Pure Mathematics 理论数学, 2016, 6(3), 243-254
Published Online May 2016 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2016.63038

Basic Solution on the Boundary Value Problem of Euler Equation on Semi Infinite Domain

Xiaoqing Wu

College of Science, Southwest Petroleum University, Chengdu Sichuan
Email: wuxiaoqing_swpu@163.com

Received: May 6th, 2016; accepted: May 24th, 2016; published: May 27th, 2016

Abstract

In this paper, the permanent American options determine optimal exercise boundary problem is boiling down to the Euler equation in a semi infinite domain boundary value problem of the basic solution to study. We obtained the expression of the basic solution and the singular point of the basic solution. It is proved that the basic solution is continuous in the semi infinite domain, but the derivative of the solution is discontinuous at the singular point. The maximum value is obtained in the singular point. The singular point of the basic solution is the best implementation point of the permanent American option.

Keywords

Permanent American Option, Optimal Exercise Boundary, Free Boundary Problem, Basic Solution, Euler Equation

尤拉方程在半无界区域的边值问题的基本解

吴小庆

西南石油大学理学院，四川 成都
Email: wuxiaoqing_swpu@163.com

收稿日期：2016年5月6日；录用日期：2016年5月24日；发布日期：2016年5月27日

文章引用：吴小庆. 尤拉方程在半无界区域的边值问题的基本解[J]. 理论数学, 2016, 6(3): 243-254.
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2016.63038

摘　要

本文把永久美式期权确定最佳实施边界的问题归结为尤拉方程在半无界区域的边值问题的基本解来研究。获得了基本解的表达式，同时确定了基本解的奇异点。证明了基本解在半无界区域连续，但解的导数在奇异点发生间断，在奇异点处基本解取最大值。基本解的奇异点就是永久美式期权最佳实施边界点。

关键词

永久美式期权，最佳实施边界，自由边界问题，基本解，尤拉方程

1. 引言

期权是风险管理的核心工具，姜礼尚[1]对期权定价理论作了系统深入的阐述，利用偏微分方程理论和方法对期权理论作深入的定性和定量分析，特别对美式期权，展开了深入的讨论，作了杰出的贡献。在研究美式期权确定最佳实施边界的问题永久看涨或看跌美式期权[1]-[5]确定最佳实施边界的问题是齐次尤拉方程的自由边界问题[1]。本文将该问题归结为半无界区域的边值问题的基本解(同时待求基本解的奇异点)来研究，获得了尤拉方程在半无界区域基本解 u 和它的奇异点 s_0 的表达式。证明了基本解

$$u\in C\left(\overline{\Sigma}\right)\cap C^2\left(\Sigma_1\cup\Sigma_2\right), u\left(s\right)>0, s\in\Sigma$$

且当 $0<s<s_0, u'\left(s\right)>0, u$ 单调增加，在 $s_0<s<\infty, u'\left(s\right)<0, u$ 单调减少，故在奇异点 s_0 处解取正的最大值。基本解的奇异点 s_0 就是永久美式期权最佳实施边界点。

2. 主要结果

问题 1 齐次尤拉方程在半无界区域的边值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\sigma^2}{2}s^2\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}s^2}+\left(r-q\right)s\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}-ru=0, 0<s<\infty\\ \lim\limits_{s\to0^+}|u|<\infty, \lim\limits_{s\to\infty}|u|<\infty\end{cases} \tag{1}$$

问题 1 的求解：

齐次尤拉方程有形如 $u=s^\alpha$ 的特解，将其代入尤拉方程，得到特征方程

$$\frac{\sigma^2}{2}\alpha\left(\alpha-1\right)+\left(r-q\right)\alpha-r=0 \tag{2}$$

它有两个根，记为

$$\alpha=\alpha_\pm=\omega\pm\sqrt{\omega^2+\frac{2r}{\sigma^2}} \tag{3}$$

其中 $\omega=\dfrac{-r+q}{\sigma^2}+\dfrac{1}{2}$

易知

$$\alpha_-<0<\alpha_+ \tag{4}$$

故方程的通解为

$$u = As^{\alpha_+} + Bs^{\alpha_-} \tag{5}$$

其中 A，B 为任意常数。再由边界条件 $\lim\limits_{s\to 0^+}|u| < \infty$ 推出 $B = 0$， $\lim\limits_{s\to\infty}|u| < \infty$ 推出 $A = 0$ 。从而

$$u \equiv 0 \tag{6}$$

引理 1: 齐次尤拉方程的二阶可微连续有界解 $u \in C(\bar{\Sigma}) \cap C^2(\Sigma)$ 不存在。

我们考虑在区域 $\bar{\Sigma}: 0 \le s < \infty$ 内有一个奇异点 s_0 的解的存在性，即是否有的这样的正解：在区域 $\bar{\Sigma}: 0 \le s < \infty$ 内保持解函数连续，且 $u(s) > 0, s \in \Sigma$ ，但存在某点 s_0 (待求)处一阶或二阶导数不连续。即试图寻求连续有界正解 $u \in C(\bar{\Sigma}) \cap C^2(\Sigma_1 \cup \Sigma_2)$ 。

其中： $\Sigma: 0 < s < \infty, \bar{\Sigma}: 0 \le s < \infty, \Sigma_1: 0 < s < s_0, \Sigma_2: s_0 < s < \infty$ 。

