得当 f 在 Q_ρ 中的 $(0,0)$ 处是 $C^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}$ 的，即

$$[f]_{C_2^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(0,0;Q_\rho)} = \sup_{s \le \rho} \frac{1}{s^\alpha} \sqrt{\frac{1}{|Q_s|} \iint_{Q_s} |f(x,t) - f(0,0)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t} < \infty,$$

则 u 在 Q_ρ 中的 $(0,0)$ 处是 $C^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}$ 的，即存在一个二次多项式

$$p(x,t) = \frac{1}{2} x^{\mathrm{T}} A x + Bt + Cx + D$$

满足 $p_t - \Delta p = f(0,0)$ 且对任意的 $s \le \rho$，有

$$\frac{1}{|Q_s|} \iint_{Q_s} |u(x,t) - p(x,t)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t \le C_1 s^{2(2+\alpha)}, \tag{2}$$

这里

$$C_1 \le C_0 \left([f]_{C_2^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(0,0;Q_\rho)} + \frac{1}{\rho^{2+\alpha}} \sqrt{\frac{1}{|Q_\rho|} \iint_{Q_\rho} u^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t} \right)$$

且

$$\rho^2 |A| + \rho^2 |B| + \rho |C| + |D| \le C_0 \left(\rho^{2+\alpha} [f]_{C_2^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(0,0;Q_\rho)} + \rho^2 |f(0,0)| + \sqrt{\frac{1}{|Q_\rho|} \iint_{Q_\rho} u^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t} \right).$$

2. 主要结论的证明

引理 1：设 u 为方程(1)在 Q_1 中的解，对任意的正数 ε，存在一个 $\delta = \delta(\varepsilon) \in (0,1)$，当 u 满足

$$\frac{1}{|Q_1|} \iint_{Q_1} u^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t \le 1 \tag{3}$$

且

$$\frac{1}{|Q_1|}\iint_{Q_1} f^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t \le \delta^2, \tag{4}$$

则存在一个函数 h 满足 $h_t - \Delta h = 0$，使得

$$\frac{1}{|Q_1|}\iint_{Q_1} |u-h|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t \le \varepsilon^2. \tag{5}$$

证明：取 h 满足

$$\begin{cases} h_t - \Delta h = 0, \\ h|_{\partial_p Q_1} = u. \end{cases}$$

再令 $\omega = u - h$，那么有

$$\begin{cases} \omega_t - \Delta\omega = f, \\ \omega|_{\partial_p Q_1} = 0. \end{cases}$$

由全局 $W_2^{2,1}$ 正则性估计，可得

$$\|\omega\|_{W_2^{2,1}(Q_1)} \le C\|f\|_{L^2(Q_1)}.$$

那么，由上式与(4)可得

$$\frac{1}{|Q_1|}\iint_{Q_1} \omega^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t \le \frac{C}{|Q_1|}\iint_{Q_1} f^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t \le C\delta^2. \tag{6}$$

故

$$\frac{1}{|Q_1|}\iint_{Q_1} |u-h|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t \le C\delta^2.$$

通过取 $C\delta^2 = \varepsilon^2$，则

$$\frac{1}{|Q_1|}\iint_{Q_1} |u-h|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t \le \varepsilon^2.$$

引理 2：设 u 为方程(1)在 Q_1 中的解，对任意的 $0<\alpha<1$，存在 $0<\lambda<\frac{1}{2}$，$0<\delta<1$，使得当 u，f 分别满足(3)与(4)时，那么存在一个二次多项式

$$p(x,t) = \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}Ax + Bt + Cx + D,$$

使得 $p_t - \Delta p = 0$ 且

$$\frac{1}{|Q_\lambda|}\iint_{Q_\lambda} |u(x,t) - p(x,t)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t \le \lambda^{2(2+\alpha)},$$

这里

$$|A| + |B| + |C| + |D| \le C_0.$$

证明：由引理 1 可知，假设给定一个 $\varepsilon \in (0,1)$，则有

$$\frac{1}{|Q_1|}\iint_{Q_1} |u-h|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t \le \varepsilon^2, \tag{7}$$

这里 h 满足 $h_t - \Delta h = 0$。故由(3)和(5)可得

$$\frac{1}{|Q_1|}\iint_{Q_1}|h|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t \le \frac{2}{|Q_1|}\iint_{Q_1}|u|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \frac{2}{|Q_1|}\iint_{Q_1}|u-h|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t \le 2+2\varepsilon^2 \le 4.$$

