Pure Mathematics 理论数学, 2016, 6(3), 288-298
Published Online May 2016 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2016.63043

Generalized λ-Array Type Polynomials with Exponential Riordan Array

Lan Qing, Wuyungaowa

School of Mathematical Sciences, Inner Mongolia University, Hohhot Inner Mongolia
Email: baoqinglan19@163.comi, wuyungw@163.com

Received: May 10th, 2016; accepted: May 24th, 2016; published: May 31st, 2016

Abstract

In this paper, by using exponential Riordan array methods, we proved some identities among the generalized λ-array type polynomials, the generalized Hermite-Based Apostol Bernoulli polynomials and the generalized Hermite-Based Apostol Euler polynomials. We also obtain some combinatorial identities involving the classical array type polynomials, the Stirling number of the second kind, the generalized Bernoulli polynomials and the generalized Euler polynomials.

Keywords

Exponential Riordan Array, Generalized λ-Array Type Polynomials, Classical Array Type Polynomials, Stirling Numbers of the Second Kind

Riordan阵与广义λ-Array Type多项式恒等式

青　兰，乌云高娃

内蒙古大学数学科学学院，内蒙古　呼和浩特
Email: baoqinglan19@163.comi, wuyungw@163.com

收稿日期：2016年5月10日；录用日期：2016年5月24日；发布日期：2016年5月31日

摘　要

在本文中定义了一类广义λ-array多项式，并利用运用指数型Riordan阵方法与组合分析法，研究了广义

文章引用：青兰，乌云高娃. Riordan 阵与广义λ-Array Type 多项式恒等式[J]. 理论数学, 2016, 6(3): 288-298.
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2016.63043

λ-array type多项式，得到了广义λ-array type多项式与广义Hermite-Based Apostol Bernoulli多项式，广义Hermite-Based Apostol Euler多项式的关系式，给出了array type多项式，第二类Stirling数以及高阶Bernoulli多项式，高阶Euler多项式的一些恒等式。

关键词

指数型Riordan阵，广义λ-Array Type多项式，经典Array Type多项式，第二类Stirling数

1. 引言

组合序列在组合数学中有着十分广泛的应用背景，特别是经典的组合序列，其中经典第二类 Stirling 数[1]在数学领域中扮演重要的角色。近年来，很多学者用各种不同的方法对第二类 Stirling 数进行了推广，并取得了丰富的成果。2011 年，罗秋明与 H. M. Srivastava [2]研究了第二类λ-Stirling 数与 Apostol type 多项式相关的性质。2013 年，Simisek [3]引入了广义第二类λ-Stirling type 数与广义λ-array type 多项式，得到了许多相关恒等式。本文在此基础上继续推广了广义λ-array type 多项式，并运用一些指数型 Riordan 理论和组合学技巧得到了一些关于广义λ-array type 多项式以及 array type 多项式的组合恒等式，并且在这些恒等式里包含着一些常见的特殊组合数。在这里，我们还引入了广义 Hermite-Based Apostol-Bernoulli 多项式与广义 Hermite-Based Apostol-Euler 多项式的定义，从而得到它们相应的指数型 Riordan 阵，并进一步证明了广义 Hermite-Based Apostol-Bernoulli 多项式、广义 Hermite-Based Apostol-Euler 多项式与广义λ-array type 多项式之间的一些恒等式。

Riordan 阵理论在组合学中具有广泛的应用，是研究组合和式与特殊组合序列的工具。应用 Riordan 理论不仅可以研究组合序列，发现和证明恒等式，而且在序列、矩阵与发生函数之间建立起了很好的桥梁。下面将给出指数型 Riordan 阵理论的一些基本知识。

一个正常的指数型 Riordan 阵是一个形式幂级数对$\left(g(t), f(t)\right)$，其中$g(t)=\sum_{k\ge 0} g_k \frac{t^k}{k!}$，$f(t)=\sum_{k\ge 0} f_k \frac{t^k}{k!}$且满足$f_1 \ne 0$，即$f(t)$是一个 delta 级数。Riordan 阵按如下规则定义了一个无穷下三角矩阵$D=\left(d_{n,k}\right)_{0\le k\le n\le\infty}$：

$$d_{n,k}=\left[\frac{t^n}{n!}\right] g(t)\frac{\left(f(t)\right)^k}{k!}, \tag{1}$$

