Pure Mathematics 理论数学, 2022, 12(8), 1284-1290
Published Online August 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.128140

Hans汉斯

线性变换在重积分中的应用

贾瑞玲，孙铭娟，张冬燕

信息工程大学，河南 郑州

收稿日期：2022年7月3日；录用日期：2022年8月2日；发布日期：2022年8月9日

摘　要

线性变换是高等代数教学中的核心内容，也是学习数学必备的基本思想方法。最大优点在于它能够化繁为简，化多为少，因此有着广泛的应用。重积分是多元函数积分学的重要组成部分，其计算往往需要学生放眼全局，运用所学知识，统筹分析积分区域和被积函数，进而确定合适的方法，这也是很多学生在处理重积分问题时所面临的最大难点。鉴于此，本文详细地分析如何根据被积函数的结构特征和积分区域的形状确定合适的线性变换，为重积分的计算提供一种行之有效的方法；同时这种分析问题、解决问题的过程有助于培养学生的科学思维方法和自主探究能力。

关键词

线性变换，重积分，积分区域，被积函数，结构特征

Application of Linear Transformation in Multiple Integral

Ruiling Jia, Mingjuan Sun, Dongyan Zhang

Information Engineering University, Zhengzhou Henan

Received: Jul. 3rd, 2022; accepted: Aug. 2nd, 2022; published: Aug. 9th, 2022

Abstract

Linear transformation is the core content in advanced algebra, and it is also the necessary basic thinking method to study mathematics. The biggest advantage lies in that it can reduce complex problems to simple problems, reduce more to less, so it has a wide range of applications. Multiple integral is an important part of integral calculus of multivariate function. The calculation requires student to look at the big picture, using the knowledge learned, overall analyze the integral region and the integrand function, and then determine an appropriate method. This is the biggest difficulty which many students face when calculating the multiple integral. In view of this, the paper

文章引用: 贾瑞玲, 孙铭娟, 张冬燕. 线性变换在重积分中的应用[J]. 理论数学, 2022, 12(8): 1284-1290.
DOI: 10.12677/pm.2022.128140

analyzes in detail how to determine the appropriate linear transformation according to the structure characteristics of integrand function and the shape of integral domain, so as to provide an effective method for the calculation of multiple integral. At the same time, this process of analyzing problem and solving problem helps to cultivate students' scientific thinking methods and ability of independent inquiry.

Keywords

Linear Transformation, Multiple Integral, Integral Domain, Integrand Function, Structural Features

1. 引言

重积分是数学分析教学中的重要内容，在物理学、工程计算等方面有着广泛的应用。它与曲线积分、曲面积分之间都存在着联系，是学习线面积分的理论基础。其计算问题更是教学过程中的一个重点，也是难点。这是因为在计算重积分时，需要放眼全局，兼顾积分区域的形状和被积函数的结构特点，使用定积分、积分区域的对称性、被积函数的奇偶性等技巧，非常考验学生对所学知识的综合运用能力和分析能力。

变换是数学中解决复杂问题的重要技巧，也是某些知识点之间相互转化的桥梁，在高等代数中，变换极其普遍，是解题的常用方法。重积分的计算一般也使用变量代换进行求解，常用的变换有极坐标变换、柱面坐标变换、球坐标变换等。在选择变量代换时，要兼顾积分区域和被积函数，同时还要考虑计算的简洁性。李连兵和张萍[1]讨论了被积函数或积分区域可用二次型来表示的重积分的计算问题。刚蕾、徐爽等[2]通过引入代数中二次型化标准型的方法，利用正交变换有关理论解决某些重积分的计算问题。杨德彬[3]针对一道二重积分，给出四种不同解法并总结了四种方法的使用条件；其中第三种方法就是借助线性变换巧妙地化简了被积函数和积分区域。张文丽、张安玲[4]探究了当积分区域规则而不标准和积分区域是变形的四边形时，如何根据被积函数的表达式来寻找有效的变量变换公式，以实现二重积分的计算。邓茵邻、李自尊[5]以 2021 年研究生入学考试数学(三)中的二重积分为例，展示了线性变换在二重积分中的应用及所具有的优越性。

