Pure Mathematics 理论数学, 2020, 10(7), 648-654
Published Online July 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2020.107078

Hans汉斯

The Popularization and Application of Matrix Form of Vandermonde's Determinant

Songqi Zhou*, **Ying Bai**

Mathematics and Statistics School of Northeastern University at Qinhuangdao, Qinhuangdao Hebei
Email: *328522803@qq.com

Received: Jun. 21st, 2020; accepted: Jul. 9th, 2020; published: Jul. 16th, 2020

Abstract

The purpose of this article is to use the properties of block matrices and matrix direct products to generalize the elements of the Vandermonde determinant into a matrix form, so that the generalized determinant still has a general solution formula similar to the Vandermonde determinant, and can solve more complicated problem of determinant evaluation.

Keywords

Vandermonde Determinant, Block Matrix, Kronecker Product

范德蒙行列式的矩阵形式推广及其应用

周颂奇*，**白　颖**

东北大学秦皇岛分校数学与统计学院，河北 秦皇岛
Email: *328522803@qq.com

收稿日期：2020年6月21日；录用日期：2020年7月9日；发布日期：2020年7月16日

摘　要

本文旨在利用分块矩阵及矩阵直积的性质，将范德蒙行列式中的元素换成矩阵形式进行推广，使其推广后的行列式仍具有类似范德蒙行列式的通解公式，且能解决更复杂的行列式求值问题。

关键词

范德蒙行列式，分块矩阵，矩阵直积

*通讯作者。

文章引用: 周颂奇, 白颖. 范德蒙行列式的矩阵形式推广及其应用[J]. 理论数学, 2020, 10(7): 648-654.
DOI: 10.12677/pm.2020.107078

1. 引言

范德蒙行列式在向量空间理论、线性变换理论、多项式理论、微积分等方面都有重要贡献，如参考文献[1] [2] [3]；在其他工程技术领域如计算机技术、自动化技术等也有广泛的应用。但由于传统的范德蒙行列式中的元素均为实数，适用范围有限，故本文利用分块矩阵及矩阵直积的性质，将行列式中的元素换成分块矩阵进行推广，使其应用范围更加广泛。

2. 预备知识

1) n 阶范德蒙行列式的通解公式

$$d=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{1\le j<i\le n}\left(a_i-a_j\right)。$$

2) 分块矩阵 3 点性质：

性质 2.1：[4]设矩阵 $A=\left(a_{ik}\right)_{s\times n}$，矩阵 $B=\left(b_{kj}\right)_{n\times m}$，把 A，B 分成一些小矩阵：

$$A=\begin{array}{c} \\ s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_t \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} n_1 & n_2 & \cdots & n_l \end{array} \\ \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1l} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2l} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{t1} & A_{t2} & \cdots & A_{tl} \end{bmatrix} \end{array},\quad B=\begin{array}{c} \\ n_1 \\ n_2 \\ \vdots \\ n_l \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} m_1 & m_2 & \cdots & m_r \end{array} \\ \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1r} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{l1} & B_{l2} & \cdots & B_{lr} \end{bmatrix} \end{array},$$

其中 A_{ij} 是 $s_i\times n_j$ 小矩阵，每个 B_{ij} 是 $n_i\times m_j$ 小矩阵，于是有

$$C=AB=\begin{array}{c} \\ s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_t \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} m_1 & m_2 & \cdots & m_r \end{array} \\ \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1r} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{t1} & C_{t2} & \cdots & C_{tr} \end{bmatrix} \end{array}$$

其中，$C_{pq}=A_{p1}B_{1q}+A_{p2}B_{2q}+\cdots+A_{pl}B_{lq}$。

性质 2.2：[4]若矩阵 A 可逆，则有

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}=|A|\left|D-CA^{-1}B\right|$$

3) 矩阵直积的定义与性质：

定义 2.1：设矩阵 $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$，$B=\left(b_{ij}\right)_{p\times q}$，称如下的分块矩阵

$$A\otimes B=\begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{pmatrix}$$

为 A 与 B 的直积。

性质 2.3：[5] $A\in C^{m\times m}$ 的全体特征值是 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$，$B\in C^{n\times n}$ 的全体特征值是 $u_1,u_2,\cdots,u_n$，则 $A\otimes B$ 的全体特征值是 $\lambda_i\mu_j\,(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$。

证明：因为任何方阵都可以化成约当标准型，且对角线的元素都是矩阵的特征值，所以用约当标准型来证明，因为存在 P、Q，使得

$$P^{-1}AP=J_A,\quad Q^{-1}BQ=J_B,$$

$$J_A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ t_1 & \lambda_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & t_{m-1} & \lambda_m\end{pmatrix},\quad J_B=\begin{pmatrix}\mu_1 & & & \\ s_1 & \mu_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & s_{n-1} & \mu_n\end{pmatrix},$$