其中函数$g(t)\frac{\left(f(t)\right)^k}{k!}$称为该指数型 Riordan 阵的一般元。

最常见的指数型 Riordan 阵为 Pascal 阵$P=\left(\mathrm{e}^t, t\right)$。

在所有指数型 Riordan 阵组成的集合中，定义两个 Riordan 阵的乘法如下：

若$D_1=\left(d(t), h(t)\right)$，$D_2=\left(p(t), q(t)\right)$，则$D_1$与$D_2$的乘积定义为

$$D=D_1 * D_2=\left(d(t)\,p\left(h(t)\right), q\left(h(t)\right)\right).$$

引理 1 [3] 令$D=\left(g(t), f(t)\right)=\left(d_{n,k}\right)_{n,k\in\mathbb{N}_0}$为关于$n!$的指数型 Riordan 阵，令为序列$\left\{h_k\right\}_{k\in\mathbb{N}_0}$的数型发生函数，则我们有

$$\sum_{k=0}^{n} d_{n,k} h_k=\left[\frac{t^n}{n!}\right] g(t)\, h\left(f(t)\right),\quad h(t)=\sum_{k\ge 0} h_k \frac{t^k}{k!} \tag{2}$$

上述和式可以改写为矩阵相乘形式：

$$\left(g(t), f(t)\right) * h(t) = g(t) h\left(f(t)\right).$$

引理 2 [3] 所有满足 $g(t)$ 为可逆级数的指数型 Riordan 阵 $\left(g(t), f(t)\right)$ 关于矩阵乘法构成一个群。特别地，矩阵 $(1,t)$ 为群的单位元，而矩阵 $\left(g(t), f(t)\right)$ 的逆元为 $\left(\frac{1}{g\left(\bar{f}(t)\right)}, \bar{f}(t)\right)$，其中 $\bar{f}(t)$ 为 $f(t)$ 的复合逆。

下面我们将给出本文用到的一些基本记号：$N=\{1,2,3,\cdots\}$，$N_0 = N \cup \{0\}$，且 Z 表示整数集合，R 表示实数集合及 C 表示复数集合。我们假设 $\ln(z)$ 表示多值函数 $\ln(z)$ 的主分支且其虚部 $\Im(\ln(z))$ 被限制为 $-\pi < \Im(\ln(z)) \le \pi$。进一步，

$$0^n = \begin{cases} 1 & n=0, \\ 0 & n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

$$\binom{x}{v} = \frac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-v+1)}{v!},$$

及

$$(z)_0 = 1, (z)_j = z(z-1)(z-2)\cdots(z-j+1),$$

其中 $j \in N$ 且 $z \in C$ [1] [2]。

此外，我们引入线性函数的线性表示 $\left[t^n\right]: F \to F \quad (n=0,1,2,\cdots)$，它在单项式 t^k 上的作用定义为：

$$\left[t^n\right] t^k = \delta_{n,k},$$

其中 $\delta_{n,k}$ 是 Kronecker 记号。由定义，如果 $f(t) = \sum_{k\ge0} f_k t^k$，那么我们有

$$\left[t^n\right] f(t) = \left[t^n\right] \sum_{k=0}^{n} f_k t^k = \sum_{k=0}^{n} f_k \left[t^n\right] t^k = f_n.$$

同样地，如果 $f(t) = \sum_{k\ge0} f_k \frac{t^k}{k!}$，那么 $\left[\frac{t^n}{n!}\right] f(t) = f_n$。从而易知 $\left[\frac{t^n}{n!}\right] f(t) = n!\left[t^n\right] f(t)$。换言之，$\left[t^n\right] f(t)$ 就是 $f(t)$ 中 t^n 的系数。因此，$\left[t^n\right]$ 可以表示“取系数”算子。

最后，介绍符号“$\to$”，我们用 $x \to -x$ 表示 x 换为 $-x$，如 $y \to -y$ 表示 y 换为 $-y$ 等等。

2. 广义λ-Array Type 多项式与指数型 Riordan 阵

在这一节，我们将构造一类关于包含非负实参数 a,b,c 的广义λ-array type 多项式的发生函数，并应用指数型 Riordan 阵理论得到了广义λ-array type 多项式的一些性质，进而证明了特殊组合序列，如经典 array type 多项式与第二类 Stirling 数，的一些恒等式。现在，我们将给出广义λ-array type 多项式的自然推广形式：

定义 2.1 令 $a,b,c \in R^+ \quad (a \ne b)$，$x,y \in R$，$\lambda \in C$ 且 $v \in N_0$，则一类广义 λ-array 多项式 $S_v^n(x,y;a,b,c;\lambda)$ 可定义为

$$S_v^n(x,y;a,b,c;\lambda) = \frac{n!}{v!} \sum_{j=0}^{v} (-1)^{v-j} \binom{v}{j} \lambda^j \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{\left(\ln c^y\right)^k \left(\ln\left(a^{v-j} b^j c^x\right)\right)^{n-2k}}{k!(n-2k)!}. \tag{3}$$