因此，由(文献[13]，§2.3 中定理 9)与 Holder 不等式，可得

$$\max_{Q_{\frac{1}{2}}}\left|D_x^k D_t^l h\right| \le C\|h\|_{L^1(Q_1)} \le C\|h\|_{L^2(Q_1)}, \quad k,\ l = 0,1,2\cdots,n.$$

故由上面二式可得

$$\max_{Q_{\frac{1}{2}}}\left|D_x^k D_t^l h\right| \le C,, \quad k,\ l = 0,1,2\cdots,n. \tag{8}$$

进一步，我们将 $h(x,t)$ 在 $(0,0)$ 处 Taylor 展开后，取

$$p(x,t) = \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}Ax + Bt + Cx + D = \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}D^2h(0,0)x + th_t(0,0) + x\cdot Dh(0,0) + h(0,0),$$

那么，$p_t - \Delta p = 0$。再由中值定理与(8)，我们可得，$(x,t)\in Q_\lambda$，$0<\lambda<\frac{1}{2}$，且

$$\begin{aligned}
\left|h(x,t)-p(x,t)\right| &\le |t||x|\sup_{Q_{\frac{1}{2}}}\left|DD_t h(x,t)\right| + \frac{|x|^3}{6}\sup_{Q_{\frac{1}{2}}}\left|D^3h(x,t)\right| + \frac{|t||x|^2}{2}\sup_{Q_{\frac{1}{2}}}\left|D^2D_t h(x,t)\right| \\
&\quad + \frac{|t|^2|x|}{2}\sup_{Q_{\frac{1}{2}}}\left|DD_t^2h(x,t)\right| + \frac{|t|^2}{2}\sup_{Q_{\frac{1}{2}}}\left|D_t^2h(x,t)\right| + \frac{|t|^3}{6}\sup_{Q_{\frac{1}{2}}}\left|D_t^3h(x,t)\right| \\
&\le C\left(|t||x| + |x|^3 + |t||x|^2 + |t|^2|x| + |t|^2 + |t|^3\right) \\
&\le C\left(\lambda^3+\lambda^3+\lambda^4+\lambda^5+\lambda^4+\lambda^6\right) \le C|\lambda|^3,
\end{aligned} \tag{9}$$

所以，由(7)和(9)可得

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|Q_\lambda|}\iint_{Q_\lambda}\left|u(x,t)-p(x,t)\right|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t &\le \frac{2}{|Q_\lambda|}\iint_{Q_\lambda}\left|u(x,t)-h(x,t)\right|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \frac{2}{|Q_\lambda|}\iint_{Q_\lambda}\left|u(x,t)-p(x,t)\right|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
&\le \frac{2}{|Q_\lambda|}\iint_{Q_1}\left|u(x,t)-h(x,t)\right|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \frac{2}{|Q_\lambda|}\iint_{Q_\lambda}\left|h(x,t)-p(x,t)\right|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
&\le \frac{2|Q_1|}{|Q_\lambda|}\frac{1}{|Q_1|}\iint_{Q_1}\left|u(x,t)-h(x,t)\right|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \frac{2}{|Q_\lambda|}\iint_{Q_\lambda}\left|h(x,t)-p(x,t)\right|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
&\le \frac{2\varepsilon^2}{\lambda^{n+2}} + C\lambda^6.
\end{aligned} \tag{10}$$

取 λ 足够小，使得(10)中第二项满足

$$C\lambda^6 \le \frac{1}{2}\lambda^{2(2+\alpha)}.$$

再取 ε 足够小，使得(10)中第一项满足

$$\frac{2\varepsilon^2}{\lambda^{n+2}} \le \frac{1}{2}\lambda^{2(2+\alpha)},$$

因此可得

$$\frac{1}{|Q_\lambda|}\iint_{Q_\lambda}|u(x,t)-p(x,t)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\le\lambda^{2(2+\alpha)}.$$

引理 3：设 u 为方程(1)在 Q_1 中的解，对任意的 $0<\alpha<1$，存在一个正常数 C_0，当 f 在 Q_1 中是 $(0,0)$ 处 $C^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}$ 的，即

$$[f]_{C_2^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(0,0;Q_1)}=\sup_{0<\rho\le1}\frac{1}{\rho^\alpha}\sqrt{\frac{1}{|Q_\rho|}\iint_{Q_\rho}|f(x,t)-f(0,0)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t}<\infty,$$