以上诸多学者侧重研究正交变换与重积分、曲面积分的有机结合问题[6] [7] [8] [9]，较少研究关于线性变换在重积分中的应用，鉴于此，本文将系统地讨论被积函数或积分区域可用线性变换有关理论解决的重积分问题。这类重积分往往很难用常规的坐标变换解决，因为积分区域不具有圆盘、球体等典型特征，且被积函数不含 x^2+y^2 、 $x^2+y^2+z^2$ 等形式。

本文安排如下：第二部分给出线性变换的基本知识、重积分的变量代换公式，为后面内容做好准备知识。第三部分是本文的核心，详细地分析了如何根据积分区域的形状和被积函数的特点选择线性变换，进而解决重积分问题。第四部分提供部分题目供大家练习，以便其更好地理解和掌握重积分的计算。第五部分对全文内容进行总结和概括。

2. 准备知识

2.1. 线性变换

定义：设 V 是数域 P 上的线性空间， $\varphi:V\to V$ 是一个映射，若对 $\forall k\in P$ ， $\forall \alpha,\beta\in V$ ， 都有

1) $\varphi(\alpha+\beta)=\varphi(\alpha)+\varphi(\beta)$，

2) $\varphi(k\alpha)=k\varphi(\alpha)$，

则称 φ 是线性空间 V 上的一个线性变换。有关线性变换的详细内容可参看教材[10]。

2.2. 重积分的变量代换公式

定理 1： 若 $f(x,y)$ 是 xoy 面内的闭区域 D 上的连续函数，记变换 $T:\begin{cases}u=u(x,y)\\v=v(x,y)\end{cases}$，设 $u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$ 在 D 上有关于 x 和 y 的连续偏导数，线性变换 T 把 D 变换为 uov 平面上的区域 D^*，且变换 T 是一一的，又设 $J=\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}u_x & u_y\\v_x & v_y\end{vmatrix}\neq 0$，则

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D^*} f\left(x(u,v),y(u,v)\right)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v\text{。}$$

定理 2： 若 $f(x,y,z)$ 是三维空间 R^3 内的几何体 Ω 上的连续函数，记变换 $T:\begin{cases}u=u(x,y,z)\\v=v(x,y,z)\\w=w(x,y,z)\end{cases}$，设 u，v，w 在 Ω 上有关于 x、y、z 的连续偏导数，线性变换 T 把 Ω 变换为几何体 Ω^*，且变换 T 是一一的，又设 $J=\dfrac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}=\begin{vmatrix}u_x & u_y & u_z\\v_x & v_y & v_z\\w_x & w_y & w_z\end{vmatrix}\neq 0$，则

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_{\Omega^*} f\left(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)\right)\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w\text{。}$$

定理 1 和定理 2 的证明可参看教材[11]，这里不再详述。

3. 线性变换在重积分中的应用

3.1. 线性变换与二重积分结合的计算问题

这部分内容主要涉及到高等代数中的线性变换、数学分析中的二重积分以及将二重积分化为二次积分计算。

例 1： 计算 $I=\iint_D\left(x^2-y^2\right)\cos^2(x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由直线 $x+y=\pm\pi$ 和 $x-y=\pm\pi$ 所围成的区域。

分析： 被积函数和积分区域有共同因子 $x+y$、$x-y$，由此确定变量代换 $H:\begin{cases}u=x+y\\v=x-y\end{cases}$。