运用式(3)，可计算出多项式 $S_v^n(x,y;a,b,c;\lambda)$ 的特殊值如下：

$$S_0^n\left(x,y;a,b,c;\lambda\right)=n!\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{\left(\ln c^y\right)^k\left(\ln c^x\right)^{n-2k}}{k!\left(n-2k\right)!},$$

$$S_v^0\left(x,y;a,b,c;\lambda\right)=\frac{\left(\lambda-1\right)^v}{v!},$$

$$S_0^0\left(x,y;a,b,c;\lambda\right)=1,\quad S_0^n\left(x,y;a,b,e;\lambda\right)=H_n\left(x,y\right),$$

$$S_1^1\left(x,y;a,b,c;\lambda\right)=-\ln\left(ac^x\right)+\ln\left(bc^x\right).$$

注 2.1 在式(3)中代入 $c=b$ 及 $y=0$，我们可得广义λ-array 多项式

$$S_v^n\left(x,0;a,b,b;\lambda\right)=S_v^n\left(x;a,b;\lambda\right),$$

([3]，定义 3.1)。进一步，令 $x=y=0$，我们有广义第二类λ-Stirling 数

$$S_v^n\left(0,0;a,b,b;\lambda\right)=S\left(n,v;a,b;\lambda\right),$$

它是由下列发生函数所定义：

$$f_{s,v}\left(t,a,b,\lambda\right):=\frac{1}{v!}\left(\lambda b^t-a^t\right)^v=\sum_{n=0}^{\infty}S\left(n,v;a,b,\lambda\right)\frac{t^n}{n!},$$

([3]，定理 2.2)。

在式(3)中令 $a=\lambda=1$，$b=c=e$ 及 $y=0$，则有 array 多项式

$$S_v^n\left(x\right)=\frac{1}{v!}\sum_{j=0}^{v}\left(-1\right)^{v-j}\binom{v}{j}\left(x+j\right)^n,$$

这恰好是 Chang 与 Ha [4]的结果，也可参考 Simsek [5]。显然

$$S_v^n\left(0\right)=S\left(n,v\right),$$

其中 $S\left(n,v\right)$ 表示第二类 Stirling 数[3]。

为方便起见，假设多项式 $S_v^n\left(x,y;a,b,c;\lambda\right)$ 的发生函数为

$$g_v\left(x,y,t;a,b,c;\lambda\right)=\sum_{n=0}^{\infty}S_v^n\left(x,y;a,b,c;\lambda\right)\frac{t^n}{n!}. \tag{4}$$

定理 2.1 假设 $a,b,c\in R^+$ $\left(a\neq b\right)$，$x,y\in R$，$\lambda\in C$ 及 $v\in N_0$，那么 $S_v^n\left(x,y;a,b,c;\lambda\right)$ 有指数型发生函数

$$g_v\left(x,y;a,b,c;\lambda\right)=\frac{1}{v!}\left(\lambda b^t-a^t\right)^v c^{xt+yt^2}. \tag{5}$$

证：在式(4)的右端代入式(3)可得

$$\sum_{n=0}^{\infty}S_v^n\left(x,y;a,b,c;\lambda\right)\frac{t^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{v!}\left(\sum_{j=0}^{v}\left(-1\right)^{v-j}\binom{v}{j}\lambda^j\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{\left(\ln c^y\right)^k\left(\ln\left(a^{v-j}b^jc^x\right)\right)^{n-2k}}{k!\left(n-2k\right)!}\right)\frac{t^n}{n!}.$$

因此

$$\sum_{n=0}^{\infty}S_v^n\left(x,y;a,b,c;\lambda\right)\frac{t^n}{n!}=\frac{1}{v!}\sum_{j=0}^{v}\left(-1\right)^{v-j}\binom{v}{j}\lambda^j\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{\left(\ln c^y\right)^k\left(\ln\left(a^{v-j}b^jc^x\right)\right)^{n-2k}}{k!\left(n-2k\right)!}t^n.$$

上面方程的右端恰为 $\mathrm{e}^{\left(\ln\left(a^{v-j}b^{j}c^{x}\right)\right)t+(y\ln c)t^{2}}$ 的 Taylor 级数展开式。

故，

$$\sum_{n=0}^{\infty}S_{v}^{n}\left(x,y;a,b,c;\lambda\right)\frac{t^{n}}{n!}=\left(\frac{1}{v!}\sum_{j=0}^{v}(-1)^{v-j}\binom{v}{j}\lambda^{j}a^{(v-j)t}b^{jt}\right)c^{xt}c^{yt^{2}}.$$

对上式应用二项式定理，~即可得到所证结果。

在式(5)中令 $t=0$ 可得

$$g_{v}\left(x,y;a,b,c;\lambda\right)=\frac{1}{v!}(\lambda-1)^{v}.$$

对上式两边取系数，也可以得到

$$S_{v}^{0}\left(x,y;a,b,c;\lambda\right)=\frac{(\lambda-1)^{v}}{v!}.$$

注 2.2 在(5)式中令 $b=c$ 及 $y=0$，定理 2.1 产生相应的结果([3]，定理 3.3)。在(5)式中取 $x=y=0$ 时，它被简化为

$$f_{s,v}\left(t,a,b,\lambda\right)=\frac{1}{v!}\left(\lambda b^{t}-a^{t}\right)^{v}.$$

