Pure Mathematics 理论数学, 2022, 12(8), 1305-1311
Published Online August 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.128143

Hans汉斯

三维可压缩磁流体力学方程的重要估计

王　帅，陈　菲[*]，王传宝

青岛大学，数学与统计学院，山东 青岛

收稿日期：2022年7月11日；录用日期：2022年8月10日；发布日期：2022年8月17日

摘　要

本文主要研究了三维可压缩磁流体力学方程其线性方程解的重要估计。当频率分别满足$|\xi| \le k_0$和$k_1 \le |\xi| \le k_2$时，通过傅里叶变换的方法，我们建立了两个重要的估计。从频率分解角度来看，ξ的两个取值范围对应着低频率和中频率，这对于研究三维可压缩磁流体力学非线性方程解的时间衰减率有重要作用。

关键词

频率分解，傅里叶变换，可压缩磁流体力学方程

The Important Estimates for Compressible MHD Equations

Shuai Wang, Fei Chen[*], Chuanbao Wang

School of Mathematics and Statistics, Qingdao University, Qingdao Shandong

Received: Jul. 11th, 2022; accepted: Aug. 10th, 2022; published: Aug. 17th, 2022

Abstract

In this paper, the important estimates of solution about linear equations to three-dimensional compressible magnetohydrodynamic equations are mainly studied. By Fourier splitting method, we establish two important estimates in case of the frequency satisfying $|\xi| \le k_0$ and $k_1 \le |\xi| \le k_2$ respectively. From the perspective of frequency decomposition, the two value ranges of ξ correspond to low frequency and medium frequency, which plays an important role in the study of the time decay rates of solution about nonlinear equations to three-dimensional compressible magnetohydrodynamic equations.

[*]通讯作者。

文章引用: 王帅, 陈菲, 王传宝. 三维可压缩磁流体力学方程的重要估计[J]. 理论数学, 2022, 12(8): 1305-1311.
DOI: 10.12677/pm.2022.128143

Keywords

Frequency Decomposition, Fourier Transform, Compressible Magnetohydrodynamic Equations

1. 引言

对于 $(x,t)\in R^3\times R^+$，可压缩磁流体力学(magnetohydrodynamic，简记为 MHD)方程为：

$$\begin{cases}\partial_t\sigma+\mathrm{div}(\sigma u)=0,\\ \partial_t(\sigma u)+\mathrm{div}(\sigma u\otimes u)-\mu\Delta u-(\mu+\lambda)\nabla\mathrm{div}u+\nabla P=\mathrm{curl}M\times M,\\ \partial_t M-\nu\Delta M=\mathrm{curl}(u\times M),\ \mathrm{div}M=0,\\ (\sigma,u,M)(x,0)=(\sigma_0,u_0,M_0)(x)\to(1,0,0),\ |x|\to+\infty,\end{cases}\tag{1}$$

其中，$\sigma\in R^+$ 表示流体密度，$u\in R^3$ 表示流体速度场，$M\in R^3$ 表示磁场和 $P=P(\sigma)=\sigma^\gamma$ ($\gamma\ge 1$ 为绝热指数)表示压力。粘性系数 μ 和 λ 满足 $\mu>0$，$2\mu+3\lambda>0$，以及正常数 ν 表示磁扩散系数。

三维可压缩 MHD 方程不但具有重要的物理意义和广泛的实际应用，研究 MHD 方程的数学理论也有重要的意义。研究其数学理论的方法有很多，例如能量方法、调和分析方法(傅里叶变换、频率分解等)和 RSAV 方法等(参考文献[1]-[7]等)。本文主要借助于调和分析方法来建立三维可压缩 MHD 方程线性方程的中低频部分的估计，此类估计在后续建立三维可压缩 MHD 非线性方程某种大初值解的最优时间衰减率时将发挥重要作用。