问题 2 求 $\{u, s_0\}$ 使其满足

$$\begin{cases} \dfrac{\sigma^2}{2} s^2 \dfrac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}s^2} + (r-q) s \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} - ru = -\dfrac{\gamma_\delta \sigma^2 s_0^2}{2} \delta(s - s_0), 0 < s < \infty \\ u(s_0^-) = u(s_0^+) = \varphi(s_0) \\ \lim\limits_{s\to 0^+} u = 0, \lim\limits_{s\to\infty} u = 0 \end{cases} \tag{7}$$

其中： γ_δ 为常数， $\varphi(s)$ 为 Σ 上的非负连续函数， $\delta(s)$ 为 Dirac 函数。

该问题的解称为基本解，Dirac 函数 $\delta(s - s_0)$ 中的 s_0 称为基本解的奇异点。在奇异点 s_0 处要求保证解函数连续。

为方便起见，把问题 2 表为如下等价形式；

问题 2 求 $\{u, s_0\}$ 使其满足

$$\begin{cases} Lu = -\gamma_\delta p(s_0) \delta(s - s_0), 0 < s < \infty \\ u(s_0^-) = u(s_0^+) = \varphi(s_0) \\ \lim\limits_{s\to 0^+} u = 0, \lim\limits_{s\to\infty} u = 0 \end{cases} \tag{7$'$}$$

$$\text{微分砯子 } L = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(p \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right) - Q \text{，}$$

其中 $Q = \dfrac{2r}{\sigma^2} s^{\frac{2(r-q)}{\sigma^2} - 2}, p = s^{\frac{2(r-q)}{\sigma^2}}$ 。

求解问题 2：

当 $s \ne s_0$ 时， $\delta(s - s_0) \equiv 0, s \in \Sigma_1 \cup \Sigma_2$

即知在 $s \in \Sigma_1$ 与 $s \in \Sigma_2$ 满足齐次尤拉方程，故通解为

$$u = \begin{cases} A_1 s^{\alpha_+} + B_1 s^{\alpha_-}, s \in \Sigma_1 \\ A_2 s^{\alpha_+} + B_2 s^{\alpha_-}, s \in \Sigma_2 \end{cases} \tag{8}$$

其中 A_1, B_1, A_2, B_2 是任意常数。

1) 当 $s \in \Sigma_1$， $u = A_1 s^{\alpha_+} + B_1 s^{\alpha_-}, s \in \Sigma_1$ 由边界条件

$\lim\limits_{s\to 0^+} u = 0$ 推出 $B_1 = 0$， $u(s_0^-) = A_1 s_0^{\alpha_+}, A_1 = u(s_0^-) s_0^{-\alpha_+}$

得到

$$u(s)=\varphi(s_0)s_0^{-\alpha_+}s^{\alpha_+} \tag{9}$$

$$u'(s)=\alpha_+\varphi(s_0)s_0^{-\alpha_+}s^{\alpha_+-1}>0 \tag{10}$$

$$u'(s_0^-)=\alpha_+\varphi(s_0)s_0^{-1} \tag{11}$$

2) 当 $s\in\Sigma_2$， $u(s)=A_2s^{\alpha_+}+B_2s^{\alpha_-}$ 由边界条件
$\lim\limits_{s\to\infty}u=0$ 推出 $A_2=0$， $u(s)=B_2s^{\alpha_-}$， $u(s_0^+)=B_2s^{\alpha_-}, B_2=u(s_0^+)s^{-\alpha_-}$，
从而

$$u(s)=\varphi(s_0)s^{-\alpha_-}s^{\alpha_-} \tag{12}$$

$$u'(s)=\alpha_-\varphi(s_0)s_0^{-\alpha_-}s^{\alpha_--1}<0 \tag{13}$$

由(11)，(13)有

$$\begin{gathered}u'(s_0^-)-u'(s_0^+)=\alpha_+\varphi(s_0)s_0^{-1}-\alpha_-\varphi(s_0)s_0^{-1}=(\alpha_+-\alpha_-)\varphi(s_0)s_0^{-1}\\ \frac{u'(s_0^-)-u'(s_0^+)}{\varphi(s_0)s_0^{-1}}=\alpha_+-\alpha_-\end{gathered} \tag{14}$$

记

$$u'(s_0^-)-u'(s_0^+)\cong\gamma \tag{15}$$

于是

$$s_0=\frac{(\alpha_+-\alpha_-)\varphi(s_0)}{\gamma} \tag{16}$$

$$u(s)=\begin{cases}u_1(s),s\in\Sigma_1\\ u_2(s),s\in\Sigma_2\end{cases}=\begin{cases}\varphi(s_0)s_0^{-\alpha_+}s^{\alpha_+},s\in\Sigma_1\\ \varphi(s_0)s_0^{-\alpha_-}s^{\alpha_-},s\in\Sigma_2\end{cases} \tag{17}$$

$$u_1(s)=\varphi(s_0)s_0^{-\alpha_+}s^{\alpha_+},Lu_1(s)=0,s\in\Sigma_1 \tag{18}$$

$$u_2(s)=\varphi(s_0)s_0^{-\alpha_-}s^{\alpha_-},Lu_2(s)=0,s\in\Sigma_2 \tag{19}$$

$$u'(s)=\begin{cases}\alpha_+\varphi(s_0)s_0^{-\alpha_+}s^{\alpha_+-1}>0,s\in\Sigma_1\\ \alpha_-\varphi(s_0)s_0^{-\alpha_-}s^{\alpha_--1}<0,s\in\Sigma_2\end{cases} \tag{20}$$