存在一个二次多项式

$$p(x,t)=\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}Ax+Bt+Cx+D$$

满足 $p_t-\Delta p=f(0,0)$ 且

$$\frac{1}{|Q_\rho|}\iint_{Q_\rho}|u(x,t)-p(x,t)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\le C_1\rho^{2(2+\alpha)},$$

这里 $0<\rho\le1$，

$$C_1\le C_0\left([f]_{C_2^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(0,0;Q_1)}+\sqrt{\frac{1}{|Q_1|}\iint_{Q_1}u^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t}\right)$$

且

$$|A|+|B|+|C|+|D|\le C_0\left([f]_{C_2^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(0,0;Q_1)}+|f(0,0)|+\sqrt{\frac{1}{|Q_1|}\iint_{Q_1}u^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t}\right).$$

证明：我们不妨假设 $f(0,0)=0$，否则令

$$v(x,t)=u(x,t)-\frac{f(0,0)}{2n}|x|^2,$$

那么

$$v_t-\Delta v=f(x,t)-f(0,0),$$

再把对 v 的估计转化到对 u 的估计即可。

另外，我们可假设

$$[f]_{C_2^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(0,0;Q_1)}\le\delta \tag{11}$$

且

$$\frac{1}{|Q_1|}\iint_{Q_1}u^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\le1. \tag{12}$$

否则，可取

$$\tilde{u}=\frac{\delta u}{\sqrt{\frac{1}{|Q_1|}\iint_{Q_1}u^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t}+[f]_{C_2^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(0,0;Q_1)}}\text{ 且 }\tilde{f}=\frac{\delta f}{\sqrt{\frac{1}{|Q_1|}\iint_{Q_1}u^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t}+[f]_{C_2^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(0,0;Q_1)}}.$$

那么，易得 $\tilde{u},\tilde{f}$ 满足

$$\tilde{u}_t - \Delta\tilde{u} = \tilde{f}(x,t) \text{ 且 } \left[\tilde{f}\right]_{C_2^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(0,0;Q_1)} \le \delta\text{，}\ \frac{1}{|Q_1|}\iint_{Q_1}\tilde{u}^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t \le 1\text{.}$$

再把对 $\tilde{u}$ 的估计转化到对 u 的估计即可。

下面用归纳法证明：存在

$$p_k(x,t) = \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}A_k x + B_k t + C_k x + D_k \tag{13}$$

满足 $(p_k)_t - \Delta p_k = 0$，使得

$$\frac{1}{\left|Q_{\lambda^k}\right|}\iint_{Q_{\lambda^k}}|u-p_k|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t \le \lambda^{2k(2+\alpha)},\quad |x|\le\lambda^k,\ |t|\le\lambda^{2k},\ 0<\lambda<\frac{1}{2}, \tag{14}$$

并且有

$$\left|A_{k+1}-A_k\right| \le C\lambda^{\alpha k} \tag{15}$$

$$\left|B_{k+1}-B_k\right| \le C\lambda^{\alpha k} \tag*{(16),}$$

$$\left|C_{k+1}-C_k\right| \le C\lambda^{(1+\alpha)k} \tag{17}$$

$$\left|D_{k+1}-D_k\right| \le C\lambda^{(2+\alpha)k} \tag{18}$$

(i) 当 $k=0$ 时。取 $p_0(x,t)=0$，那么

$$\frac{1}{|Q_1|}\iint_{Q_1}u^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t \le 1$$

显然成立。

(ii) 当 $k=1$ 时。取 $p_1(x,t)=p(x,t)$，这里的 $p(x,t)$ 如引理 2 中所得。那么

$$\frac{1}{|Q_\lambda|}\iint_{Q_\lambda}|u-p|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t \le \lambda^{2(2+\alpha)}$$

亦成立。

(iii) 假设 $k=k$ 时成立。现在令

$$\omega(x,t) = \frac{u\left(\lambda^k x,\lambda^{2k}t\right)-p_k\left(\lambda^k x,\lambda^{2k}t\right)}{\lambda^{(2+\alpha)k}}\text{.}$$