在特殊情况 $a=\lambda=1$，$b=c=e$ 及 $y=0$ 时，由式(5)所定义的一类广义λ-array 多项式 $S_{v}^{n}\left(x,y;a,b,c;\lambda\right)$ 立即得到经典 array 多项式 $S_{v}^{n}(x)$，它由下述发生函数所定义

$$\sum_{n=0}^{\infty}S_{v}^{n}(x)\frac{t^{n}}{n!}=\frac{\left(\mathrm{e}^{t}-1\right)^{v}}{v!}\mathrm{e}^{xt}.$$

这正是由 Chang 及 Ha [4]所研究的 array 多项式 $S_{v}^{n}(x)$ 的发生函数。

根据指数型 Riordan 阵的定义(1)式，我们得到对应于广义λ-array type 多项式 $S_{v}^{n}\left(x,y;a,b,c;\lambda\right)$ 的发生函数(5)式的正常的指数型 Riordan 阵：

$$S:=\left(g(t),f(t)\right)=\left(\frac{1}{v!}\left(\lambda b^{t}-a^{t}\right)c^{xt+yt^{2}},t\right),$$

所以，矩阵 S 的一般元 $d_{n,k}$ 由下式给出

$$\begin{aligned}d_{n,k}&=\left[\frac{t^{n}}{n!}\right]\frac{1}{v!}\left(\lambda b^{t}-a^{t}\right)^{v}c^{xt+yt^{2}}\frac{t^{k}}{k!}=\frac{n!}{k!}\left[t^{n-k}\right]\frac{1}{v!}\left(\lambda b^{t}-a^{t}\right)^{v}c^{xt+yt^{2}}\\&=\binom{n}{k}S_{n-k}^{(v)}\left(x,y;a,b,c;\lambda\right)\end{aligned}$$

定理 2.2 对于 $x,y,z,l\in R$，$a,b,c\in R^{+}\quad(a\neq b)$，$\lambda\in C$ 及 $v\in N_{0}$，下述恒等式成立：

$$S_{v}^{n}\left(x+z,y+l;a,b,c;\lambda\right)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}S_{v}^{n-k}\left(x,y;a,b,c;\lambda\right)k!\sum_{r=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]}\frac{z^{k-2r}l^{r}}{r!(k-2r)!}.\tag{6}$$

证： 令 $h(t)=c^{zt+lt^{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}n!\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(z\ln c)^{n-2k}(l\ln c)^{k}}{k!(n-2k)!}\frac{t^{n}}{n!}$，则应用式(2)可得

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}S_v^{n-k}(x,y;a,b,c;\lambda)k!\sum_{r=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]}\frac{(z\ln c)^{k-2r}(l\ln c)^r}{r!(k-2r)!}$$
$$=\left[\frac{t^n}{n!}\right]\frac{1}{v!}(\lambda b^t-a^t)^v c^{xt+yt^2}c^{zt+lt^2}=\left[\frac{t^n}{n!}\right]\frac{1}{v!}(\lambda b^t-a^t)^v c^{(x+z)t+(y+l)t^2}$$
$$=S_v^n(x+z,y+l;a,b,c;\lambda).$$

推论 2.1 当 $a=\lambda=1$， $b=c=e$ 与 $y=l=0$ 时恒等式(6)成为

$$S_v^n(x+z)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}S_v^{n-k}(x)z^k.$$

进一步，当 $x=0$ 时，

$$S_v^n(z)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}S(n-k,v)z^k,$$

这是参考文献([5]，定理 2)中的结论。

定理 2.3 令 $a,b,c\in R^+$ $(a\neq b)$， $x,y,z\in R$， $\lambda\in C$ 及 $v,w\in N_0$， 那么

$$S_{v+w}^n(2x,2y;a,b,c;\lambda)=\binom{v+w}{v}^{-1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}S_v^{n-k}(x,y;a,b,c;\lambda)S_w^k(x,y;a,b,c;\lambda). \tag{7}$$

证 考虑 $h(t)=\frac{1}{v!}(\lambda b^t-a^t)^v c^{xt+yt^2}$， 由式(2)可得

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}S_v^{n-k}(x,y;a,b,c;\lambda)S_w^k(x,y;a,b,c;\lambda)$$
$$=\left[\frac{t^n}{n!}\right]\frac{1}{v!w!}(\lambda b^t-a^t)c^{2xt+2yt^2}=\frac{(v+w)!}{v!w!}S_{v+w}^n(2x,2y;a,b,c;\lambda),$$