下证 由(16)，(17)给出的 $\{u,s_0\}$ 满足问题 2 当且仅当 $\gamma=\gamma_\delta$。

记 $C_0^\infty(\Sigma)$ 为 Σ 上具有紧支集的无穷可微函数空间，它作为基本函数空间。K' 为基本函数空间上的广义函数空间。引入对偶积

$$\langle w,v\rangle=\int_0^\infty w(s)v(s)\mathrm{d}s,\ \forall v\in C_0^\infty(\Sigma),\ \forall w\in K' \tag{21}$$

对 $\forall u\in K'$，有

$$\langle Lu,v\rangle=\langle u,Lv\rangle,\forall v\in C_0^\infty(\Sigma) \tag{22}$$

于是

$$
\begin{aligned}
&\langle Lu,v\rangle=\langle u,Lv\rangle\\
&=\int_0^{\infty}u(s)Lv\mathrm{d}s=\int_0^{\infty}u(s)\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(p\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right)-Q\right]v\mathrm{d}s\\
&=\int_0^{\infty}u(s)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(p\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}\right)\mathrm{d}s-\int_0^{\infty}u(s)Q(s)v(s)\mathrm{d}s\\
&=\int_0^{s_0^-}u(s)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(p\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}\right)\mathrm{d}s+\int_{s_0^+}^{\infty}u(s)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(p\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}\right)\mathrm{d}s-\int_0^{\infty}u(s)Q(s)v(s)\mathrm{d}s\\
&=\int_0^{s_0^-}u_1(s)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(p\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}\right)\mathrm{d}s+\int_{s_0^+}^{\infty}u_2(s)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(p\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}\right)\mathrm{d}s-\int_0^{\infty}u(s)Q(s)v(s)\mathrm{d}s\\
&=u_1(s)\left(p\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}\right)\Bigg|_0^{s_0^-}-\int_0^{s_0^-}\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}s}(s)\left(p\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}\right)\mathrm{d}s+u_2(s)\left(p\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}\right)\Bigg|_{s_0^+}^{\infty}-\int_{s_0^+}^{\infty}\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}s}(s)\left(p\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}\right)\mathrm{d}s-\int_0^{\infty}u(s)Q(s)v(s)\mathrm{d}s\\
&=u_1(s)\left(p\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}\right)\Bigg|_0^{s_0^-}-\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}s}(s)pv\Bigg|_0^{s_0^-}+\int_0^{s_0^-}vLu_1\mathrm{d}s+u_2(s)\left(p\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}\right)\Bigg|_{s_0^+}^{\infty}-\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}s}pv\Bigg|_{s_0^+}^{\infty}+\int_{s_0^+}^{\infty}vLu_2\mathrm{d}s
\end{aligned}
$$

利用(18)和(19)两式即有 $\int_0^{s_0^-}vLu_1\mathrm{d}s=0,\int_{s_0^+}^{\infty}vLu_2\mathrm{d}s=0$，于是得到

$$
\langle Lu,v\rangle=\langle u,Lv\rangle=\left[u_1(s_0^-)-u_2(s_0^+)\right]\left(p\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}\right)(s_0)-\left[\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}s}(s_0^-)-\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}s}(s_0^+)\right]p(s_0)v(s_0),
$$

再由 $u_1(s_0^-)=u_2(s_0^+)$ 和(15)式即有

$$
\langle Lu,v\rangle=\langle u,Lv\rangle=-\gamma p(s_0)v(s_0),
$$

即得

$$
\langle Lu,v\rangle=\langle -\gamma p(s_0)\delta(s-s_0),v\rangle,\forall v\in C_0^{\infty}(\Sigma) \tag{23}
$$

故有

$$
Lu=-\gamma p(s_0)\delta(s-s_0) \tag*{(23)$'$}
$$

对照(7)′中方程：

$$
Lu=-\gamma_{\delta}p(s_0)\delta(s-s_0)
$$

即知 $\gamma=\gamma_{\delta}$

从而有

$$
u'(s_0^-)-u'(s_0^+)\cong\gamma_{\delta} \tag{24}
$$

定义 1 基本解在 s_0 点一阶导数满足 $u'(s_0^-)-u'(s_0^+)\cong\gamma_{\delta}$，称 γ_{δ} 为基本解在 s_0 点的跳跃度。

定理 1 (基本解存在定理)当 $\gamma_{\delta}>0$，$\varphi(s_0)>0$，问题 2 的解 $\{u,s_0\}$ 存在，

且有精确解的表达式

$$
u(s)=\begin{cases}\varphi(s_0)s_0^{-\alpha_+}s^{\alpha_+},s\in\Sigma_1\\ \varphi(s_0)s_0^{-\alpha_-}s^{\alpha_-},s\in\Sigma_2\end{cases},s_0=\frac{(\alpha_+-\alpha_-)\varphi(s_0)}{\gamma_{\delta}} \tag{25}
$$

或

$$u(s)=\begin{cases}\dfrac{\gamma_\delta}{\alpha_+-\alpha_-}s_0^{1-\alpha_+}s^{\alpha_+},s\in\Sigma_1\\ \dfrac{\gamma_\delta}{\alpha_+-\alpha_-}s_0^{1-\alpha_-}s^{\alpha_-},s\in\Sigma_2\end{cases},s_0=\frac{(\alpha_+-\alpha_-)\varphi(s_0)}{\gamma_\delta} \tag{25$'$}$$