那么

$$\omega_t - \Delta\omega = \frac{f\left(\lambda^k x,\lambda^{2k}t\right)}{\lambda^{\alpha k}},\ \frac{1}{|Q_1|}\iint_{Q_1}\omega^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t \le 1,\ \text{且}\ \frac{1}{|Q_1|}\iint_{Q_1}\frac{\left|f\left(\lambda^k x,\lambda^{2k}t\right)\right|^2}{\lambda^{2\alpha k}}\mathrm{d}x\mathrm{d}t \le [f]^2_{C_2^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(0,0;Q_1)} \le \delta^2\text{.}$$

由引理 2 得：存在一个二次多项式 p_k 满足 $(p_k)_t - \Delta p_k = 0$ 且

$$\frac{1}{|Q_\lambda|}\iint_{Q_\lambda}|\omega-p|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t \le \lambda^{2(2+\alpha)}$$

即

$$\frac{1}{\left|Q_{\lambda^{k+1}}\right|}\iint_{Q_{\lambda^{k+1}}}\left|u(x,t)-p_k(x,t)-\lambda^{(2+\alpha)k}p\left(\frac{x}{\lambda^k},\frac{t}{\lambda^{2k}}\right)\right|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t \le \lambda^{2(2+\alpha)}\text{.}$$

现取

$$p_{k+1}(x,t)=p_k(x,t)+\lambda^{(2+\alpha)k}p\left(\frac{x}{\lambda^k},\frac{t}{\lambda^{2k}}\right).$$

故易得对 $k+1$ 情形也成立。进一步我们易得结论(13)~(18)成立.

下面证明当 $k\to\infty$ 时，A_k，B_k，C_k，D_k 收敛于 A，B，C，D，且有

$$p(x,t)=\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}Ax+Bt+Cx+D$$

满足

$$|p_k-p|\le C\lambda^{k(2+\alpha)},\quad |x|\le\lambda^k,\ |t|\le\lambda^{2k}. \tag{19}$$

事实上，因为 $|A_{k+1}-A_k|\le C\lambda^{\alpha k}$，所以

$$\begin{aligned}|A_{k+m}-A_k|&\le|A_{k+m}-A_{k+m-1}|+\cdots+|A_{k+1}-A_k|\le C\lambda^{\alpha(k+m-1)}+\cdots+C\lambda^{\alpha k}\\&\le C\lambda^{\alpha(k-1)}\left(\lambda^{\alpha m}+\cdots+\lambda^{\alpha}\right)\le\frac{C}{1-\lambda^{\alpha}}\lambda^{\alpha k}.\end{aligned}$$

由柯西收敛定理可知，$\{A_k\}$ 收敛，并且 $|A_k-A|\le C\lambda^{\alpha k}$。

同理可得 $\{B_k\}$，$\{C_k\}$，$\{D_k\}$ 收敛，并且

$$|B_k-B|\le C\lambda^{\alpha k},\quad |C_k-C|\le C\lambda^{(1+\alpha)k},\quad |D_k-D|\le C\lambda^{(2+\alpha)k}.$$

因此，对任意的 $|x|\le\lambda^k$, $|t|\le\lambda^{2k}$，有

$$|p_k-p|\le C\left(\lambda^{\alpha k}|x|^2+\lambda^{\alpha k}|t|+\lambda^{(1+\alpha)k}|x|+\lambda^{(2+\alpha)k}\right)\le C\lambda^{(2+\alpha)k}.$$

最后，对任意的 $\rho\in(0,1]$，那么必存在某个 $k\in\mathbb{N}$，使得 $\lambda^{k+1}\le\rho\le\lambda^k$。因此，利用(14)和(19)可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{|Q_\rho|}\iint_{Q_\rho}|u-p|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t&\le\frac{2\iint_{Q_\rho}|u-p_k|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t}{|Q_\rho|}+\frac{2\iint_{Q_\rho}|p_k-p|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t}{|Q_\rho|}\\&\le\frac{2\iint_{Q_{\lambda^k}}|u-p_k|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t}{|Q_{\lambda^{k+1}}|}+\frac{2\iint_{Q_{\lambda^k}}|p_k-p|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t}{|Q_{\lambda^{k+1}}|}\\&\le\frac{2\iint_{Q_{\lambda^k}}|u-p_k|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t}{\lambda^{n+2}|Q_{\lambda^k}|}+\frac{2\iint_{Q_{\lambda^k}}|p_k-p|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t}{\lambda^{n+2}|Q_{\lambda^k}|}\\&\le\frac{2}{\lambda^{n+2}}\lambda^{2k(2+\alpha)}+\frac{C\lambda^{2k(2+\alpha)}}{\lambda^{n+2}}=\frac{C}{\lambda^{(n+2)+2(2+\alpha)}}\lambda^{2(n+2)(2+\alpha)}\\&\le\frac{C}{\lambda^{(n+2)+2(2+\alpha)}}\rho^{2(2+\alpha)}=C_1\rho^{2(2+\alpha)}.\end{aligned}$$