下面，我们来回顾一些关于三维可压缩 MHD 方程解的时间衰减率的结果。Shi-Zhang [4]研究了初值低频部分在 $\dot{B}^{-b}_{2,\infty}$ 范数意义下小时，解在 L^r 范数下的时间衰减率。当初值满足 $L^l\left(1\le l<\frac{6}{5}\right)\cap H^3$ 时，Chen-Tan [8]建立了小初值解的整体存在性和时间衰减率，类似的时间衰减率结论可以参考[9] [10]，进一步，[11] [12]得到了解的高阶导数的最优时间衰减率。除此之外，当初值分别在 $H^S(S\ge 3)\cap\dot{B}^{-s}_{2,\infty}\left(0\le s\le\frac{5}{2}\right)$ 和 $H^L(L\ge 3)\cap\dot{H}^{-n}\left(0\le n<\frac{3}{2}\right)$ 时，Huang-Lin-Wang [13]和 Tan-Wang [14]得到了对应的小初值解的时间衰减率。近来，Chen-Huang-Xu [15]研究了 $L^1\cap H^2$ 中的大初值解的时间衰减率：$\|(\sigma-1,u,M)\|_{H^1}\le C(1+t)^{-\frac{3}{4}}$，Gao-Wei-Yao [16]进一步优化了磁场的时间衰减率：$\|M_t\|_{L^2}+\|\nabla M\|_{H^1}\le C(1+t)^{-\frac{5}{4}}$。

基于文章[15] [16]中解的二阶导数的时间衰减率并不是最优的，因此，我们试图借助 Wang-Wen [6]的方法，通过能量估计、傅里叶变换和频率分解等方法建立大初值解的最优时间衰减率。而在频率分解之后，最基本的一步就需要建立对 MHD 方程其线性方程解的低频率和中频率的估计，所以，我们得到了本文的主要结论：定理 1.1 和定理 1.2，分别对应着对于方程(1)傅里叶变换的线性方程(11)解的低频率和中频率的估计。基于两个定理，可以得到方程(1)线性方程解的中低频的能量估计，进而建立非线性方程解的中低频的能量估计，最终就可以得到非线性方程解的时间衰减率。

本文结构主要为：首先是主要定理的描述，其次是定理的证明过程，包括改写方程、定理 1.1 证明和定理 1.2 证明。

2. 主要结论

定理 1.1.

对于方程(1)傅里叶变换的线性方程(11)，对任意的$|\xi| \le k_0$， k_0 见(19)，存在常数C_l使得

$$l(\xi,t) \le \mathrm{e}^{-c_l|\xi|^2 t} l(\xi,0), \tag{2}$$

其中，$l(\xi,t) \sim |\hat{q}|^2 + |\hat{\Upsilon}|^2 + |\hat{M}|^2$， $q = \sigma - 1$， $\Upsilon = (-\Delta)^{-\frac{1}{2}} \mathrm{div} u$。

定理 1.2.

对于方程(1)傅里叶变换的线性方程(11)，任意的常数$0 < k_1 < k_2$，存在常数$\varsigma > 0$ (依赖于η, ν, k_1, k_2)，使得对任意的$k_1 \le |\xi| \le k_2$和$t \in R^+$， $|\mathrm{e}^{-tQ}| \le C\mathrm{e}^{-\varsigma t}$成立，$Q$ 见(13)，进一步可得到

$$\left|(\hat{q}, \hat{\Upsilon}, \hat{M})(\xi,t)\right| \le C\mathrm{e}^{-\varsigma t} \left|(\hat{q}, \hat{\Upsilon}, \hat{M})(\xi,0)\right|, \tag{3}$$