定理 2 (基本解性质定理)当$\gamma_\delta>0$，$\varphi(s_0)>0$，则

1) 问题 2 的基本解为连续有界正解$u\in C(\bar{\Sigma})\cap C^2(\Sigma_1\cup\Sigma_2)$，但 $u\notin C^1(\Sigma),u\notin C^2(\Sigma)$，且解函数在$s_0$点一阶导数的跳跃度为$\gamma_\delta$。

2) 问题 2 的基本解连续有界正解由$\varphi(s_0)$和γ_δ的取值唯一确定，且解函数在s_0点取最大值。

证明：由定理 1 问题 2 的基本解$u\in C(\bar{\Sigma})\cap C^2(\Sigma_1\cup\Sigma_2)$，由$\varphi(s_0)>0$有$u(s)>0,s\in\Sigma$；由$\gamma_\delta>0$，$u'(s_0^-)\neq u'(s_0^+)$，$u'$点$s_0$处一阶，二阶导数不连续，故$u\notin C^1(\Sigma),u\notin C^2(\Sigma)$。

由(20)即知在$0<s<s_0,u'(s)>0,u$严格单调增加；在$s_0<s<\infty,u'(s)<0,u$严格单调减少，从而解函数在点s_0取最大值。

记$u'(s_0^-)\cong\gamma_-,u'(s_0^+)\cong\gamma_+$，由(24)有$\gamma_\delta=\gamma_--\gamma_+$。

定理 3 **(**基本解不同表示定理)当$\varphi(s_0)$取值确定时，问题 2 的基本解由γ_δ的取值唯一确定，也可由$\gamma_->0$或$\gamma_+<0$之一的取值唯一确定($\gamma_\delta>0$，$\gamma_->0$，$\gamma_+<0$三者中任一个确定其它两个)；问题 2 的基本解也可由$\gamma_->0$或$\gamma_+<0$表示，即有

$$u(s)=\begin{cases}\dfrac{\gamma_-}{\alpha_+}s_0^{1-\alpha_+}s^{\alpha_+},s\in\Sigma_1\\ \dfrac{\gamma_+}{\alpha_-}s_0^{1-\alpha_-}s^{\alpha_-},s\in\Sigma_2\end{cases} \tag{26}$$

$$s_0=\frac{\alpha_-}{\gamma_+}\varphi(s_0)=\frac{\alpha_+}{\gamma_-}\varphi(s_0) \tag{27}$$

其相容性条件为

$$\frac{\alpha_+-\alpha_-}{\gamma_\delta}=\frac{\alpha_+}{\gamma_-}=\frac{\alpha_-}{\gamma_+},\ \gamma_+<0<\gamma_- \tag{28}$$

证明：由$\gamma_\delta=\gamma_--\gamma_+$和(25)即知

$$\gamma_-=\alpha_+\varphi(s_0)s_0^{-1}\text{ 故有}$$

$$s_0=\alpha_+\varphi(s_0)\gamma_-^{-1}=\frac{\alpha_+\varphi(s_0)}{\gamma_-},\quad \gamma_+=\alpha_-\varphi(s_0)s_0^{-1},\quad s_0=\frac{\alpha_-\varphi(s_0)}{\gamma_+}$$

从而有

$$s_0=\frac{\alpha_+-\alpha_-}{\gamma_\delta}\varphi(s_0)=\frac{\alpha_+\varphi(s_0)}{\gamma_-}=\frac{\alpha_-\varphi(s_0)}{\gamma_+} \tag{29}$$

故有

$$\frac{\alpha_+-\alpha_-}{\gamma_\delta}=\frac{\alpha_+}{\gamma_-}=\frac{\alpha_-}{\gamma_+} \tag{30}$$

$$\gamma_-=\frac{\alpha_+}{\alpha_+-\alpha_-}\gamma_\delta>0,\gamma_+=\frac{\alpha_-}{\alpha_+-\alpha_-}\gamma_\delta<0,\frac{\gamma_+}{\gamma_-}=\frac{\alpha_-}{\alpha_+} \tag{31}$$

即有

$$\begin{cases} \gamma_- = \dfrac{\alpha_+}{\alpha_+ - \alpha_-}\gamma_\delta > 0 \\ \gamma_+ = \dfrac{\alpha_-}{\alpha_+ - \alpha_-}\gamma_\delta < 0 \\ \gamma_\delta = \gamma_- - \gamma_+ > 0 \\ \dfrac{\gamma_+}{\gamma_-} = \dfrac{\alpha_-}{\alpha_+} < 0 \end{cases} \tag{32}$$

由(32)即知γ_δ，γ_-，γ_+三者任一个可确定其它两个。

附注 2 基本解在奇异点s_0处左、右导数由正变负：$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}\left(s_0^-\right) > 0$，$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}\left(s_0^+\right) < 0$。

