

平方根功能反应捕食者 - 食饵模型的Hopf分支

吕文娟, 孙芳娟

西北师范大学数学与统计学院, 甘肃 兰州
Email: 462420931@qq.com

收稿日期: 2021年5月15日; 录用日期: 2021年6月17日; 发布日期: 2021年6月24日

摘要

本文研究具有避难所的平方根功能反应捕食者 - 食饵模型的Hopf分支的方向和分支周期解的稳定性。结果表明, 当避难所作为参数等于一个阈值时, 它会发生Hopf分支。

关键词

捕食者 - 食饵模型, 避难所, 稳定性, Hopf分支

Hopf Bifurcation of the Square Root Functional Response Predator-Prey Model

Wenjuan Lv, Fangjuan Sun

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu
Email: 462420931@qq.com

Received: May 15th, 2021; accepted: Jun. 17th, 2021; published: Jun. 24th, 2021

Abstract

In this paper, we investigate the direction of Hopf bifurcation and the stability of periodic solution of the bifurcation in a predator-prey model with the square root functional response. The results show that Hopf bifurcation occurs when the refuge as a parameter is equal to a threshold.

Keywords

Predator-Prey Model, Prey Refuge, Stability, Hopf Bifurcation

Copyright © 2021 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

2011年, Ajraldi 等人[1]和 Braza [2]提出了具有群体效应的捕食者-食饵模型,即用带有食饵平方根的功能反应函数去刻画具有这种群体效应的捕食者-食饵模型。许多学者在这类具有群体效应的捕食-食饵系统的研究方面取得了很大的进展[3] [4] [5]。

在自然界中, 食饵种群常常建立避难所为了达到躲避被捕食者捕食的目的。为了更好的符合现实生态环境, 在系统中增加对食饵避难所的考虑是必要的。在文献[6]中作者建立了一类具有食饵保护区的捕食者-食饵模型, 模型如下:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{k}\right) - a(1-m)\sqrt{xy}, \\ \frac{dy}{dt} = b(1-m)\sqrt{xy} - dy, \end{cases} \quad (1)$$

其中, $x(t)$ 和 $y(t)$ 分别代表猎物和捕食者的密度函数, r , k , a , m 分别代表食饵的内禀增长率, 食饵的环境容纳量, 食饵的消耗率以及食饵的庇护率, b 和 d 分别是食饵的转化率和捕食者的自然死亡率。

本文主要研究模型(1)的 Hopf 分支问题。主要内容如下: 首先分析了模型(1)平衡点的稳定性, 接下来通过中心流形定理, 规范型理论和文献[7]的方法分析 Hopf 分支的方向以及分支周期解的稳定性, 最后用数值模拟来验证所得到的结论。

2. Hopf 分支的存在性

通过计算可知 $E^* = (x^*, y^*)$ 是系统(1)的一个正平衡点,

$$x^* = \frac{d^2}{b^2(1-m)^2}, \quad y^* = \frac{rd(kb^2(1-m)^2 - d^2)}{ab^3k(1-m)^4}$$

要使 E^* 存在, 其中 $kb^2(1-m)^2 > d^2$ 。

定理 1 若

$$m < \min \left\{ \bar{m}, \frac{bk^2r^2 - 2bkr + 2kb - \sqrt{2d^2k^2r^3 - 4d^2kr^2 + 4d^2kr}}{k(kr^2 - 2r + 2)b} \right\} \quad (H1)$$

则 E^* 是不稳定的, 若 $\bar{m} < m < 1$, 则 E^* 是渐近稳定的, 其中

$$\bar{m} = \frac{bk - d\sqrt{3k}}{bk}$$

证明: 系统(1)在 E^* 处的 Jacobi 矩阵为

$$J(E^*) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$a_{11} = r - \frac{2rx^*}{k} - \frac{a(1-m)y^*}{2\sqrt{x^*}}, \quad a_{12} = -a(1-m)\sqrt{x^*}$$

$$a_{21} = \frac{b(1-m)y^*}{2\sqrt{x^*}}, \quad a_{22} = b(1-m)\sqrt{x^*} - d$$

对应的特征方程为

$$\lambda^2 - \text{tr}[J(E^*)]\lambda + \det[J(E^*)] = 0 \tag{1.1}$$

其中

$$\text{tr}[J(E^*)] = r - d + b(1-m)\sqrt{x^*} - \frac{2rx^*}{k} - \frac{a(1-m)y^*}{2\sqrt{x^*}}$$

$$\det[J(E^*)] = br(1-c)\sqrt{x^*} + \frac{ad(1-m)y^*}{2\sqrt{x^*}} + \frac{2rdx^*}{k} - rd - \frac{2rb(1-m)x^{*\frac{3}{2}}}{k}$$

