Pure Mathematics 理论数学, 2019, 9(3), 308-315
Published Online May 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2019.93041

Existence of Solution for One Class of p-Laplacian Problem

Lei Li

Department of Mathematics and Statistics, Guangxi Normal University, Guilin Guangxi
Email: 986389480@qq.com

Received: Apr. 16th, 2019; accepted: Apr. 27th, 2019; published: May 9th, 2019

Abstract

In this paper, we study the existence of weak solutions for the Dirichlet problems for one class of nonlinear p-Laplacian equations. Our proof combines the presence of sub and supersolution with the pseudomonotone operators theory.

Keywords

Sub and Supersolution, Pseudomonotone Operators Theory, p-Laplacian Equations

一类p-Laplace方程解的存在性问题

李　磊

广西师范大学，数学与统计学院，广西　桂林
Email: 986389480@qq.com

收稿日期：2019年4月16日；录用日期：2019年4月27日；发布日期：2019年5月9日

摘　要

本文利用上下解与伪单调算子方法讨论一类p-Laplace方程的Dirichlet问题解的存在性问题。

关键词

上下解，伪单调算子，p-Laplace

文章引用: 李磊. 一类 p-Laplace 方程解的存在性问题[J]. 理论数学, 2019, 9(3): 308-315.
DOI: 10.12677/pm.2019.93041

Copyright © 2019 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 引言

因为含 p-Laplace 算子 Δ_p $\left(\Delta_p u = div\left(\left|\nabla u\right|^{p-2}\nabla u\right)\right)$ 的微分方程的边值问题在非牛顿力学、宇宙物理、血浆问题和弹性理论等诸多领域有着广泛的应用，所以对此类问题的研究吸引了很多学者的目光。

本文考虑一类具有 p-Laplace 算子方程的 Dirichlet 边值问题：

$$\begin{cases} -a\left(\int|u|^q\right)div\left(\left|\nabla u\right|^{p-2}\nabla u\right) = h_1(x,u)f\left(\int|u|^m\right)+h_2(x,u)g\left(\int|u|^r\right), & x\in\Omega, \\ u=0, x\in\partial\Omega. \end{cases} \tag{1}$$

解的存在性。该方程满足下列假设：

(H_1) $\Omega\subset R^N$，是一个有界的区域且边界光滑。

(H_2) $q,m,r\in[1,+\infty)$。

(H_3) $h_i:\bar{\Omega}\times R\to R^+$ 是连续的函数。

(H_4) $a,f,g:[0,+\infty)\to(0,+\infty)$ 是连续的函数且 $f,g\in L^\infty([0,+\infty))$。

(H_5) $\inf\limits_{t\in[0,+\infty)} a(t), \inf\limits_{t\in[0,+\infty)} f(t), \inf\limits_{t\in[0,+\infty)} g(t)\ge a_0>0$。

解的存在性问题一直是偏微分方程研究中的重要课题，注意到 $p=2$ 时，方程(1)化为一类含有 Laplace 算子的边值问题：

$$\begin{cases} -a\left(\int|u|^q\right)\Delta u = h_1(x,u)f\left(\int|u|^m\right)+h_2(x,u)g\left(\int|u|^r\right), & x\in\Omega, \\ u=0, x\in\partial\Omega. \end{cases} \tag{2}$$

文[1]在满足 H_1~H_5 的假设条件下，使用上下解与伪单调算子的方法证明方程(2)至少存在一个解。

在偏微分方程理论中，解的存在性与不存在性都与所选取的函数空间有关，本文所选取的函数空间是依赖于参数 p 的，其中 $p\ge 2$。之所以这样做是为了使结果具有一般性。需要强调的是，方程(1)、方程(2)所选取的函数空间是不同的。由文[1]知，方程(2)选取的函数空间是 $H_0^1(\Omega)$ 并且证明了解存在且解 $u\in H_0^1(\Omega)$。本文选取的函数空间是 $W_0^{1,p}(\Omega)$，本文的目的在于使用上下解与伪单调算子方法证明方程(1)的解存在且解 $u\in W_0^{1,p}(\Omega)$。此外，由于 p-Laplace 算子的非线性性，对比于 $p=2$ 的特殊情形解的存在性结果的建立需要更精细的讨论。本文将得到与文[1] $p=2$ 情形相一致的结果。(本文规定 $\int u=\int_\Omega u\mathrm{d}x$)