解： 根据上述分析，作线性变换 $H:\begin{cases}u=x+y\\v=x-y\end{cases}$，则 $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=-2$，且 $-\pi\le u,v\le\pi$。记 $D^*=\left\{(u,v)\middle|-\pi\le u,v\le\pi\right\}$，结合 $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\cdot\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=1$ 和二重积分的变量代换公式，得

$$I=\iint_D\left(x^2-y^2\right)\cos^2(x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D^*}uv\cos^2u\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\frac{1}{2}\iint_{D^*}uv\cos^2u\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}v\,\mathrm{d}v\int_{-\pi}^{\pi}u\cos^2u\,\mathrm{d}u,$$

利用对称性、奇偶性，则 $\int_{-\pi}^{\pi}u\cos^2u\,\mathrm{d}u=0$，故 $I=0$。

注 1： 被积函数为三角函数 $\cos^2(x+y)$、多项式函数 x^2-y^2 的乘积，无法将变量 x、y 分离，故不能直接将其化为累次积分计算；同时积分区域为矩形，不是圆或圆的一部分；被积函数也不含 x^2+y^2 的形式，故也不适合使用极坐标变换。这时就需要选择合适的变量代换以达到简化被积函数和积分区域，否则不易计算。

例 2： 计算 $I=\iint_D e^{\frac{y}{x-y}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由直线 $x=0$，$y=0$，$y=x-1$ 所围成的区域。

分析： 事实上 D 是由直线 $x=0$，$y=0$，$x-y=1$ 所围成的区域，即被积函数和积分区域有共同因子 y、$x-y$，由此确定变量代换 $H:\begin{cases}u=x-y\\ v=y\end{cases}$。

解： 根据上述分析，作线性变换 $H:\begin{cases}u=x-y\\ v=y\end{cases}$，则 $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=1$，且 $\begin{cases}0\le u\le 1\\ -u\le v\le 0\end{cases}$。记 $D^*=\{(u,v)\mid 0\le u\le 1,-u\le v\le 0\}$，结合 $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\cdot\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=1$ 和二重积分的变量代换公式，得

$$
\begin{aligned}
I&=\iint_D e^{\frac{y}{x-y}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D^*} e^{\frac{v}{u}}\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\iint_{D^*} e^{\frac{v}{u}}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\
&=\int_0^1\mathrm{d}u\int_{-u}^0 e^{\frac{v}{u}}\,\mathrm{d}v=\int_0^1 u\left(1-e^{-1}\right)\mathrm{d}u=\frac{1-e^{-1}}{2}
\end{aligned},
$$

注 2： 1) 被积函数为指数函数 $e^{\frac{x}{x-y}}$，且指数为分式 $\dfrac{x}{x-y}$，不易将 x、y 分离，故不适合将其化为累次积分计算；被积函数不含 x^2+y^2 的形式，故也不适合使用极坐标变换。最好选择合适的变量代换，将被积函数化简，使其可以变量分离。

2) 线性变换之后，在计算 $\iint_{D^*} e^{\frac{v}{u}}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$ 时，若将其转化为先对 u 再对 v 的二次积分，即

$$
\iint_{D^*} e^{\frac{v}{u}}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\int_{-1}^0\mathrm{d}v\int_{-v}^0 e^{\frac{v}{u}}\,\mathrm{d}u,
$$

此时 $\int_{-v}^0 e^{\frac{v}{u}}\,\mathrm{d}u$ 的原函数不是初等函数，很难计算这个定积分。故必须将 $\iint_{D^*} e^{\frac{v}{u}}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$ 化为先对 v 再对 u 的二次积分，即 $\iint_{D^*} e^{\frac{v}{u}}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\int_0^1\mathrm{d}u\int_{-u}^0 e^{\frac{v}{u}}\,\mathrm{d}v$，否则不易计算。

例 3： 计算 $I=\iint_D\dfrac{(x+y)\ln\left(1+\frac{y}{x}\right)}{\sqrt{1-x-y}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由直线 $x=0$，$y=0$，$x+y=1$ 所围成的区域。