从而，立即可得所证恒等式。

在定理 2.3 中，令 $a=\lambda=1$， $b=c=e$， $y=0$ 与 $v=w$， 则我们有下述推论。

推论 2.2 令 $x\in R$， $n,v\in N_0$， 那么下式成立：

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}S_v^{n-k}(x)S_v^k(x)=\binom{2v}{v}S_{2v}^n(x). \tag{8}$$

进一步，取 $x=0$， 可得

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}S(n-k,v)S(k,v)=\binom{2v}{v}S(n,2v).$$

3. 广义λ-Array Type 多项式与其他广义多项式

在本节，我们首先回顾广义 Hermite-based Apostol-Bernoulli 多项式与广义 Hermite-based Apostol-Euler 多项式的定义，从而得到它们相应的指数型 Riordan 阵，并进一步证明了广义 Hermite-based Apostol-Bernoulli 多项式、广义 Hermite-based Apostol-Euler 多项式与广义λ-array type 多项式之间的一些恒等式。

对于任意的 $a,b,c\in R^+$ $(a\neq b)$， $x,y\in R$， λ 与 v 为任一复数，广义 Hermite-Based Apostol Bernoulli 多项式 ${}_H B_n^{(v)}(x,y;\lambda;a,b,c)$ [6]及广义 Hermite-Based Apostol Euler 多项式 ${}_H E_n^{(v)}(x,y;\lambda;a,b,c)$ [6]分别由下式所定义

$$\left(\frac{t}{\lambda b^t - a^t}\right)^v c^{xt+yt^2} = \sum_{n=0}^{\infty} {}_H B_n^{(v)}\left(x, y; \lambda; a, b, c\right)\frac{t^n}{n!}, \tag{10}$$

$$\left(\left|t\ln\left(\frac{b}{a}\right) + \ln\lambda\right| < 2\pi,\ x, y \in R,\ n \in N_0, 1^v := 1\right).$$

以及

$$\left(\frac{2}{\lambda b^t + a^t}\right)^v c^{xt+yt^2} = \sum_{n=0}^{\infty} {}_H \mathscr{E}_n^{(v)}\left(x, y; \lambda; a, b, c\right)\frac{t^n}{n!}, \tag{11}$$

$$\left(\left|t\ln\left(\frac{b}{a}\right) + \ln\lambda\right| < \pi,\ x, y \in R,\ n \in N_0, 1^v := 1\right).$$

我们知道 $B_n^{(v)}(x) = {}_H B_n^{(v)}(x, 0; \lambda; 1, e, e)$ 与 $E_n^{(v)}(x) = {}_H E_n^{(v)}(x, 0; \lambda; 1, e, e)$，它们分别表示广义 Bernoulli 多项式和广义 Euler 多项式[1] [7]。

现在，我们考虑由式(10)与式(11)所给出的广义 Hermite-based Bernoulli 多项式与广义 Hermite-based Euler 多项式的发生函数。由式(1)定义的指数型 Riordan 阵，我们可获得下述关于式(10)对应的正常的指数型 Riordan 阵：

$$B := \left(g(t), f(t)\right) = \left(\left(\frac{t}{\lambda b^t - a^t}\right)^v c^{xt+yt^2}, t\right).$$

因此，B 的一般元 $d_{n,k}$ 为

$$d_{n,k} = \left[\frac{t^n}{n!}\right]\left(\frac{t}{\lambda b^t - a^t}\right)^v c^{xt+yt^2}\frac{t^k}{k!} = \frac{n!}{k!}\left[t^{n-k}\right]\left(\frac{t}{\lambda b^t - a^t}\right)^v c^{xt+yt^2} = \binom{n}{k} {}_H B_{n-k}^{(v)}\left(x, y; a, b, c; \lambda\right)$$

由上式可知

$$\left(\left(\frac{t}{\lambda b^t - a^t}\right)^v c^{xt+yt^2}, t\right)^{-1} = \left(\left(\frac{\lambda b^t - a^t}{t}\right)^v c^{-xt-yt^2}, t\right) = \left(\left(\frac{t}{\lambda b^t - a^t}\right)^{-v} c^{-xt-yt^2}, t\right) \tag{12}$$

的一般元为 $\binom{n}{k} {}_H B_{n-k}^{(-v)}\left(-x, -y; a, b, c; \lambda\right)$。

在上式中取 $a = \lambda = 1$，$b = c = \mathrm{e}$ 及 $x = y = 0$，则得到指数型 Riordan 阵

$$\left(\left(\frac{\mathrm{e}^t - 1}{t}\right)^v, t\right) = \left(\left(\frac{t}{\mathrm{e}^t - 1}\right)^{-v}, t\right) = \left(\binom{n}{k} B_{n-k}^{(-v)}\right)_{n,k \in N_0},$$