本文所得的结果是：

定理 1 在满足(H_1~H_5)的假设下，假设方程(1)存在上下解 $\underline{u},\bar{u}\in W_0^{1,p}(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$ 并且满足下列条件：

$$\underline{u}(x)\le 0\le\bar{u}(x), x\in\partial\Omega, \tag{3}$$

$$-\Delta_p\bar{u}\ge\frac{1}{a_0}\left(h_1(x,\bar{u})\|f\|_\infty+h_2(x,\bar{u})\|g\|_\infty\right),\ x\in\Omega. \tag{4}$$

$$-\Delta_p\underline{u}\le\frac{a_0}{\Gamma}\left(h_1(x,\underline{u})+h_2(x,\underline{u})\right),\ x\in\Omega. \tag{5}$$

$$\Gamma = \max\left(a(t): t \in \left[0, \|\overline{u}\|_{\infty}^{q} |\Omega|\right]\right), \tag{6}$$

那么对于所有的 $\phi \in W_0^{1,p}(\Omega)$，方程(1)至少存在一个解 $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^{\infty}(\Omega)$ 使得：

$$a\left(\int |u|^q\right)\int |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \phi = f\left(\int |u|^m\right)\int h_1(x,u)\phi + g\left(\int |u|^r\right)\int h_2(x,u)\phi \tag{7}$$

成立并且满足 $\underline{u}(x) \le u(x) \le \overline{u}(x)$。

2. 预备知识

为证明定理 1 我们先做一些必要准备。

定义 2.1 (见文献[2] [3])称算子 $B: X \to X^*$

a) 是有界算子，如果 $\forall u \in X$，$\{Bu\}$ 是 X^* 中的有界凸集。

b) 是强制算子，如果满足

$$\lim_{\|u\| \to \infty} \frac{\langle Bu, u\rangle}{\|u\|} = \infty. \tag{8}$$

c) 是伪单调算子，如果满足 $u_n \to u$ 在 $\sigma(X, X^*)$ 中，且

$$\limsup_{n\to\infty} \langle Bu_n, u_n - u\rangle \le 0, \tag{9}$$

则对任意的 $w \in X$，有

$$\langle Bu, u - w\rangle \le \liminf_{n\to\infty} \langle Bu_n, u_n - w\rangle. \tag{10}$$

引理 2.2 (Brezis) (见文献[4])算子 $B: X \to X^*$ 是伪单调的，有界的，强制的。X 是实自反的可分的 Banach 空间，则对于任意的 $b \in X^*$，方程 $Bu = b$ 存在解 $u \in X$。

定义 2.3 (见文献[5])设 X 是一个 B^* 空间，$\{x_n\} \subset X, x \in X$。称 $\{x_n\}$ 弱收敛到 x，记做 $x_n \to x$，是指：对于 $\forall f \in X^*$ 都有 $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$。这时 x 称做点列 $\{x_n\}$ 的弱极限。

引理 2.4 设 $f_n (n = 1,1,3,\cdots), f \in L^p(\Omega)$，若对每一个 $g \in L^q(\Omega)$ (q 为 p 的共轭数)，当 $n \to \infty$ 时，有 $\int f_n g \to \int fg$，则称 f_n 弱收敛于 f。

证明：因为 $\left(L^p(\Omega)\right)^* = L^q(\Omega)$，可令 $g(f_n) = \int f_n g, g(f) = \int fg$，那么 $g(f_n) \to g(f)$，再由定义 2.3 知 f_n 弱收敛于 f。

定义 2.5 (见文献[5])设 X 是 B^* 空间，$f_n \subset X^*, f \in X^*$。称 f_n^* 弱收敛到 f 记做 $w^* - \lim_{n\to\infty} f_n = f$，是指：对于 $\forall x \in X$，都有 $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$。这时 f 称做泛函序列 f_n 的*弱极限。

定义 2.6 (见文献[6])设 X 是一个赋范空间，如果在典型映射的意义下 $X = X^{**}$，则称空间 X 是自反的。

引理 2.7 (见文献[5])当 X 是一个自反空间时，*弱收敛与弱收敛等价。

引理 2.8 (见文献[7])对任意 $p \ge 2$ 下面不等式成立：

$$\left(|\xi|^{p-2}\xi - |\eta|^{p-2}\eta\right)(\xi - \eta) \ge 2^{2-p}|\xi - \eta|^p. \tag{11}$$