分析： 被积函数和积分区域有共同因子 $x+y$，由此确定变量代换中的一个表达式 $u=x+y$。又被积函数中含有因子 $\dfrac{y}{x}$，若选择此因子为变量代换中的另一个表达式，则不易确定变换后的区域。利用对数函数的性质，将分子中的对数函数进行变形，转化为共同因子 $x+y$、x，即 $\ln\left(1+\dfrac{y}{x}\right)=\ln(x+y)-\ln x$，由此确定变量代换为 $H:\begin{cases}u=x+y\\ v=x\end{cases}$。

解： 根据上述分析，作线性变换 $H:\begin{cases}u=x+y\\ v=x\end{cases}$，则 $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=-1$，且 $\begin{cases}0\le u\le 1\\ 0\le v\le u\end{cases}$。记

$D^*=\{(u,v)\,|\,0\le u\le 1,0\le v\le u\}$，结合 $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\cdot\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=1$ 和重积分变量代换公式，得

$$\begin{aligned}I&=\iint_D\frac{(x+y)\ln\left(1+\frac{y}{x}\right)}{\sqrt{1-x-y}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D^*}\frac{u(\ln u-\ln v)}{\sqrt{1-u}}\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\&=\iint_{D^*}\frac{u(\ln u-\ln v)}{\sqrt{1-u}}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\int_0^1\frac{u}{\sqrt{1-u}}\,\mathrm{d}u\int_0^u(\ln u-\ln v)\,\mathrm{d}v=\int_0^1\frac{u^2}{\sqrt{1-u}}\,\mathrm{d}u\end{aligned},$$

令 $\sqrt{1-u}=t$，则 $u=1-t^2$，$\mathrm{d}u=-2t\mathrm{d}t$，可得

$$\int_0^1\frac{u^2}{\sqrt{1-u}}\,\mathrm{d}u=\int_1^0\frac{(1-t^2)^2}{t}(-2t)\,\mathrm{d}t=2\int_0^1(1-2t^2+t^4)\,\mathrm{d}t=\frac{16}{15},$$

故 $I=\frac{16}{15}$。

3.2. 线性变换与三重积分结合的计算问题

这部分内容主要涉及到线性变换、三重积分及将三重积分化为三次积分计算。

例 4： 求 $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1\ (a,b,c>0)$ 与三个平面 $x=0$，$y=0$，$z=0$ 所围成的在第一卦限的几何体 Ω 的体积 $V(\Omega)$。

解： 观察几何体 Ω 的几个边界曲面的特点，可选择变量代换 H：$u=\frac{x}{a}+\frac{y}{b}$，$v=\frac{z}{c}$，$w=\frac{y}{b}$，则 $\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}=-\frac{1}{abc}$，且 $\begin{cases}u^2+v^2\le 1\\0\le w\le u\end{cases}$。记 $\Omega^*=\{(u,v,w)|u^2+v^2\le 1,0\le w\le u\}$，结合 $\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}\cdot\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=1$ 和三重积分的变量代换公式，得

$$\begin{aligned}V(\Omega)&=\iiint_\Omega\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_{\Omega^*}\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w=abc\iiint_{\Omega^*}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w\\&=abc\iint_{\{(u,v)|\ u^2+v^2\le 1\}}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\int_0^u\mathrm{d}w=abc\iint_{\{(u,v)|\ u^2+v^2\le 1\}}u\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\&=abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\cos\theta\cdot r\,\mathrm{d}r=\frac{abc}{3}\end{aligned}。$$