这里 t_i，s_i 代表 1 或者 0，于是

$$(P\otimes Q)^{-1}(A\otimes B)(P\otimes Q)=\left(P^{-1}AP\right)\otimes\left(Q^{-1}BQ\right)=J_A\otimes J_B,$$

故 $A\otimes B$ 的特征值即 $J_A\otimes J_B$ 的特征值是 $\lambda_i\mu_j$。

性质 2.4：[5]设 $A\in C^{m\times m}$，$B\in C^{n\times n}$，则 $|A\otimes B|=|A|^n\cdot|B|^m$。

证明：由性质 2.4，知 $A\otimes B$ 的特征值是 $\lambda_i\mu_j$，于是

$$|A\otimes B|=\prod\lambda_i\mu_j=\left(\prod\lambda_i\right)^n\times\left(\prod u_j\right)^m=|A|^n|B|^m。$$

3. 主要结论

命题 3.1：设方阵 A 由如下分块矩阵组成

$$A=\begin{pmatrix}A_{11} & \cdots & A_{1j} & \cdots & A_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ A_{i1} & \cdots & A_{ij} & \cdots & A_{in}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ A_{n1} & \cdots & A_{nj} & \cdots & A_{nn}\end{pmatrix}$$

其中 $A_{ij}\,(1\le i\le n)$ 都是 s 阶方阵，M 是任一 s 阶方阵，对于矩阵

$$B=\begin{pmatrix}A_{11} & \cdots & MA_{1j} & \cdots & A_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ A_{i1} & \cdots & MA_{ij} & \cdots & A_{in}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ A_{n1} & \cdots & MA_{nj} & \cdots & A_{nn}\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}A_{11} & \cdots & A_{1j} & \cdots & A_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ MA_{i1} & \cdots & MA_{ij} & \cdots & MA_{in}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ A_{n1} & \cdots & A_{nj} & \cdots & A_{nn}\end{pmatrix}$$

则有 $|B|=|C|=|M||A|$。

证明：$$B=\begin{pmatrix}A_{11} & \cdots & A_{1j} & \cdots & A_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ A_{i1} & \cdots & A_{ij} & \cdots & A_{in}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ A_{n1} & \cdots & A_{nj} & \cdots & A_{nn}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}E & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & M & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & E\end{pmatrix}=A\cdot\begin{pmatrix}E & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & M & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & E\end{pmatrix},$$

于是 $|B|=|A|\cdot\begin{vmatrix}E & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & M & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & E\end{vmatrix}=|A|\cdot|M|$。

同理，$C=\begin{pmatrix}E & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & M & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & E\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}A_{11} & \cdots & A_{1j} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{i1} & \cdots & A_{ij} & \cdots & A_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nj} & \cdots & A_{nn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & M & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & E\end{pmatrix}\cdot A$，

于是 $|C|=\begin{vmatrix}E & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & M & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & E\end{vmatrix}\cdot|A|=|M|\cdot|A|=|A|\cdot|M|=|B|$,证明完毕。

定理 3.1：设 n 阶分块矩阵的行列式如下：

$$|D|=\begin{vmatrix}E & E & E & \cdots & E \\ D_1 & D_2 & D_3 & \cdots & D_n \\ D_1^2 & D_2^2 & D_3^2 & \cdots & D_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ D_1^{n-1} & D_2^{n-1} & D_3^{n-1} & \cdots & D_n^{n-1}\end{vmatrix} \tag{1}$$

其中，小矩阵块 $E, D_i\,(1\le i\le n)$ 均为同阶方阵，则有 $|D|=\prod\limits_{1\le j<i\le n}\left|D_i-D_j\right|$。

证明(数学归纳法)：

当 $n=2$ 时由性质 2.2，可得

$$\begin{vmatrix}E & E \\ D_1 & D_2\end{vmatrix}=|E|\left|D_2-D_1EE\right|=\left|D_2-D_1\right|$$

满足定理公式。

假设定理公式对于 $n-1$ 阶的行列式成立，现在来看对于 n 阶的情形。在(1)式中，用第 n 行减去 D_1 左乘第 $n-1$ 行，用第 $n-1$ 行减去 D_1 左乘第 $n-2$ 行，也就是自下而上依次用每一行减去 D_1 左乘它上一行，也即

$$\left|\begin{pmatrix}E & & & \\ -D_1 & E & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -D_1 & E\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E & E & \cdots & E \\ D_1 & D_2 & \cdots & D_n \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ D_1^{n-1} & D_2^{n-1} & \cdots & D_n^{n-1}\end{pmatrix}\right|$$
$$=\begin{vmatrix}E & & & \\ -D_1 & E & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -D_1 & E\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}E & E & \cdots & E \\ D_1 & D_2 & \cdots & D_n \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ D_1^{n-1} & D_2^{n-1} & \cdots & D_n^{n-1}\end{vmatrix}=|D|$$