引理 2.9 (见文献[8]) (H"older 不等式)设 $1 \le p \le \infty$，$q = \dfrac{p}{p-1}$。若 $u \in L^p(\Omega), v \in L^q(\Omega)$，则 $uv \in L^1(\Omega)$，并且 $\int_\Omega |uv| \mathrm{d}x \le \|u\|_p \|v\|_q$。

3. 定理 1 的证明

第一步，构造修正问题：

定义截断函数：

$$\zeta(x,t)=\begin{cases}\underline{u}(x), & t\le \underline{u}(x),\\ t, & \underline{u}(x)\le t\le \overline{u}(x),\\ \overline{u}(x), & t\ge \overline{u}(x).\end{cases}$$

令：

$$\hat{h}_i(x,t)=\begin{cases}h_i(x,\underline{u}(x)), & t\le \underline{u},\\ h_i(x,t) & \underline{u}\le t\le \overline{u},\\ h_i(x,\overline{u}(x)), & t\ge \overline{u}.\end{cases}$$

因为 $h_i:\overline{\Omega}\times R\to R^+$ 是连续的函数，所以可令 $M_i=\max\left(h_i(x,u)\mid x\in\overline{\Omega},u\in[\underline{u},\overline{u}]\right)$，再由 $\hat{h}_i(x,u)$ 的定义易得：$\left|h_i(x,u)\right|\le M_i$。

定义函数：

$$\gamma(x,t)=-(\underline{u}-t)_+^l+(t-\overline{u})_+^l, \tag{12}$$

其中，$\dfrac{p-1}{p}\le l\le p-1$。

再定义修正函数：$H(x,u,s,t)=\hat{h}_1(x,u)s+\hat{h}_2(x,u)t-\gamma(x,u)$。

利用上述函数我们研究下列 Dirichlet 问题：

$$\begin{cases}-a\left(\int|u|^q\right)\Delta_p u=H\left(x,u,f\left(\int|\zeta(x,u)|^m\right),g\left(\int|\zeta(x,u)|^r\right)\right), & x\in\Omega,\\ u=0,x\in\partial\Omega.\end{cases} \tag{13}$$

第二步，对 H 作出估计：

在 $u<\underline{u}$ 时：$\left|H(x,u,f,g)\right|=\hat{h}_1f+\hat{h}_2g+(\underline{u}-u)_+^l>0$，此时，对方程(13)用最值原理易得：$\underline{u}>u>0$，因此：

$$\begin{aligned}\left|H(x,u,f,g)\right|&=\left|\hat{h}_1f+\hat{h}_2g+(\underline{u}-u)_+^l\right|\\ &\le\left|\hat{h}_1f\right|+\left|\hat{h}_2g\right|+\left|(\underline{u}-u)_+^l\right|\\ &\le\left|\hat{h}_1f\right|+\left|\hat{h}_2g\right|+|\underline{u}|^l.\end{aligned} \tag{14}$$

在 $\underline{u}\le u$ 时：

$$\left|H(x,u,f,g)\right|\le\left|\hat{h}_1f+\hat{h}_2g\right|. \tag{15}$$

第三步，证明 $H\in L^{p^*}(\Omega)$：

已知 $\overline{u},\underline{u}\in L^\infty(\Omega)$，显然有 $\overline{u},\underline{u}\in L^{lp^*}(\Omega)$。

令 $\Gamma_1=\max\left(f(t):t\in\left[0,\|\overline{u}\|_\infty^m|\Omega|\right]\right),\Gamma_2=\max\left(g(t):t\in\left[0,\|\overline{u}\|_\infty^r|\Omega|\right]\right)$，利用上述条件以及 Minkowski 不

等式我们有：

$$\begin{aligned}\left(\int\left|H(x,u,f,g)\right|^{p^*}\right)^{\frac{1}{p^*}} &\le \left(\int\left|\hat{h}_1 f\right|^{p^*}\right)^{\frac{1}{p^*}}+\left(\int\left|\hat{h}_2 g\right|^{p^*}\right)^{\frac{1}{p^*}}+\left(\int\left|\underline{u}\right|^{lp^*}\right)^{\frac{1}{p^*}}\\ &\le \Gamma_1\left(\int\left|\hat{h}_1\right|^{p^*}\right)^{\frac{1}{p^*}}+\Gamma_2\left(\int\left|\hat{h}_2\right|^{p^*}\right)^{\frac{1}{p^*}}+\left(\int\left|\underline{u}\right|^{lp^*}\right)^{\frac{1}{p^*}}\\ &\le \Gamma_1 M_1\left|\Omega\right|^{\frac{1}{p^*}}+\Gamma_2 M_2\left|\Omega\right|^{\frac{1}{p^*}}+\left(\int\left|\underline{u}\right|^{lp^*}\right)^{\frac{1}{p^*}}\\ &< \infty\end{aligned}$$