如果 $\text{tr}[J(E^*)] < 0$, $\det[J(E^*)] > 0$ 成立, 则(1.1)的根具有负实部, 如果

$$m < \min \left\{ \bar{m}, \frac{bk^2r^2 - 2bkr + 2kb - \sqrt{2d^2k^2r^3 - 4d^2kr^2 + 4d^2kr}}{k(kr^2 - 2r + 2)b} \right\},$$

我们可以得到平衡点 E^* 是局部渐近稳定的。

下面, 我们选择避难所 m 作为分支参数分析系统(1)在 E^* 处的 Hopf 分支。

引理 1 [6] 若条件 $m = \bar{m}$ 成立, 则模型(1)在 E^* 处产生 Hopf 分支。

证明: 由计算可知, 当 $m = \bar{m}$ 时, $\text{tr}[J(E^*)] = 0$, 由于 $\det[J(E^*)] > 0$, $\det[J(E^*)] > 0$ 有一对纯虚特征值 $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\det[J(E^*)]}$ 。

现在我们验证横截性条件。事实上, 如果 $\lambda_{1,2} = \beta(m) \pm i\omega(m)$ 是特征方程(1.1)的根, 则

$$\beta(m) = \frac{1}{2} \text{tr}[J(E^*)], \quad \omega(m) = \frac{1}{2} \sqrt{4\det[J(E^*)] - \text{tr}[J(E^*)]^2},$$

因此,

$$\beta(\bar{m}) = \frac{1}{2} \text{tr}[J(E^*)] \Big|_{m=\bar{m}} = 0,$$

$$\beta'(\bar{m}) = \frac{d}{dc} \text{tr}[J(E^*)] \Big|_{m=\bar{m}} = \frac{3rd^2}{(1-\bar{m})^3 b^5 k} > 0.$$

这表明横截性条件满足。因此, 由文献[8]的 Poincaré-Andronov-Hopf 分支定理可得, 当 m 经过 \bar{m} 时, 系统(1)在 E^* 处产生 Hopf 分支。

3. Hopf 分支的方向与稳定性

这一节我们将研究在条件 $m = \bar{m}$ 下, 模型(1)在 E^* 处发生 Hopf 分支的方向及由分支产生的周期解的稳定性。

作变换 $\bar{x} = x - x^*$, $\bar{y} = y - y^*$, 则平衡点 $E^* = (x^*, y^*)$ 平移到原点, 为了方便起见, 变换后仍用 x 和 y 表示 \bar{x} 和 \bar{y} , 则模型变为

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = r(x+x^*) \left(1 - \frac{(x+x^*)}{k} \right) - a(1-m)\sqrt{(x+x^*)}(y+y^*), \\ \frac{dy}{dt} = b(1-m)\sqrt{(x+x^*)}(y+y^*) - d(y+y^*). \end{cases} \quad (2)$$

对于模型(2)用 Taylor 展式可化简为

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} = J(E^*) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(x, y, m) \\ g(x, y, m) \end{pmatrix},$$

其中

$$f(x, y, m) = p_1 x^2 + p_2 xy + p_3 x^2 + p_4 x^2 y + \dots$$

$$g(x, y, m) = q_1 x^2 + q_2 xy + q_3 x^2 + q_4 x^2 y + \dots$$

以及

$$p_1 = -\frac{r}{k} + \frac{1}{8} \frac{a(1-m)y^*}{x^{\frac{3}{2}}}, \quad p_2 = -\frac{1}{2} \frac{a(1-m)}{x^{\frac{1}{2}}} = -q_2, \quad p_3 = -\frac{1}{16} \frac{a(1-m)y}{x^{\frac{5}{2}}} = -q_3,$$

$$p_4 = \frac{1}{8} \frac{a(1-m)}{x^{\frac{3}{2}}} = -q_4, \quad q_1 = -\frac{1}{8} \frac{b(1-m)y}{x^{\frac{3}{2}}}.$$