注 3： 1) 这里的几何体是不规则图形，不易直接求其体积。借助合适的线性变换将不规则几何体化为规则几何体，同时使积分区域变得清晰明确，使三重积分化繁为简，达到事半功倍的效果。另外注意到 Ω 的一个边界曲面是 $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1$，也可使用非线性变换 $T:\begin{cases}x=ar\sin\varphi\cos^2\theta\\y=br\sin\varphi\sin^2\theta\\z=cr\cos\varphi\end{cases}$，记 $\Omega'=\left\{(r,\varphi,\theta)\middle|0\le\theta\le\frac{\pi}{2},0\le\varphi\le\frac{\pi}{2},0\le r\le 1\right\}$，则 $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\theta)}=abcr^2\sin\varphi\sin 2\theta$，于是

$$V(\Omega)=\iiint_\Omega\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_{\Omega'}\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\theta)}\right|\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta=abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^2\,\mathrm{d}r=\frac{abc}{3}$$

2) 在解决这类积分问题时，选择线性变换还是非线性变换呢？一般来说，若积分区域较规则，一般选择线性变换(非退化)，此时对应的雅可比行列式是一个非零常数。而非线性变换对应的雅可比行列式是一个与变量相关的函数。当然也不能将这二者割裂开，它们各有优势，我们要学会辩证的看待问题，根据结构特点选择合适的变换。

例 5：(2016 年第八届全国大学生数学竞赛初赛(非数学类)) 设某物体所在的空间区域为 $\Omega=\left\{(x,y,z)\middle| x^2+y^2+2z^2\le x+y+2z\right\}$，密度函数为 $\rho(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$，求其质量 M。

解：易知几何体 Ω 的质量 $M=\iiint_\Omega\left(x^2+y^2+z^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$。为计算方便，将几何体 Ω 的表达式整理变形得，$\Omega=\left\{(x,y,z)\middle|\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\sqrt{2}\left(z-\frac{1}{2}\right)\right)^2\le 1\right\}$，故做线性变换 H：$u=x-\frac{1}{2}$，$v=y-\frac{1}{2}$，$w=\sqrt{2}\left(z-\frac{1}{2}\right)$，则变换 H 将椭球体 Ω 变为变量为 u，v，w 的单位球体 $\Omega_{uvw}=\left\{(u,v,w)\middle| u^2+v^2+w^2\le 1\right\}$，且 $\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}=\sqrt{2}$，结合三重积分的变量代换公式，

$$
\begin{aligned}
M &= \iiint_\Omega\left(x^2+y^2+z^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\
&=\iiint_{\Omega_{uvw}}\left(\left(u+\frac{1}{2}\right)^2+\left(v+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{w}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\right)^2\right)\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w\\
&=\frac{1}{\sqrt{2}}\iiint_{\Omega_{uvw}}\left(u^2+v^2+\frac{w^2}{2}+u+v+\frac{w}{\sqrt{2}}+\frac{3}{4}\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w\\
&=\frac{1}{\sqrt{2}}\iiint_{\Omega_{uvw}}\left(u^2+v^2+\frac{w^2}{2}\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w+\frac{1}{\sqrt{2}}\iiint_{\Omega_{uvw}}\left(u+v+\frac{w}{\sqrt{2}}\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w+\frac{3}{4\sqrt{2}}\iiint_{\Omega_{uvw}}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w
\end{aligned}
$$

利用积分区域的对称性和被积函数的奇偶性，则

$$\iiint_{\Omega_{uvw}}u\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w=\iiint_{\Omega_{uvw}}v\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w=\iiint_{\Omega_{uvw}}w\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w,$$

即 $\iiint_{\Omega_{uvw}}\left(u+v+\frac{w}{\sqrt{2}}\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w=0$。因积分区域具有轮换对称性，故

$$\iiint_{\Omega_{uvw}}u^2\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w=\iiint_{\Omega_{uvw}}v^2\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w=\iiint_{\Omega_{uvw}}w^2\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w。$$