故可得结论。

下面我们来证明本文的主要结论：定理 1。

证明：令

$$v(x,t)=\frac{u(\rho x,\rho^2t)}{\rho^{2+\alpha}},$$

则

$$v_t - \Delta v = \frac{f\left(\rho x, \rho^2 t\right)}{\rho^\alpha} =: F\left(x,t\right).$$

所以，由定理 1 的条件可得

$$\begin{aligned}
[F]_{C_2^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(0,0;Q_1)} &= \sup_{r\le 1} \frac{1}{r^\alpha}\sqrt{\frac{1}{|Q_r|}\iint_{Q_r}\left|F\left(x,t\right)-F\left(0,0\right)\right|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t} \\
&= \sup_{r=\frac{s}{\rho}\le 1} \frac{1}{\left(\frac{s}{\rho}\right)^\alpha}\sqrt{\frac{1}{\left|Q_{\frac{s}{\rho}}\right|}\iint_{Q_{\frac{s}{\rho}}}\left|\frac{f\left(\rho x,\rho^2 t\right)}{\rho^\alpha}-\frac{f\left(0,0\right)}{\rho^\alpha}\right|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t} \\
&= \sup_{s\le\rho} \frac{1}{s^\alpha}\sqrt{\frac{1}{|Q_s|}\iint_{Q_s}\left|f\left(x,t\right)-f\left(0,0\right)\right|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t} = [f]_{C_2^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(0,0;Q_\rho)} < \infty.
\end{aligned}$$

那么由引理 3 知：存在一个二次多项式

$$\tilde{p}\left(x,t\right) = \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}\tilde{A}x + \tilde{B}t + \tilde{C}x + \tilde{D}$$

使得

$$\frac{1}{|Q_r|}\iint_{Q_r}\left|v\left(x,t\right)-\tilde{p}\left(x,t\right)\right|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t \le C_1 r^{2(2+\alpha)}, \tag{20}$$

这里 $0 < r \le 1$，

$$C_1 \le C_0\left([F]_{C_2^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(0,0;Q_1)} + \sqrt{\frac{1}{|Q_1|}\iint_{Q_1} v^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t}\right) \tag{21}$$

且

$$\left|\tilde{A}\right|+\left|\tilde{B}\right|+\left|\tilde{C}\right|+\left|\tilde{D}\right| \le C_0\left([F]_{C_2^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(0,0;Q_1)} + \left|F\left(0,0\right)\right| + \sqrt{\frac{1}{|Q_1|}\iint_{Q_1} v^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t}\right). \tag{22}$$

令 $r = \frac{s}{\rho}$，那么，由(20)可得

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|Q_r|}\iint_{Q_r}\left|v\left(x,t\right)-\tilde{p}\left(x,t\right)\right|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t &= \frac{1}{|Q_r|}\iint_{Q_r}\left|\frac{u\left(\rho x,\rho^2 t\right)}{\rho^{2+\alpha}}-\tilde{p}(x,t)\right|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\rho^{2(2+\alpha)}}\frac{1}{|Q_r|}\iint_{Q_r}\left|u\left(\rho x,\rho^2 t\right)-\rho^{2+\alpha}\tilde{p}\left(x,t\right)\right|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\rho^{2(2+\alpha)}}\frac{1}{\left|Q_{\frac{s}{\rho}}\right|}\iint_{Q_{\frac{s}{\rho}}}\left|u\left(\rho x,\rho^2 t\right)-\rho^{2+\alpha}\tilde{p}\left(x,t\right)\right|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\rho^{2(2+\alpha)}}\frac{1}{|Q_s|}\iint_{Q_s}\left|u(x,t)-\rho^{2+\alpha}\tilde{p}\left(\frac{x}{\rho},\frac{t}{\rho^2}\right)\right|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t \le C_1\left(\frac{s}{\rho}\right)^{2(2+\alpha)}.
\end{aligned}$$