定义矩阵

$$T = \begin{pmatrix} N & 1 \\ M & 0 \end{pmatrix},$$

其中, $M = -\frac{a_{21}}{\omega(m)}$, $N = -\frac{\beta(m) - a_{22}}{\omega(m)}$, 容易得到

$$T^{-1} J(E^*) T = \phi(m) = \begin{pmatrix} \beta(m) & -\omega(m) \\ \omega(m) & \beta(m) \end{pmatrix},$$

那么

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{M} \\ 1 & -\frac{N}{M} \end{pmatrix},$$

当 $m = \bar{m}$ 时, 有

$$N_0 = N|_{m=\bar{m}} = \frac{\beta(\bar{m}) - a_{21}}{-\omega(\bar{m})} = \frac{a_{21}}{\omega(\bar{m})}, \quad M_0 = M|_{m=\bar{m}} = -\frac{a_{21}}{\omega(\bar{m})}, \quad \omega(\bar{m}) = \omega(m)|_{m=\bar{m}}$$

通过变换 $(x, y)^T = T(u, v)^T$, 模型可重写为

$$\begin{pmatrix} \frac{du}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \end{pmatrix} = \phi(m) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f^1(u, v, m) \\ g^1(u, v, m) \end{pmatrix},$$

其中

$$\begin{aligned}
 f^1(u, v, m) &= \frac{1}{M} g(Nu + v, Mu, m) \\
 &= \left(\frac{N^2}{M} q_1 + Nq_2 \right) u^2 + \left(\frac{2N}{M} q_1 + q_2 \right) uv + \frac{q_1}{M} v^2 + \left(\frac{N^3}{M} q_3 + N^2 q_4 \right) u^3 \\
 &\quad + \left(\frac{3N^2}{M} q_3 + 2Nq_4 \right) u^2 v + \left(\frac{3N}{M} q_3 + q_4 \right) uv^2 + \frac{q_3}{M} v^3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g^1(u, v, m) &= f(Nu + v, Mu, m) - \frac{N}{M} g(Nu + v, Mu, m) \\
 &= \left[Np_1 - \frac{N}{M} q_1 - (M + N) q_2 \right] Nu^2 + \left[\left(2p_1 - \frac{2N}{M} q_1 \right) - (M + 1) q_2 \right] Nuv + \left(p_1 - \frac{N}{M} q_1 \right) v^2 \\
 &\quad - \left[\left(N + \frac{N^2}{M} \right) q_1 + (M + N) q_2 \right] N^2 u^3 - \left[\left(N + \frac{N^2}{M} \right) 3q_3 + (M + N) 2q_4 \right] Nu^2 v \\
 &\quad - \left[\left(1 + \frac{N}{M} \right) 3Nq_3 + (M + N) q_4 \right] u^2 v - \left(1 + \frac{N}{M} \right) q_3 v^3
 \end{aligned}$$

再用极坐标 $u = r \cos \theta$, $v = r \sin \theta$ 变换, 系统等价于

$$\begin{cases} \dot{\tau} = \beta(m) + h(m)\tau^3 + \dots \\ \dot{\theta} = w(m) + s(m)\tau^3 + \dots \end{cases}$$

对于模型在 $m = \bar{m}$ 处作 Taylor 展式有

$$\begin{cases} \dot{\tau} = \beta'(\bar{m})(m - \bar{m}) + h(\bar{m})\tau^3 + o\left((m - \bar{m})^2 \tau, (m - \bar{m})^2 \tau, \tau^5\right) \\ \dot{\theta} = w(m)\tau + w'(\bar{m})(m - \bar{m}) + s(\bar{m}) + o\left((m - \bar{m})^2, (m - \bar{m})^2 \tau^2, \tau^4\right) \end{cases}$$

为了确定 Hopf 分支方向和分支周期解的稳定性, 需要计算下面系数的符号,

$$h(\bar{m}) = \frac{1}{16} (f'_{uuu} + f'_{uvv} + g'_{vvv} + g'_{uvv}) + \frac{1}{16w(\bar{m})} [f'_{uv}(f'_{uu} + f'_{uv}) - g'_{uv}(g'_{uu} + g'_{vv}) - f'_{uu}g'_{uu} + f'_{vv}g'_{vv}]$$