所以有 $H\in L^{p^*}(\Omega)$，且与 u 的选取无关。

第四步，作算子：$B:W_0^{1,p}(\Omega)\to\left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)^*$。

$$\left\langle B(u),v\right\rangle = a\left(\int\left|\zeta(x,u)\right|^q\right)\int\left|\nabla u\right|^{p-2}\nabla u\nabla v-\int H\left(x,u,f\left(\int\left|\zeta(x,u)\right|^m\right),g\left(\int\left|\zeta(x,u)\right|^r\right)\right)v, \tag{16}$$

对任意 $u,v\in W_0^{1,p}(\Omega)$。

第五步，证明 B 是有界的：

已知 $u\in W_0^{1,p}(\Omega)$，

$$\begin{aligned}\left\langle B(u),v\right\rangle &= a\left(\int\left|\zeta(x,u)\right|^q\right)\int\left|\nabla u\right|^{p-2}\nabla u\nabla v-\int H\left(x,u,f\left(\int\left|\zeta(x,u)\right|^m\right),g\left(\int\left|\zeta(x,u)\right|^r\right)\right)v\\ &\le a\left(\int\left|\zeta(x,u)\right|^q\right)\int\left|\nabla u\right|^{p-1}\left|\nabla v\right|+\int\left|H\left(x,u,f\left(\int\left|\zeta(x,u)\right|^m\right),g\left(\int\left|\zeta(x,u)\right|^r\right)\right)\right|\left|v\right|\\ &\le \Gamma\left(\int\left|\nabla u\right|^p\right)^{\frac{1}{p^*}}\left(\int\left|\nabla v\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int\left|H\left(x,u,f\left(\int\left|\zeta(x,u)\right|^m\right),g\left(\int\left|\zeta(x,u)\right|^r\right)\right)\right|^{p^*}\right)^{\frac{1}{p^*}}\left(\int\left|v\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\ &\le C\left\|v\right\|_{W_0^{1,p}(\Omega)},\end{aligned} \tag{17}$$

其中，$(p-1)p^*=p$，那么由上式知 B 是有界的。

第六步，证明 B 是强制的：

$$\begin{aligned}\frac{\left\langle B(u),v\right\rangle}{\left\|u\right\|} &= \frac{a\left(\int\left|\zeta(x,u)\right|^q\right)\int\left|\nabla u\right|^p-\int H\left(x,u,f\left(\int\left|\zeta(x,u)\right|^m\right),g\left(\int\left|\zeta(x,u)\right|^r\right)u\right)}{\left\|u\right\|}\\ &\ge a_0\left(\int\left|\nabla u\right|^p\right)^{1-\frac{1}{p}}-\frac{\left(\int\left|H\left(x,u,f\left(\int\left|\zeta(x,u)\right|^m\right),g\left(\int\left|\zeta(x,u)\right|^r\right)\right)\right|^{p^*}\right)^{\frac{1}{p^*}}\left(\int\left|u\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}}{\left\|u\right\|},\end{aligned}$$

$$\left(\left\|u\right\|=\left(\int\left|\nabla u\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right),$$

当 $\left\|u\right\|\to\infty$ 时，则

$$\frac{\left\langle B(u),v\right\rangle}{\left\|u\right\|}\to\infty,$$

因此，B 是强制的。

第七步，证明 B 是一个伪单调算子：

根据定义(2.1)就是证明如果 $u_n \in W_0^{1,p}(\Omega)$ 且 $u_n \xrightarrow{w} u$ 并且：

$$\limsup_{n\to\infty}\left\langle B(u_n),u_n-u\right\rangle \le 0, \tag{18}$$

那么有：

$$\liminf_{n\to\infty}\left\langle B(u_n),u_n-v\right\rangle \ge \left\langle B(u),u-v\right\rangle, \forall v\in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{19}$$