因此可得：

$$|D|=\begin{vmatrix} E & E & \cdots & E \\ O & D_2-D_1 & \cdots & D_n-D_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ O & D_2^{n-1}-D_1D_2^{n-2} & \cdots & D_n^{n-1}-D_1D_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} D_2-D_1 & D_3-D_1 & \cdots & D_n-D_1 \\ D_2^2-D_1D_2 & D_3^2-D_1D_3 & \cdots & D_n^2-D_1D_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ D_2^{n-1}-D_1D_2^{n-2} & D_3^{n-1}-D_1D_3^{n-2} & \cdots & D_n^{n-1}-D_1D_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} D_2-D_1 & D_3-D_1 & \cdots & D_n-D_1 \\ (D_2-D_1)D_2 & (D_3-D_1)D_3 & \cdots & (D_n-D_1)D_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (D_2-D_1)D_2^{n-2} & (D_3-D_1)D_3^{n-2} & \cdots & (D_n-D_1)D_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

由命题 3.1，上式可以化简为：

$$|D_2-D_1|\times|D_3-D_1|\times\cdots\times|D_n-D_1|\times\begin{vmatrix} E & E & \cdots & E \\ D_2 & D_3 & \cdots & D_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ D_2^{n-2} & D_3^{n-2} & \cdots & D_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

由于后面这个行列式是一个 $n-1$ 级范德蒙行列式的矩阵推广形式，根据归纳假设，它就等于所有可能差 $|D_i-D_j|\,(2\le j<i\le n)$ 的乘积；又由于包含 $|D_k-D_1|\,(2\le k\le n)$ 的项在前面已经全部出现。因此，可以得出结论，定理公式对 n 级范德蒙行列式的矩阵推广形式也成立。根据数学归纳法，证明完毕。

定理 3.2：若 n 阶分块矩阵行列式如下：

$$|D|=\begin{vmatrix} B & B & B & \cdots & B \\ a_1B & a_2B & a_3B & \cdots & a_mB \\ a_1^2B & a_2^2B & a_3^2B & \cdots & a_m^2B \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{m-1}B & a_2^{m-1}B & a_3^{m-1}B & \cdots & a_m^{m-1}B \end{vmatrix}$$

其中 $B\in C^{n\times n}$，则有

$$|D|=\left(\prod_{1\le j<i\le n}(a_i-a_j)\right)^n|B|^m。$$

证明：令

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{m-1} & a_2^{m-1} & a_3^{m-1} & \cdots & a_m^{m-1} \end{pmatrix}$$

由矩阵直积的定义 2.1 及性质 2.4 可知：

$$|D|=|A\otimes B|=|A|^n|B|^m$$

根据范德蒙行列式的通解公式，可知：

$$|A| = \prod_{1 \le j < i \le n} \left(a_i - a_j\right)$$

故上式可整理得：

$$|D| = \left(\prod_{1 \le j < i \le n} \left(a_i - a_j\right) \right)^n |B|^m$$

完成证明。

4. 应用举例

1) 计算 $|D| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 4 & 4 & 5 \\ 5 & 8 & 10 & 15 & 17 & 24 \\ 8 & 13 & 15 & 25 & 24 & 41 \end{vmatrix}$ 的值。

解：

由于 $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 13 \end{vmatrix}$，$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} 10 & 15 \\ 15 & 25 \end{vmatrix}$，$\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} 17 & 24 \\ 24 & 41 \end{vmatrix}$，

令 $D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$，$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$，$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$，

所以可以直接使用定理 3.1，解得：

$$|D| = |D_2 - D_1||D_3 - D_1||D_3 - D_2| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)\times(-4)\times(-1) = -4.$$

2) 计算 $|D| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 4 & 3 & 4 \\ x & 2x & y & 2y & z & 2z \\ 3x & 4x & 3y & 4y & 3z & 4z \\ x^2 & 2x^2 & y^2 & 2y^2 & z^2 & 2z^2 \\ 3x^2 & 4x^2 & 3y^2 & 4y^2 & 3z^2 & 4z^2 \end{vmatrix}$ 的值。

解：

$$|D| = \left| \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \right|$$

利用定理 3.2，可直接解得结果为

$$|D| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}^2 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}^3 = \left((z-y)(z-x)(y-x)\right)^2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}^3 = -8\left((z-y)(z-x)(y-x)\right)^2$$

参考文献

[1] 徐杰. 范德蒙行列式的应用[J]. 科技信息, 2009(17): 588-590.

[2] 黄威, 吕维东. 关于范德蒙行列式计算类型的探讨及其运用[J]. 湖北科技学院学报, 2015, 35(10): 202-204.

[3] 程伟健, 贺冬冬. 范德蒙行列式在微积分中的应用[J]. 大学数学, 2004, 20(3): 127-130.

[4] 王萼芳, 石生明. 高等代数[M]. 北京: 高等教育出版社, 2003.

[5] 韩志涛. 矩阵分析[M]. 沈阳: 东北大学出版社, 2016.