即

$$\frac{1}{|Q_s|}\iint_{Q_s}\left|u(x,t)-\rho^{2+\alpha}\tilde{p}\left(\frac{x}{\rho},\frac{t}{\rho^2}\right)\right|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t \le C_1 s^{2(2+\alpha)},$$

这里$0<s\le\rho$，其中

$$C_1 \le C_0\left([F]_{C_2^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(0,0;Q_1)}+\sqrt{\frac{1}{|Q_1|}\iint_{Q_1}v^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t}\right)=C_0\left([f]_{C_2^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(0,0;Q_\rho)}+\frac{1}{\rho^{2+\alpha}}\sqrt{\frac{1}{|Q_\rho|}\iint_{Q_\rho}u^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t}\right).$$

进一步取

$$p(x,t)=\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}Ax+Bt+Cx+D=\rho^{2+\alpha}\tilde{p}\left(\frac{x}{\rho},\frac{t}{\rho^2}\right),$$

那么

$$A=\rho^{\alpha}\tilde{A},\ B=\rho^{\alpha}\tilde{B},\ C=\rho^{1+\alpha}\tilde{C},\ \text{且}\ D=\rho^{2+\alpha}\tilde{D}.$$

所以，由(22)可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{\rho^{2+\alpha}}\left(\rho^2A+\rho^2B+\rho C+D\right)&=|\tilde{A}|+|\tilde{B}|+|\tilde{C}|+|\tilde{D}|\le C_0\left([F]_{C_2^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(0,0;Q_1)}+|F(0,0)|+\sqrt{\frac{1}{|Q_1|}\iint_{Q_1}v^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t}\right)\\&\le C_0\left([f]_{C_2^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(0,0;Q_\rho)}+\frac{1}{\rho^{\alpha}}|f(0,0)|+\frac{1}{\rho^{2+\alpha}}\sqrt{\frac{1}{|Q_\rho|}\iint_{Q_\rho}u^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t}\right).\end{aligned}$$

即

$$\rho^2|A|+\rho^2|B|+\rho|C|+|D|\le C_0\left(\rho^{2+\alpha}[f]_{C_2^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(0,0;Q_\rho)}+\rho^2|f(0,0)|+\sqrt{\frac{1}{|Q_\rho|}\iint_{Q_\rho}u^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t}\right).$$

综上所述，结论得证。

参考文献 (References)

[1] Schauder, J. (1934) Uber lineare elliptische Differentialgleichungen zweiter Ordnung. *Mathematische Zeitschrift*, **38**, 257-282.

[2] Schauder, J. (1934) Numerischen Abschadtzungen in elliptische lineare Differentialgleichungen. *Studia Mathematica*, **5**, 34- 42.

[3] Campanato, S. (1964) Propriet di una famiglia di spazi funzionali. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa*, **18**, 137-160.

[4] Trudinger, N. (1986) A new approach to the Schauder estimates for linear elliptic equations. *Proceedings of the Centre for Mathematical Analysis, Australian National University*, **14**, 52-59.

[5] Caffarelli, L. (1989) Interior a priori estimates for solutions of fully nonlinear equations. *Annals of Mathematics*, **130**, 189-213.

[6] Ciliberto, C. (1954) Formule di maggiorazione e teoremi di esistenza per le soluzioni delle equazioni paraboliche in due variabili. *Ricerche di Matematica*, **3**, 40-75.

[7] Han, Q. (2000) Schauder estimates for elliptic operators with applications to nodal sets. *The Journal of Geometric Analysis*, **10**, 455-480.

[8] Simon, L. (1997) Schauder estimates by scaling. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, **5**, 391-407.

[9] Wang, L. (1994) Compactness methods for certain degenerate elliptic equations. *Journal of Differential Equations*, **107**, 341-350.

[10] Wang, L. (2003) Holder estimates for subelliptic operators. *Journal of Functional Analysis*, **199**, 228-242.

[11] Wang, L. Regularity Theory for Elliptic Equations. Preprint.

[12] Wang, X. (2006) Schauder estimates for elliptic and parabolic equations. *Chinese Annals of Mathematics*, *Series B*, **27**, 637-642.

[13] Evans, L. (1998) Partial differential equations. In: *Graduates Studies in Mathematics*, American Mathematical Society, Providence, Vol. 19.