其中 $B_{n-k}^{(-v)} := B_{n-k}^{(-v)}(0)$ 为高阶 Bernoulli 数(参考[1])。但是利用位势多项式的定义([1]，133 页)，可以得到

$$\left[\frac{t^n}{n!}\right]\left(\frac{\mathrm{e}^t - 1}{t}\right)^v \frac{t^k}{k!} = \frac{n!}{k!}\left[t^{n-k}\right]\left(1 + \sum_{i \ge 1}\frac{1}{i+1}\frac{t^i}{i!}\right)^v = \binom{n}{k}\sum_{i=0}^{n-k}\{v\}_i B_{n-k,i}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots\right) \tag{13}$$

其中 $B_{n,k}$ 为指数型部分 Bell 多项式[1]。这样，我们可以导出广义 Bernoulli 多项式的确切表达式：

$$B_n^{(v)}(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} B_{n-k}^{(v)} x^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sum_{i=0}^{n-k}\{-v\}_i B_{n-k,i}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots\right),$$

这是参考文献[8]中的结论。

此外，在式(13)中取 $v = 1$ 可得

$$\left(\left(\frac{e^t-1}{t}\right)^v,t\right)=\left(\binom{n}{k}B_{n-k}^{(-1)}\right)_{n,k\in N_0}=\left(\binom{n}{k}\frac{1}{n-k+1}\right)_{n,k\in N_0}. \tag{14}$$

类似地，我们可以得到关于广义 Hermite-based Euler 多项式序列的正常的 Riordan 阵：

$$E:=\left(g(t),f(t)\right)=\left(\left(\frac{2}{\lambda b^t+a^t}\right)^v c^{xt+yt^2},t\right).$$

它的一般元为

$$d_{n,k}=\left[\frac{t^n}{n!}\right]\left(\frac{2}{\lambda b^t+a^t}\right)^v c^{xt+yt^2}\frac{t^k}{k!}=\frac{n!}{k!}\left[t^{n-k}\right]\left(\frac{2}{\lambda b^t+a^t}\right)^v c^{xt+yt^2}=\binom{n}{k}{}_HE_{n-k}^{(v)}(x,y;a,b,c;\lambda).$$

该 Riordan 阵的逆阵为

$$\left(\left(\frac{\lambda b^t+a^t}{2}\right)^v c^{-xt+yt^2},t\right)=\left(\binom{n}{k}{}_HE_{n-k}^{(-v)}(-x,-y;a,b,c;\lambda)\right)_{n,k\in N_0} \tag{15}$$

特别地，在上式(15)中取 $a=\lambda=1$， $b=c=e$， $x=y=0$ 可得

$$\left(\left(\frac{e^t+1}{2}\right)^v,t\right)=\left(\binom{n}{k}E_{n-k}^{(-v)}(0)\right)_{n,k\in N_0},$$

则利用 Bell 多项式的表达式[1]以及公式 $B_{n,k}(1,1,\cdots)=S(n,k)$ [1]可得

$$\begin{aligned}\binom{n}{k}E_{n-k}^{(-v)}(0)&=\left[\frac{t^n}{n!}\right]\left(\frac{e^t+1}{2}\right)^v\frac{t^k}{k!}=\frac{n!}{k!}\left[t^{n-k}\right]\left(1+\sum_{i\ge 1}\frac{1}{2}\frac{t^i}{i!}\right)^v\\&=\binom{n}{k}\sum_{i=0}^{n-k}\{v\}_iB_{n-k,i}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\cdots\right)=\binom{n}{k}\sum_{i=0}^{n-k}\{v\}_i\left(\frac{1}{2}\right)^iS(n-k,i),\end{aligned}$$

从而可得如下广义 Euler 多项式的表达式：

$$E_n^{(v)}(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}E_{n-k}^{(v)}x^k=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sum_{i=0}^{n-k}\{-v\}_i(2)^{-i}S(n-k,i)x^k,$$

这是参考文献[8]中的结论。

定理 3.1 令 $a,b,c\in R^+$ $(a\ne b)$， $x,y,z,l\in R$， $\lambda\in C$， $v,w\in N_0$， 那么有

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}{}_HB_{n-k}^{(-v)}(-x,-y;\lambda;a,b,c)S_w^k(z,l;a,b,c;\lambda)=\binom{v+w}{w}\binom{n+v}{v}^{-1}S_{v+w}^{n+v}(z-x,l-y;a,b,c;\lambda). \tag{16}$$