已知 $u_n \xrightarrow{w} u$ 且 $u_n,u\in L^p(\Omega)$，又由第三步知 $H\in L^{p^*}(\Omega)$，与 u_n 选取无关且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{p^*}=1$，根据引理(2.4)得：

$$\frac{\int H\left(x,u_n,f\left(\int\left|\zeta(x,u_n)\right|^m\right),g\left(\int\left|\zeta(x,u_n)\right|^r\right)\right)(u_n-u)}{a\left(\int\left|\zeta(x,u_n)\right|^q\right)}\to 0,$$

又已知

$$\limsup_{n\to\infty}\left\langle B(u_n),u_n-u\right\rangle \le 0,$$

因此

$$\limsup_{n\to\infty}\int\left|\nabla u_n\right|^{p-2}\nabla u_n\left(\nabla u_n-\nabla u\right)\le 0. \tag{20}$$

根据弱收敛的定义(2.3)可得：

$$\lim_{n\to\infty}\left\langle B(u),u_n-u\right\rangle = 0,$$

类似可以证明：

$$\lim_{n\to\infty}\int\left|\nabla u\right|^{p-2}\nabla u\left(\nabla u_n-\nabla u\right)=0. \tag{21}$$

联合(20)，(21)两式可得：

$$0\ge\lim_{n\to\infty}\int\left(\left|\nabla u_n\right|^{p-2}\nabla u_n-\left|\nabla u\right|^{p-2}\nabla u\right)\left(\nabla u_n-\nabla u\right)\ge\lim_{n\to\infty}\int 2^{2-p}\left|\nabla u_n-\nabla u\right|^p\ge 0, \tag{22}$$

进而得出：

$$\int\left|\nabla u_n-\nabla u\right|^p\to 0, \tag{23}$$

所以有：$u_n\to u$。

由(22)，(23)易知：

$$\lim_{n\to\infty}\left\langle B(u_n)-B(u),u_n-u\right\rangle = 0, \tag{24}$$

又已知 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 是自反空间联合引理(2.7)可得：

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty}\left\langle B(u_n),u_n-v\right\rangle &\ge \liminf_{n\to\infty}\left\langle B(u_n),u_n\right\rangle-\limsup_{n\to\infty}\left\langle B(u_n),v\right\rangle\\ &=\liminf_{n\to\infty}\left\langle B(u_n),u_n-u\right\rangle+\lim_{n\to\infty}\left\langle B(u_n),u\right\rangle-\left\langle B(u),v\right\rangle\\ &=\lim_{n\to\infty}\left\langle B(u),u_n-u\right\rangle+\left\langle B(u),u\right\rangle-\left\langle B(u),v\right\rangle\\ &=\left\langle B(u),u\right\rangle-\left\langle B(u),v\right\rangle\\ &=\left\langle B(u),u-v\right\rangle.\end{aligned} \tag{25}$$

这就证明了 B 是伪单调算子。

所以 B 是有界的、强制的、伪单调的，根据引理(2.2)可知方程(13)有解已经证明。

第八步，我们证明方程(1)有解：

即证明 $\underline{u} \le u \le \overline{u}$ 。

先令 $\phi = (u-\overline{u})_+$ ，

$$a\left(\int |u|^q\right)\int |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla (u-\overline{u})_+ = \int H\left(x,u,f\left(\int |\zeta(x,u)|^m\right),g\left(\int |\zeta(x,u)|^r\right)\right)(u-\overline{u})_+,$$

进而有：

$$a\left(\int |u|^q\right)\int |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla (u-\overline{u})_+ = f\left(\int |\zeta(x,u)|^m\right)\int h_1(x,u)(u-\overline{u})_+ + g\left(\int |\zeta(x,u)|^r\right)\int h_2(x,u)(u-\overline{u})_+ - \int \gamma(x,u)(u-\overline{u})_+,$$

因此，

$$\int |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla (u-\overline{u})_+ \le \frac{1}{a_0}\|f\|_\infty \int h_1(x,\overline{u})(u-\overline{u})_+ + \frac{1}{a_0}\|g\|_\infty \int h_2(x,\overline{u})(u-\overline{u})_+ - \frac{1}{a\left(\int |u|^q\right)}\int (u-\overline{u})_+^{l+1}.$$

对(4)分步积分可得：

$$\int |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla (u-\overline{u})_+ \le \int |\nabla \overline{u}|^{p-2}\nabla \overline{u} \nabla (u-\overline{u})_+ - a\left(\int |u|^q\right)\int (u-\overline{u})_+^{l+1},$$