其中所有的偏导数都取值于分支点 $(u, v, c) = (0, 0, \bar{m})$, 并且

$$f'_{uuu}(0, 0, \bar{m}) = 6 \left(\frac{N_0^3}{M_0} q_3 + N_0^2 q_4 \right)$$

$$f'_{vvv}(0, 0, \bar{m}) = 2 \left(\frac{3N_0}{M_0} q_3 + N_0^2 q_4 \right)$$

$$g'_{uvv}(0, 0, \bar{m}) = -2N_0 \left[3q_3 \left(\frac{N_0^2}{M_0} + N_0 \right) + 2q_4 (M_0 + N_0) \right]$$

$$g'_{vvv}(0, 0, \bar{m}) = -6q_3 \left(\frac{N_0}{M_0} + 1 \right)$$

$$f'_{uu}(0, 0, \bar{m}) = 2 \left(\frac{N_0^2}{M_0} q_1 + N_0 q_2 \right)$$

$$f'_{uv}(0,0,\bar{m}) = \left(\frac{2N_0}{M_0}q_1 + q_2 \right)$$

$$f'_{vv}(0,0,\bar{m}) = 2\frac{q_1}{M_0}$$

$$g'_{uu}(0,0,\bar{m}) = 2N_0 \left[N_0p_1 - \frac{N_0}{M_0}q_1 - q_2(M_0 + N_0) \right]$$

$$g'_{uv}(0,0,\bar{m}) = N_0 \left[2p_1 - \frac{2N_0}{M_0}q_1 - q_2(M_0 + 1) \right]$$

$$g'_{vv}(0,0,\bar{m}) = 2 \left(p_1 - \frac{N_0}{M_0}q_1 \right)$$

故

$$h(\bar{m}) = \frac{1}{8} \left[(q_4 - 3q_3) - N_0(3q_3 + 2M_0q_4) + \frac{3q_3N_0}{M_0}(N_0 - 1) \right] + \frac{1}{8w(\bar{m})} \left[\frac{2p_1 + q_2}{M_0} (q_1 + M_0N_0^2q_2 - M_0N_0^3p_1 + N_0^3q_1 + 2N_0^2q_1) + N_0^3q_1(2q_2 - p_1 - q_1) + N_0q_2(M_0p_1 - N_0q_1 + p_1 + q_2) - 2N_0p_1^2 - M_0^2N_0^2q_2 \right]$$

定义一阶 Lyapunov 系数为

$$\mu_2 = -\frac{h(\bar{m})}{\beta'(\bar{m})}.$$

由 Poincaré-Andronov-Hopf 分支定理[8], $\beta'(\bar{m}) > 0$ 以及上面的计算可得如下定理。

定理 2 假设 $kb^2(1-m)^2 > d^2$ 成立, 当 $m = \bar{m}$ 时, 系统(1)在 E^* 处发生 Hopf 分支,

- (i) 若 $h(\bar{m}) < 0$, 则在 E^* 处产生 Hopf 分支的分支周期解是稳定的, 分支方向为超临界。
- (ii) 若 $h(\bar{m}) > 0$, 则在 E^* 处产生 Hopf 分支的分支周期解是不稳定的, 分支方向为亚临界。