推论 1 当$\alpha_- < \gamma_+ < 0$（或$\alpha_+ > \gamma_- > 0$），$\dfrac{\gamma_+}{\gamma_-} = \dfrac{\alpha_-}{\alpha_+}$且$u(s_0) = |K - s_0| > 0$，则问题 2 的基本解

$$1)\ 当 K < s_0, u(s) = \begin{cases} \dfrac{\gamma_-}{\alpha_+} s_0^{1-\alpha_+} s^{\alpha_+}, s \in (0, s_0), s_0 = \dfrac{\alpha_+ K}{\alpha_+ - \gamma_-} \\ \dfrac{\gamma_+}{\alpha_-} s_0^{1-\alpha_-} s^{\alpha_-}, s \in (s_0, \infty), s_0 = \dfrac{\alpha_- K}{\alpha_- - \gamma_+} \end{cases} \tag{33}$$

$$2)\ 当 K > s_0, u(s) = \begin{cases} \dfrac{\gamma_-}{\alpha_+} s_0^{1-\alpha_+} s^{\alpha_+}, s \in (0, s_0), s_0 = \dfrac{\alpha_+ K}{\gamma_- + \alpha_+} \\ \dfrac{\gamma_+}{\alpha_-} s_0^{1-\alpha_-} s^{\alpha_-}, s \in (s_0, \infty), s_0 = \dfrac{\alpha_- K}{\gamma_+ + \alpha_-} \end{cases} \tag{34}$$

其中$\alpha = \alpha_\pm = \omega \pm \sqrt{\omega^2 + \dfrac{2r}{\sigma^2}}$，$\omega = \dfrac{-r+q}{\sigma^2} + \dfrac{1}{2}$。

证明： 由(29)即有$s_0 = \dfrac{\alpha_-}{\gamma_+}|K - s_0| = \dfrac{\alpha_+}{\gamma_-}|K - s_0|$，于是

1) $K < s_0, s_0 = -\dfrac{\alpha_-}{\gamma_+}(K - s_0) = \dfrac{\alpha_-}{\gamma_+}s_0 - \dfrac{\alpha_- K}{\gamma_+}$

即有

$$s_0 = \frac{\alpha_-}{\gamma_+}s_0 - \frac{\alpha_- K}{\gamma_+}$$

$$\frac{\alpha_- K}{\gamma_+} = \left(\frac{\alpha_-}{\gamma_+} - 1\right)s_0$$

$$s_0 = \frac{\alpha_- K}{\gamma_+\left(\dfrac{\alpha_-}{\gamma_+} - 1\right)} = \frac{\alpha_- K}{\alpha_- - \gamma_+}$$

于是$s_0 = \dfrac{\alpha_- K}{\alpha_- - \gamma_+}$，同理可得$s_0 = \dfrac{\alpha_+ K}{\alpha_+ - \gamma_-}$。

2) $K > s_0$，同理可得$s_0 = \dfrac{\alpha_+ K}{\gamma_- + \alpha_+}, s_0 = \dfrac{\alpha_- K}{\gamma_+ + \alpha_-}$。

于是

$$K<s_0,\begin{cases} s_0=\dfrac{\alpha_+K}{\alpha_+-\gamma_-}, s\in(0,s_0), \\ s_0=\dfrac{\alpha_-K}{\alpha_--\gamma_+}, s\in(s_0,\infty), \end{cases} \tag{35}$$

$$K>s_0,\begin{cases} s_0=\dfrac{\alpha_+K}{\gamma_-+\alpha_+}, s\in(0,s_0), \\ s_0=\dfrac{\alpha_-K}{\gamma_++\alpha_-}, s\in(s_0,\infty), \end{cases} \tag{36}$$

由(35)，(36)和(26)即得(33)，(34)。

问题 2.1 求 $\{u,s_0\}$ 使得

$$\begin{cases} \dfrac{\sigma^2}{2}s^2\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}s^2}+(r-q)s\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}-ru=0, 0<s<s_0 \\ u(s_0)=|K-s_0| \\ u'(s_0^-)=\gamma_- \\ \lim\limits_{s\to0^+}u=0 \end{cases} \tag{37}$$

问题 2.2 求 $\{u,s_0\}$ 使得

$$\begin{cases} \dfrac{\sigma^2}{2}s^2\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}s^2}+(r-q)s\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}-ru=0, s_0<s<\infty \\ u(s_0)=|K-s_0| \\ u'(s_0^+)=\gamma_+ \\ \lim\limits_{s\to\infty}u=0 \end{cases} \tag{38}$$

定义 2 问题 2.1 与问题 2.2 两自由边界问题同时有解，系指两自由边界问题不仅都有解，而且所确定的自由边界 s_0 是相同的。

推论 2 当 $\alpha_-<\gamma_+<0$ (或 $\alpha_+>\gamma_->0$)，$\dfrac{\gamma_+}{\gamma_-}=\dfrac{\alpha_-}{\alpha_+}$ 且 $u(s_0)=|K-s_0|>0$，问题 2.1 与问题 2.2 两自由边界问题同时有解，且问题 2.1 的解由(39)，问题 2.2 的解由(40)给出。

$$u(s)=\frac{\gamma_-}{\alpha_+}s_0^{1-\alpha_+}s^{\alpha_+}, s\in(0,s_0), s_0=\begin{cases} \dfrac{\alpha_+K}{\gamma_-+\alpha_+}, K>s_0 \\ \dfrac{\alpha_+K}{\alpha_+-\gamma_-}, K<s_0 \end{cases} \tag{39}$$

$$u(s)=\frac{\gamma_+}{\alpha_-}s_0^{1-\alpha_-}s^{\alpha_-}, s\in(s_0,\infty), s_0=\begin{cases} \dfrac{\alpha_-K}{\gamma_++\alpha_-}, K>s_0 \\ \dfrac{\alpha_-K}{\alpha_--\gamma_+}, K<s_0 \end{cases} \tag{40}$$