证 令 $h(t)=\frac{1}{w!}\left(\lambda b^t-a^t\right)^w c^{zt+lt^2}$， 应用式(2)可得

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}{}_HB_{n-k}^{(-v)}(-x,-y;\lambda;a,b,c)S_w^k(z,l;a,b,c;\lambda)\\&=\left[\frac{t^n}{n!}\right]\left(\frac{t}{\lambda b^t-a^t}\right)^{-v}c^{-xt-yt^2}\frac{1}{w!}\left(\lambda b^t-a^t\right)^w c^{zt+lt^2}\\&=\frac{1}{w!}\left[\frac{t^n}{n!}\right]\frac{\left(\lambda b^t-a^t\right)^{v+w}}{t^v}c^{(z-x)t+(l-y)t^2}=\frac{n!}{w!}\left[t^{n+v}\right]\left(\lambda b^t-a^t\right)^{v+w}c^{(z-x)t+(l-y)t^2}\\&=\frac{n!}{w!}\frac{(n+w)!}{(n+v)!}S_{v+w}^{n+v}(z-x,l-y;a,b,c;\lambda)=\binom{v+w}{v}\binom{n+v}{v}^{-1}S_{v+w}^{n+v}(z-x,l-y;a,b,c;\lambda)\end{aligned}$$

在定理 3.1 中代入 $\lambda=a=1$， $b=c=e$， $x=y=l=0$ 与 $v=1$，则可得下述推论：

推论 3.1 下列恒等式成立：

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n-k+1}S_w^k(z)=\frac{w+1}{n+1}S_{w+1}^{n+1}(z). \tag{17}$$

特别地，当 $z=0$ 时，

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n-k+1}S(k,w)=\frac{w+1}{n+1}S(n+1,w+1).$$

证 应用式(14)与式(16)，我们很容易地得到所证结论。

定理 3.2 令 $a,b,c\in R^+$ $(a\neq b)$， $x,y,z\in R$， $\lambda\in C$ 及 $v\in N_0$，那么

$$S_v^n(x,y;a,b,c;\lambda)=\binom{n}{v}{}_HB_{n-v}^{(-v)}(x,y;\lambda;a,b,c). \tag{18}$$

证 由式(12)可得

$$\begin{aligned}&\binom{n}{k}{}_HB_{n-k}^{(-v)}(-x,-y;\lambda;a,b,c)\\&=\left[\frac{t^n}{n!}\right]\left(\frac{t}{\lambda b^t-a^t}\right)^{-v}c^{-xt-yt^2}\frac{t^k}{k!}=\frac{n!}{k!}\left[t^{n-k+v}\right]\left(\lambda b^t-a^t\right)^v c^{(-x)t+(-y)t^2}\\&=\frac{n!}{k!}\frac{v!S_v^{n-k+v}(-x,-y;a,b,c;\lambda)}{(n-k+v)!}=\binom{n}{k}\binom{n-k+v}{v}^{-1}S_v^{n-k+v}(-x,-y;a,b,c;\lambda)\end{aligned}$$

再应用替换 $x\to -x$， $y\to -y$ 及 $n-k+v\to n$，故由上式可得所证结论。

在定理 3.2 中取 $a=\lambda=1$， $b=c=e$ 与 $y=0$，可得下述组合恒等式：

推论 3.2 下述公式成立：

$$S_v^n(x)=\binom{n}{v}B_{n-v}^{(-v)}(-x). \tag{19}$$

当 $x=0$ 时， $S(n,v)=\binom{n}{v}B_{n-v}^{(-v)}(0)$ (参考[9]，99 页)。

定理 3.3 令 $a,b,c\in R^+$ $(a\neq b)$， $x,y,z,l\in R$， $\lambda\in C$ 及 $v\in N_0$，那么

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}{}_HE_{n-k}^{(v)}(x,y;\lambda;a,b,c)S_v^k(z,l;a,b,c;\lambda)\\&=\frac{2^v}{v!}\sum_{i=0}^{v}\binom{v}{i}(-1)^i\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}{}_HE_j^{(i)}(x+z,y+l;\lambda;a,b,c)(i\ln a)^{n-j}.\end{aligned} \tag{20}$$

证 令 $h(t)=\frac{1}{v!}\left(\lambda b^t-a^t\right)^v c^{xt+yt^2}$，由式(2)立即可得所证结论。

在定理 3.3 中取 $a=\lambda=1$， $b=c=e$ 与 $y=l=0$，可得下述结果。

推论 3.3 令 $x,z\in R$， $v\in N_0$，那么

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}E_{n-k}^{(v)}(x)S_v^k(z)=\frac{2^v}{v!}\sum_{i=0}^{v}\binom{v}{i}(-1)^i E_n^{(i)}(x+z). \tag{21}$$

特别地，当 $z=0$ 时，

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}E_{n-k}^{(v)}(x)S(k,v)=\frac{2^v}{v!}\sum_{i=0}^{v}\binom{v}{i}(-1)^i E_n^{(i)}(x).$$