所以，

$$\int |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla (u-\overline{u})_+ - \int |\nabla \overline{u}|^{p-2}\nabla \overline{u} \nabla (u-\overline{u})_+ \le -a\left(\int |u|^q\right)\int (u-\overline{u})_+^{l+1} \le 0,$$

又由(11)知，左边 $\ge \int 2^{2-p}\left|\nabla (u-\overline{u})_+\right|^p \ge 0$，进而有：$(u-\overline{u})_+ = 0$ 。

再令 $\phi = (\underline{u}-u)_+$ ，

$$a\left(\int |u|^q\right)\int |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla (\underline{u}-u)_+ = \int H\left(x,u,f\left(\int |\zeta(x,u)|^m\right),g\left(\int |\zeta(x,u)|^r\right)\right)(\underline{u}-u)_+,$$

进而有：

$$a\left(\int |u|^q\right)\int |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla (\underline{u}-u)_+ = f\left(\int |\zeta(x,u)|^m\right)\int h_1(x,u)(\underline{u}-u)_+ + g\left(\int |\zeta(x,u)|^r\right)\int h_2(x,u)(\underline{u}-u)_+ - \int \gamma(x,u)(\underline{u}-u)_+.$$

又由前面的 h_i 和 γ 的定义得到：

$$a\left(\int |u|^q\right)\int |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla (\underline{u}-u)_+ = f\left(\int |\zeta(x,u)|^m\right)\int h_1(x,u)(\underline{u}-u)_+ + g\left(\int |\zeta(x,u)|^r\right)\int h_2(x,u)(\underline{u}-u)_+ - \int (\underline{u}-u)_+^{l+1},$$

对(5)分步积分得：

$$\begin{aligned}&\int|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla(\underline{u}-u)_+\\&\geq\frac{a_0}{\Gamma}\int h_1(x,\underline{u})(\underline{u}-u)+\frac{a_0}{\Gamma}\int h_1(x,\underline{u})(\underline{u}-u)+\frac{1}{\Gamma}\int(\underline{u}-u)_+^{l+1}\\&\geq\int|\nabla\underline{u}|^{p-2}\nabla\underline{u}\nabla(\underline{u}-u)_++\frac{1}{\Gamma}\int(\underline{u}-u)_+^{l+1},\end{aligned}\tag{26}$$

进而有：

$$\int|\nabla\underline{u}|^{p-2}\nabla u\nabla(\underline{u}-u)_+-\int|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla(\underline{u}-u)_+\leq-\frac{1}{\Gamma}\int(\underline{u}-u)_+^{l+1}\leq 0,$$

$$\text{左边}\geq\int 2^{2-p}\left|\nabla(\underline{u}-u)_+\right|^p\geq 0,$$

进而可得，$(\underline{u}-u)_+=0$。

综上，$\underline{u}\leq u\leq\overline{u}$。

因此，定理 1 得证。

参考文献

[1] Alves, C.O. and Covei, D.P. (2015) Existence of Solution for a Class of Nonlocal Elliptic Problem via Sub-Supersolution Method. *Nonlinear Analysis Real World Applications*, **23**, 1-8. https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2014.11.003

[2] Zeidler, E. (1991) Nonlinear Functional Analysis and Its Applications, Part I: Fixed-Point Theorems. *Acta Applicandae Mathematica*, **24,** 312-314.

[3] 李开泰, 马逸尘. 数学物理方程 Hilbert 空间方法[M]. 北京: 科学出版社, 2008.

[4] Troianiello, G.M. (2010) Elliptic Differential Equations and Obstacle Problems. University Series in Mathematics. Springer US, New York.

[5] 张恭庆, 林源渠. 泛函分析讲义[M]. 北京: 北京大学出版社, 1987.

[6] 孙炯, 王万义, 郝建文. 泛函分析[M]. 北京: 高等教育出版社, 2010.

[7] Peral, I. (2010) Multiplicity of Solutions for the p-Laplacian. http://matematicas.uam.es/~ireneo.peral/ICTP.pdf

[8] 王明新. 索伯列夫空间[M]. 北京: 高等教育出版社, 2013.

Hans 汉斯

知网检索的两种方式：

1. 打开知网页面 http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD
   下拉列表框选择：[ISSN]，输入期刊 ISSN：2160-7583，即可查询
2. 打开知网首页 http://cnki.net/
   左侧“国际文献总库”进入，输入文章标题，即可查询

投稿请点击：http://www.hanspub.org/Submission.aspx
期刊邮箱：pm@hanspub.org