附注 3 在条件 $\dfrac{\gamma_+}{\gamma_-}=\dfrac{\alpha_-}{\alpha_+}$ 下(39)，(40)所给出的 s_0 是相同的。

推论 3 问题 2.1 在 $0<s<s_0$ 的正解 $u\in C(0\le s<s_0)\cap C^2(0<s<s_0)$，且

$$1)\ 若 K<s_0，\ \alpha_+>\gamma_->0，\ u(s)=\frac{\gamma_-}{\alpha_+}s_0^{1-\alpha_+}s^{\alpha_+},s_0=\frac{\alpha_+K}{\alpha_+-\gamma_-},s_0\in(K,\infty) \tag{41}$$

$$2)\ 若 K>s_0,\gamma_->0,u(s)=\frac{\gamma_-}{\alpha_+}s_0^{1-\alpha_+}s^{\alpha_+},s_0=\frac{\alpha_+K}{\gamma_-+\alpha_+},s_0\in(0,K) \tag{42}$$

证明：当 $K<s_0$，$\alpha_+>\gamma_->0$ 时，由推论 2 中(39)有 $s_0=\frac{\alpha_+K}{\alpha_+-\gamma_-},\frac{\mathrm{d}s_0}{\mathrm{d}\gamma_-}=\frac{\alpha_+K}{(\alpha_+-\gamma_-)^2}>0$，$s_0$ 是自变量 γ_- 在区间 $(0,\alpha_+)$ 上的严格增函数，故 $s_0\in(K,\infty)$，即1)得证；当 $K>s_0,\gamma_->0$ 时，由推论 2 中(39)，$s_0=\frac{\alpha_+K}{\gamma_-+\alpha_+},\frac{\mathrm{d}s_0}{\mathrm{d}\gamma_-}=\frac{-\alpha_+K}{(\gamma_-+\alpha_+)^2}<0$，$s_0$ 是自变量 γ_- 在区间 $(0,\alpha_+)$ 上的严格减函数，$s_0\in(0,K)$，即 2)得证。

推论 4 问题 2.2 在 $s_0\le s<\infty$ 的正解 $u\in C(s_0\le s<\infty)\cap C^2(s_0<s<\infty)$，且

$$1)\ 当 K<s_0,\alpha_-<\gamma_+<0，\ 正解\ u(s)=\frac{\gamma_+}{\alpha_-}s_0^{1-\alpha_-}s^{\alpha_-},s_0=\frac{\alpha_-K}{\alpha_--\gamma_+},s_0\in(K,\infty) \tag{43}$$

$$2)\ K>s_0,\gamma_+<0，\ 正解\ u(s)=\frac{\gamma_+}{\alpha_-}s_0^{1-\alpha_-}s^{\alpha_-},s_0=\frac{\alpha_-K}{\gamma_++\alpha_-},s_0\in(0,K) \tag{44}$$

证明：由推论 2 即得。

推论 5 问题 2 中若 $u(s_0)=|K-s_0|$，

1) 当 $K<s_0,\gamma_\delta\in(0,\alpha_+-\alpha_-)$，则 $u(s_0),s_0$ 都是 γ_δ 在区间 $(0,\alpha_+-\alpha_-)$ 上的严格增函数；$s_0\in(K,\infty)$；

2) 当 $K>s_0,\gamma_\delta\in(0,\infty)$，则 $u(s_0)$ 是 γ_δ 在区间 $(0,\infty)$ 上的严格增函数，s_0 是 γ_δ 在区间 $(0,\infty)$ 上的严格减函数，$s_0\in(0,K)$。

证明：由(25)有 $u(s_0)=|K-s_0|,s_0=\frac{\alpha_+-\alpha_-}{\gamma_\delta}|K-s_0|$，当 $K<s_0,\gamma_\delta\in(0,\alpha_+-\alpha_-)$ 时，

$$u(s_0)=s_0-K,s_0=\frac{(\alpha_+-\alpha_-)K}{\alpha_+-\alpha_--\gamma_\delta},$$

$$\frac{\mathrm{d}s_0}{\mathrm{d}\gamma_\delta}=\frac{(\alpha_+-\alpha_-)K}{(\alpha_+-\alpha_--\gamma_\delta)^2}>0,\frac{\mathrm{d}u(s_0)}{\mathrm{d}\gamma_\delta}=\frac{\mathrm{d}u(s_0)}{\mathrm{d}s_0}\frac{\mathrm{d}s_0}{\mathrm{d}\gamma_\delta}=\frac{\mathrm{d}s_0}{\mathrm{d}\gamma_\delta}>0$$

故 $u(s_0)$ 和 s_0 是 γ_δ 在区间 $(0,\alpha_+-\alpha_-)$ 上的严格增函数，$s_0\in(K,\infty)$；当

$$K>s_0,s_0=\frac{(\alpha_+-\alpha_-)K}{(\gamma_\delta+\alpha_+-\alpha_-)},u(s_0)=K-s_0$$

$$\frac{\mathrm{d}s_0}{\mathrm{d}\gamma_\delta}=\frac{-(\alpha_+-\alpha_-)K}{(\gamma_\delta+\alpha_+-\alpha_-)^2}<0,\frac{\mathrm{d}u(s_0)}{\mathrm{d}\gamma_\delta}=\frac{\mathrm{d}u(s_0)}{\mathrm{d}s_0}\frac{\mathrm{d}s_0}{\mathrm{d}\gamma_\delta}=\frac{-(\alpha_+-\alpha_-)K}{(\gamma_\delta+\alpha_+-\alpha_-)^2}(-1)=\frac{(\alpha_+-\alpha_-)K}{(\gamma_\delta+\alpha_+-\alpha_-)^2}>0$$