又 $\iiint_{\Omega_{uvw}}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w=\frac{4\pi}{3}$，从而

$$
\begin{aligned}
M &= \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{3}\iiint_{\Omega_{uvw}}\left(u^2+v^2+w^2\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w+\frac{3}{4\sqrt{2}}\cdot\frac{4\pi}{3}\\
&=\frac{5}{6\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1\rho^2\cdot\rho^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\rho+\frac{\sqrt{2}}{2}\pi=\frac{\sqrt{2}}{3}\pi+\frac{\sqrt{2}}{2}\pi=\frac{5\sqrt{2}}{6}\pi
\end{aligned}
。$$

通过上述几个例子可知，对于重积分，当积分区域是较规则图形，比如矩形、三角形、中心不在原点的球体等，或者被积函数不易进行变量分离，但含有因子 $ax\pm by$、cx、dy、x^2-y^2 等，一般把积分区域和被积函数的共同因子确定为变量代换的表达式，即选择线性变换 $H_1:\begin{cases}u=ax+by\\v=cx+dy\end{cases}$、$H_2:\begin{cases}u=ax+by\\v=cx\end{cases}$ 等，这样可使积分区域变成标准形式的区域，且使被积函数容易变量分离，进而达到简化计算。

4. 巩固提高

为加强大家对这部分内容的理解，掌握并领会其思想方法，以下题目自行练习。

1)计算 $I=\iint_D \mathrm{e}^{(x+y)^2}\left(x^2-y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是 $x^2+y^2=1$ 和直线 $y=x$ 以及 x 轴所围成的区域在第一象限的部分。

2) 计算 $I=\iint_D |3x+4y|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le 1\right\}$。

3) 计算 $I=\iint_D \dfrac{\sin(x-y)}{1+x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\left\{(x,y)\middle|0\le x+y\le\pi, 0\le x-y\le\pi\right\}$。

4) 计算 $I=\iint_D \dfrac{x^2-y^2}{\sqrt{2+x-y}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\left\{(x,y)\middle||x|+|y|\le 1\right\}$。

5. 结束语

重积分的计算有很多种方法，通常情况下，要根据积分区域和被积函数的不同特点，选择合适的变量代换。本文针对积分区域为规则图形和不规则图形，分别举例展示了线性变换与重积分的有机结合，在一定程度上化简了被积函数和积分区域。希望大家在学习这部分内容时，多观察，多思考，多总结，领会线性变换所蕴含的数学思想，掌握数学家从事科学研究的一般方法，进而达到举一反三。

基金项目

信息工程大学教育教学研究课题(JXYJ2022C010)。

参考文献

[1] 李连兵, 张萍. 非退化线性变换在重积分计算中的应用[J]. 信阳师范学院学报(自然科学版), 2006, 19(1): 108-109.
[2] 刚蕾, 徐爽, 唐强. 高等数学中积分计算的代数思想[J]. 科技资讯, 2016, 14(11): 98-99.
[3] 杨德彬. 二重积分一题多解的方法总结[J]. 理科爱好者(教育教学), 2020(6): 14-15.
[4] 张文丽, 张安玲. 二重积分变量变换选取方法的探究学习[J]. 高等数学研究, 2022, 25(2): 25-27
[5] 邓茵邻, 李自尊. 两道 2021 年研究生入学题目的一题多解[J]. 高等数学研究, 2022, 25(3): 26-29.
[6] 王庆东, 谢勰. 正交变换的应用及其数学方法论意义[J]. 高等数学研究, 2008, 11(1): 82-84.
[7] 张喜善, 周雪艳. 正交变换在多元函数积分中的应用[J]. 山西财经大学学报, 2011, 33(S2): 87.
[8] 谭继智. 正交变换在积分中的应用[J]. 大连大学学报, 1997, 7(2): 148-151.
[9] 姚云飞. 正交变换在重积分中某些应用[J]. 数学的实践与认识, 2003, 33(9): 139-144.
[10] 王萼芳, 石生明. 高等代数[M]. 第 3 版. 北京: 高等教育出版社, 2007.
[11] 陈纪修, 於崇华, 金路. 数学分析[M]. 第 2 版. 北京: 高等教育出版社, 2004.