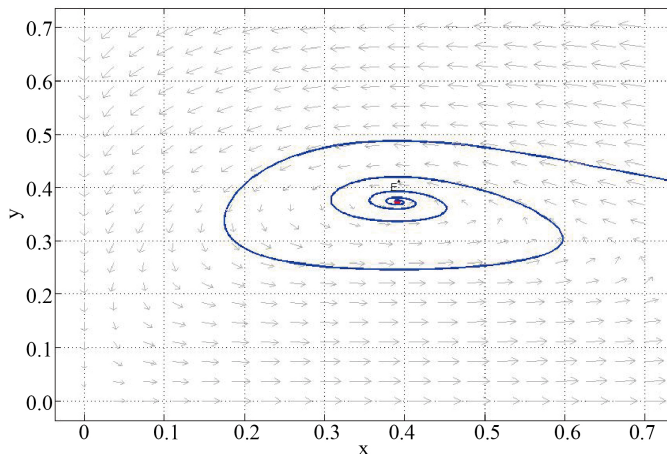


Figure 1. When $m = 0.4 > \bar{m}$, E^* is asymptotically stable

图 1. 当 $m = 0.4 > \bar{m}$ 时, E^* 是渐近稳定的

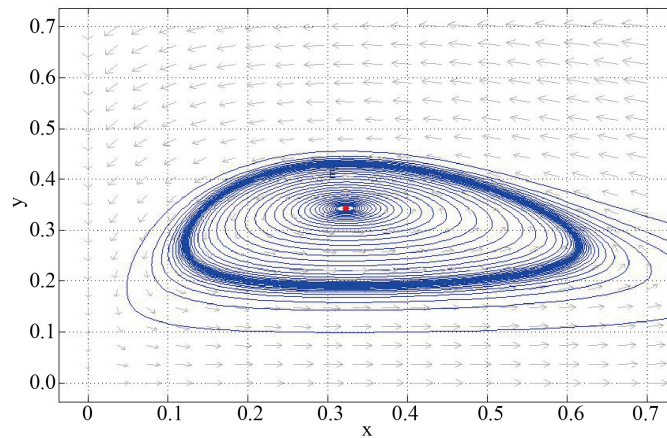


Figure 2. When $m = 0.34 < \bar{m}$, E^* is unstable
图 2. 当 $m = 0.34 < \bar{m}$ 时, E^* 是不稳定的

4. 数值模拟

在这一节我们借助 Matlab 软件通过数值模拟来验证前面所得到的结果。

在系统(1)中选取参数 $a = 1.7$, $b = 0.8$, $d = 0.3$, $r = 1$, $k = 1$ 。经计算, $\bar{m} \approx 0.35$ 。当 $m = 0.4 > \bar{m}$ 时, 正平衡点 $E^* = (0.390625, 0.373391)$ 是渐近稳定的, 如图 1。所示。当 m 减小到临界值 \bar{m} 时, 正平衡点 $E^* = (0.333866, 0.348862)$ 失稳并且经历 Hopf 分支, 进一步计算可得 $h(\bar{m}) \approx -0.38714 < 0$, 由定理 3 可以得到 Hopf 分支的分支周期解是轨道渐近稳定的, 方向为超临界。当 $m = 0.34 < \bar{m}$ 时, 正平衡点 $E^* = (0.322831, 0.342919)$ 是不稳定的, 且系统(1)存在一个稳定的极限环, 如图 2 所示。

参考文献

- [1] Ajraldi, V., Pittavino, M. and Venturino, E. (2011) Modeling Herd Behavior in Population Systems. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, **12**, 2319-2338. <https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2011.02.002>
- [2] Braza, P.A. (2012) Predator-Prey Dynamics with Square Root Functional Responses. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, **13**, 1837-1843. <https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2011.12.014>
- [3] Ma, X.M., Shao, Y.F. and Wang, Z. (2016) An Impulsive Two-Stage Predator-Prey Model with Stage-Structure and Square Root Functional Responses. *Mathematics and Computers in Simulation*, **119**, 91-107. <https://doi.org/10.1016/j.matcom.2015.08.009>
- [4] Salman, S.M., Yousef, A.M. and Elsadany, A.A. (2016) Stability, Bifurcation Analysis and Chaos Control of a Discrete Predator-Prey System with Square Root Functional Response. *Chaos, Solitons & Fractals*, **93**, 20-31. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2016.09.020>
- [5] Bulai, I.M. and Venturino, E. (2017) Shape Effects on Herd Behavior in Ecological Interacting Population Models. *Mathematics and Computers in Simulation*, **141**, 40-55. <https://doi.org/10.1016/j.matcom.2017.04.009>
- [6] Panja, P. (2020) Combine Effects of Square Root Functional Response and Prey Refuge on Predatorprey Dynamics. *International Journal of Modelling and Simulation*. <https://doi.org/10.1080/02286203.2020.1772615>
- [7] Kuznetsov, Y.A. (2013) Elements of Applied Bifurcation Theory. Springer Science & Business Media, New York. <https://doi.org/10.1007/978-1-4757-3978-7>
- [8] Hale, J.K. and Kocak, H. (1991) Dynamics and Bifurcations. Springer, New York. <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-4426-4>