故 $u(s_0)$ 是 γ_δ 在区间 $(0,\infty)$ 上的严格增函数，s_0 是 γ_δ 在区间 $(0,\infty)$ 上的严格减函数，$s_0\in(0,K)$。

奇异点 s_0 和所取最大值 $u(s_0)\cong u_{s_0}$ 构成的二维点 (s_0,u_{s_0})，由 γ_δ 唯一确定。(s_0,u_{s_0}) 依赖于 $\gamma_\delta\in(0,\infty)$ 的取值。由推论 5 即知

1) 当 $K<s_0$ 时，$(s_0,u_{s_0})\in\{(s,w)\mid K<s<\infty,w=s-K\}$；

2) 当 $K>s_0$ 时，$(s_0,u_{s_0})\in\{(s,w)\mid 0<s<K,w=K-s\}$。

3. 上述结果的验证

例 1 永久美式看涨期权价格自由边界模型(A) (参考文献[1]中 125 页)

求 $\{u(s),s_0\}$，使得

$$\begin{cases}\dfrac{\sigma^2}{2}s^2\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}s^2}+(r-q)s\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}-ru=0,0<s<s_0\\ u(s_0)=s_0-K>0\\ u'(s_0^-)=1\\ \lim\limits_{s\to0^+}u=0\end{cases}\tag{45}$$

用推论 3 的结论当 $K<s_0,u(s)=\dfrac{\gamma_-}{\alpha_+}s_0^{1-\alpha_+}s^{\alpha_+},s_0=\dfrac{\alpha_+K}{\alpha_+-\gamma_-}$，

令 $\gamma_-=1$，即得

$$u(s)=\frac{1}{\alpha_+}s_0^{1-\alpha_+}s^{\alpha_+}\tag{46}$$

$$s_0=\frac{K}{1-1/\alpha_+}\tag{47}$$

将(41)代入(40)即有

$$u(s)=\frac{1}{\alpha_+}\left(\frac{K}{1-1/\alpha_+}\right)^{1-\alpha_+}s^{\alpha_+}\tag{48}$$

立即可得永久美式看涨期权模型(A)的连续有界正解 $u\in C(0\le s\le s_0)\cap C^2(0<s<s_0)$，且可表示为

$$u(s)=\frac{1}{\alpha_+}\left(\frac{K}{1-1/\alpha_+}\right)^{1-\alpha_+}s^{\alpha_+},s_0=\frac{K}{1-1/\alpha_+}\tag{49}$$

其中：$\alpha_+=\omega+\sqrt{\omega^2+\dfrac{2r}{\sigma^2}}$， $\omega=\dfrac{-r+q}{\sigma^2}+\dfrac{1}{2}$。

即应用我们获得的基本解和它的奇异点 s_0 的表达式在取定 $\gamma_-=1$ 时获得了永久美式看涨期权自由边界模型(A)在区间 $0<s<s_0$ 上的一致结果。

例 2 永久美式看跌期权自由边界模型(B) (参考文献[1]中 123 页)

求 $\{u(s),s_0\}$，使得

$$\begin{cases}\dfrac{\sigma^2}{2}s^2\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}s^2}+(r-q)s\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}-ru=0,s_0<s<\infty\\ u(s_0)=K-s_0>0\\ u'(s_0^+)=-1\\ \lim\limits_{s\to\infty}u=0\end{cases}\tag{50}$$

由推论 4， $K>s_0$， 有 $u(s)=\dfrac{\gamma_+}{\alpha_-}s_0^{1-\alpha_-}s^{\alpha_-},s_0=\dfrac{\alpha\_K}{\gamma_++\alpha_-}$

再令 $\gamma_+=-1$，即得 $u(s)=\frac{-1}{\alpha_-}s_0^{1-\alpha_-}s^{\alpha_-},s_0=\frac{\alpha_- K}{-1+\alpha_-}$

即得 $s_0=\frac{K}{1-1/\alpha_-}$， $u(s)=\frac{-1}{\alpha_-}\left(\frac{K}{1-1/\alpha_-}\right)^{1-\alpha_-}s^{\alpha_-}$

永久美式看跌期权模型(B)存在连续有界正解 $u\in C(s_0\le s<\infty)\cap C^2(s_0<s<\infty)$，且可表示为

$$u(s)=\frac{-1}{\alpha_-}\left(\frac{K}{1-1/\alpha_-}\right)^{1-\alpha_-}s^{\alpha_-},s_0=\frac{K}{1-1/\alpha_-} \tag{51}$$

其中

$$\alpha_-=\omega-\sqrt{\omega^2+\frac{2r}{\sigma^2}},\ \omega=\frac{-r+q}{\sigma^2}+\frac{1}{2}\text{。}$$

即应用我们获得的基本解和它的奇异点 s_0 的表达式在取定 $\gamma_+=-1$ 时获得了永久美式看跌期权自由边界模型(B)在区间 $s_0<s<\infty$ 上的一致结果。

例 3 永久美式看跌期权定价自由边界模型(C) (参考文献[1]中 120 页)