定理 3.4 下列关系式成立：

$$_H\mathscr{E}_n^{(v)}(x,y;\lambda;a,b,c)=\sum_{i\ge0}(v)_i 2^{-i}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\left((v-i)\ln a\right)^{n-j}S_i^j(x,y;a,b,c;\lambda). \tag{22}$$

证 由式(15)可以观察到

$$\binom{n}{k}{}_HE_{n-k}^{(-v)}(-x,-y,a,b,c,\lambda)$$

$$=\left[\frac{t^n}{n!}\right]\left(\frac{2}{\lambda b^t+a^t}\right)^{-v}c^{-xt-yt^2}\frac{t^k}{k!}=\frac{n!}{k!}\left[t^{n-k}\right]a^{vt}\sum_{i\ge0}\{v\}_i\frac{\left(\frac{\lambda b^t-a^t}{2a^t}\right)^i}{i!}c^{-xt-yt^2}$$

$$=\frac{n!}{k!}\left[t^{n-k}\right]\sum_{i\ge0}2^{-i}\{v\}_i\sum_{n\ge0}S_i^n(-x,-y;a,b,c;\lambda)\frac{t^n}{n!}\sum_{n\ge0}\frac{\left((v-i)\ln a\right)^n t^n}{n!}$$

$$=\frac{n!}{k!}\sum_{i\ge0}2^{-i}\{v\}_i\sum_{j=0}^{n-k}\binom{n-k}{j}(v-a)^{n-k-j}S_i^j(-x,-y,a,b,c,\lambda).$$

这样，在上式中应用替换 $x\to-x$， $y\to-y$ 及 $n-k\to n$ 就可得所证结论。

在定理 3.4 中取 $a=\lambda=1$， $b=c=\mathrm{e}$ 及 $y=0$，可得下述推论。

推论 3.4 对于 $x\in R$， $v\in N_0$，满足下列恒等式

$$E_n^{-v}(x)=\sum_{i\ge0}\{v\}_i 2^{-i}S_i^n(x). \tag{23}$$

取 $x=0$，则可得

$$E_n^{-v}(0)=\sum_{i=0}^{n}\{v\}_i 2^{-i}S(n,i). \tag{24}$$

推论 3.5 对于 $n\in N_0$，我们有

$$\{v\}_n=2^n\sum_{i=0}^{n}s(n,i)E_i^{-v}(0), \tag{25}$$

证：应用式(23)与反演关系

$$a_n=\sum_{i=0}^{n}S(n,i)b_i\Leftrightarrow b_n=\sum_{i=0}^{n}s(n,i)a_i$$

可得

$$\sum_{i=0}^{n}s(n,i)E_i^{-v}(0)=\frac{\{v\}_n}{2^n},$$

这样，我们可得到所证结论。

4. 总结

本文主要研究了广义λ-array type 多项式，它是经典 array 多项式的推广。首先，我们对广义λ-array type

多项式进行了推广，定义了新一类广义λ-array type 多项式，并利用 Riordan 阵方法讨论了广义λ-array type 多项式的一些性质，得到了一系列相关的组合恒等式。

致　谢

本文由国家自然科学基金项目(11461050)支持。

参考文献 (References)

[1] Comtet, L. (1974) Advanced Combinatorics. D. Reidel Publishing Co., Dordrecht. http://dx.doi.org/10.1007/978-94-010-2196-8

[2] Luo, Q.M. and Srivastava, H.M. (2011) Some Generalizations of the Appostol—Genocchhi Polynomials and the Stirling Numbers of the Second Kind. *Applied Mathematics and Computation*, **217**, 5702-5728. http://dx.doi.org/10.1016/j.amc.2010.12.048

[3] Simsek, Y. (2013) Generating Functions for Generalized Stirling Type Numbers, Array Type Polynomials, Eulerian Type Polynomials and Their Applications. *Fix Point Theory and Applications*, 28 p.

[4] Chang, C.H. and Ha, C.W. (2006) A Multiplication Theorem for the Lerch Zeta Function and Explicit Representations of the Bernoulli and Euler Polynomials. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **315**, 758-767. http://dx.doi.org/10.1016/j.jmaa.2005.08.013

[5] Simsek, Y. (2011) Interpolation Function of Generalized q-Bernstein Type Polynomials and Their Application. *Lecture Notes in Computer Science*, **6920**, 647-662. http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-27413-8_43

[6] 马兴辰, 乌云高娃. 特征多项式的性质及推广[D]: [硕士学位论文]. 呼和浩特: 内蒙古大学, 2014.

[7] 王天明. 近代组合学[M]. 大连: 大连理工大学出版社, 2008.

[8] Wang, W.P. and Wang, T.M. (2008) Generalized Riordan Arrays. *Discrete Mathematics*, **308**, 6466-6500. http://dx.doi.org/10.1016/j.disc.2007.12.037

[9] Roman, S. (1984) Umbral Calculus. Academic Press, Inc., New York.