求 $\{u(s),s_0\}$，使得

$$\begin{cases}\frac{\sigma^2}{2}s^2\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}s^2}+rs\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}-ru=0,s_0<s<\infty\\ u(s_0)=K-s_0>0\\ u'\left(s_0^+\right)=-1\\ \lim\limits_{s\to\infty}u=0\end{cases} \tag{52}$$

问题 2.2 中当 $q=0$ 的情形，由推论 4，当 $K>s_0$，

$u(s)=\frac{\gamma_+}{\alpha_-}s_0^{1-\alpha_-}s^{\alpha_-},s_0=\frac{\alpha_- K}{\gamma_++\alpha_-}$，这里 $\gamma_+=-1$，则有

$u(s)=\frac{-1}{\alpha_-}s_0^{1-\alpha_-}s^{\alpha_-},s_0=\frac{\alpha_- K}{-1+\alpha_-}$，下面再计琮 α_-：由(3)

$$\alpha=\alpha_\pm=\omega\pm\sqrt{\omega^2+\frac{2r}{\sigma^2}},\text{其中}\ \omega=\frac{-r+q}{\sigma^2}+\frac{1}{2}$$

当 $q=0$ 时，

$$\omega=\frac{-r+\frac{\sigma^2}{2}}{\sigma^2},\alpha_-=\omega-\sqrt{\omega^2+\frac{2r}{\sigma^2}},\omega=\frac{1}{2}-\frac{r}{\sigma^2},\alpha_-=-\frac{2r}{\sigma^2}$$

$$u(s)=\frac{\sigma^2}{2r}s_0^{1-\alpha_-}s^{\alpha_-},s_0=\frac{2rK}{\sigma^2+2r},\alpha_-=-\frac{2r}{\sigma^2}$$

$$u(s)=\frac{\sigma^2}{2r}\left(\frac{2rK}{\sigma^2+2r}\right)^{1+\frac{2r}{\sigma^2}}s^{-\frac{2r}{\sigma^2}},s_0=\frac{2rK}{\sigma^2+2r},\alpha_-=-\frac{2r}{\sigma^2}$$

永久美式期权模型(C)在 $s_0<s<\infty$ 上存在连续有界正解 $u\in C\left(\overline{\Sigma}_1\right)\cap C^2\left(\Sigma_1\right)$，且可表示为

$$u(s)=\frac{\sigma^2}{2r}\left(\frac{2rK}{\sigma^2+2r}\right)^{1+\frac{2r}{\sigma^2}}s^{-\frac{2r}{\sigma^2}},s_0=\frac{2rK}{\sigma^2+2r} \tag{53}$$

即应用我们获得的基本解和它的奇异点 s_0 的表达式在取定 $\gamma_+ = -1$ 时所得结论与永久美式看跌期权模型(C)在区间 $s_0 < s < \infty$ 上是一致的。

4. 结论

1) 对任意给定的 $\gamma_\delta \in (0,\infty)$，$\varphi(s_0) \in (0,\infty)$，问题 2 的基本解 $u(s)$ 和基本解的奇异点 s_0 可同时得到。基本解在奇异点 s_0 处取最大值 u_{s_0}。基本解的奇异点就是永久美式期权最佳实施边界点。

2) 奇异点 s_0 的确定：基本解在该点左、右导数由正变负，即 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}(s_0^-) > 0$，$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}(s_0^+) < 0$。

3) 奇异点 s_0 的取值范围：若 $u_{s_0} = |K - s_0|$，

① 当 $K < s_0$ 时，$(s_0, u_{s_0}) \in \{(s,w) \mid K < s < \infty, w = s - K\}$；

② 当 $K > s_0$ 时，$(s_0, u_{s_0}) \in \{(s,w) \mid 0 < s < K, w = K - s\}$。

由于期权价格函数 $u = u(s)$ 依赖于 γ_δ 在 $(0,\infty)$ 的取值，不同的 γ_δ 的取值得到不同的期权价格曲线，实际上我们得了期权价格曲线族 $\Upsilon \cong \{u \mid u = u(s;\gamma_\delta), \forall \gamma_\delta \in (0,\infty)\}$。具体的期权价格曲线最佳实施边界点的确定依赖于该期权价格曲线的运行趋势，依赖于期权价格曲线在 s_0 点的跳跃度 γ_δ。问题 2 考虑期权价格曲线在区域 $\sum: 0 < s < \infty$ 内仅有一个奇异点 s_0 的情形，若在区域 $\sum: 0 < s < \infty$ 内存在多个奇异点的情形，我们在另文进行了研究，得到了一些新结论。

参考文献 (References)

[1] 姜礼尚. 期权定价的数学模型和方法[M]. 第二版. 北京: 高等教育出版社, 2008.

[2] 姜礼尚, 徐承龙, 任学敏, 李少华. 金融数学丛书: 金融衍生产品定价的数学模型与案例分析[M]. 第2版. 北京: 高等教育出版社, 2013.

[3] 任学敏, 魏嵬, 姜礼尚, 梁进. 信用风险估值的数学模型与案例分析[M]. 北京: 高等教育出版社, 2014.

[4] 姜礼尚. 金融衍生产品定价的数学模型与案例分析[M]. 北京: 高等教育出版社, 2008.

[5] 黄文礼, 李胜宏. 分数布朗运动驱动下带比例交易成本的期权定价[J]. 高校应用数学学报, 2011.