其中，常数$C > 0$与时间无关。

备注

定理 1.1 和定理 1.2 的具体应用将会在后续对解的时间衰减率的研究中得以体现。

3. 定理证明过程

3.1. 改写方程

定义$q = \sigma - 1$，改写(1)

$$\begin{cases} \partial_t q + \mathrm{div} u = f_1, \\ \partial_t u + P'(1)\nabla q - \mu\Delta u - \eta\nabla \mathrm{div} u = f_2, \\ \partial_t M - \nu\Delta M = f_3, \ \mathrm{div} M = 0, \\ (q,u,M)(x,0) = (q_0,u_0,M_0)(x) \to (0,0,0), |x| \to +\infty, \end{cases} \tag{4}$$

令$\eta = \mu + \lambda$， 此处的非线性项为

$$\begin{cases} f_1 = -q\mathrm{div} u - u \cdot \nabla q, \\ f_2 = -u \cdot \nabla u - \left(\dfrac{P'(1+q)}{1+q} - P'(1)\right)\nabla q - \dfrac{q}{q+1}(\mu\Delta u + \eta\nabla \mathrm{div} u) \\ \quad + \dfrac{1}{q+1}(M \cdot \nabla M + M \cdot \nabla^t M), \\ f_3 = M \cdot \nabla u - (\mathrm{div} u) M - u \cdot \nabla M. \end{cases} \tag{5}$$

定义$\Lambda = (-\Delta)^{\frac{1}{2}}$， $\Upsilon = \Lambda^{-1}\mathrm{div} u$， 进一步， $u = -\Lambda^{-1}\nabla\Upsilon + \Lambda^{-1}\mathrm{curl}(\Lambda^{-1}\mathrm{curl} u)$， 由此根据(4)，可以验证

$$\begin{cases} \partial_t q + \Lambda\Upsilon = f_1, \\ \partial_t \Upsilon - P'(1)\Lambda q - (\mu+\eta)\Delta\Upsilon = \Lambda^{-1}\mathrm{div} f_2, \\ \partial_t M - \nu\Delta M = f_3, \end{cases} \tag{6}$$

且$\Gamma u = \Lambda^{-1}\mathrm{curl} u$满足

$$\begin{cases} \partial_t \Gamma u - \mu\Delta\Gamma u = \Gamma f_2, \\ \Gamma u(x,0) = \Gamma u_0(x), \end{cases} \tag{7}$$

其中，$\operatorname{div}\Gamma u=0$。

基于上面的分析，对 u 的估计便转化为对 Υ 和 Γu 的估计。

首先，对(7)作傅里叶变换，其线性部分为

$$\partial_t\widehat{\Gamma u}+\mu|\xi|^2\widehat{\Gamma u}=0, \tag{8}$$

因而，对任意的 $|\xi|\ge 0$，有

$$\left|\widehat{\Gamma u}(\xi,t)\right|^2\le C\mathrm{e}^{-\mu|\xi|^2t}\left|\widehat{\Gamma u}(\xi,0)\right|^2. \tag{9}$$

其次，对(6)作傅里叶变换，得到

$$\begin{cases}\partial_t\hat{q}+|\xi|\hat{\Upsilon}=\hat{f}_1,\\ \partial_t\hat{\Upsilon}-P'(1)|\xi|\hat{q}+(\mu+\eta)|\xi|^2\hat{\Upsilon}=\widehat{\Lambda^{-1}\operatorname{div}f_2},\\ \partial_t\hat{M}+\nu|\xi|^2\hat{M}=\hat{f}_3,\end{cases} \tag{10}$$

显然，其线性方程为

$$\begin{cases}\partial_t\hat{q}+|\xi|\hat{\Upsilon}=0,\\ \partial_t\hat{\Upsilon}-P'(1)|\xi|\hat{q}+(\mu+\eta)|\xi|^2\hat{\Upsilon}=0,\\ \partial_t\hat{M}+\nu|\xi|^2\hat{M}=0,\end{cases} \tag{11}$$

事实上，(11)可写成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}\hat{q}\\ \hat{\Upsilon}\\ \hat{M}\end{pmatrix}+Q\begin{pmatrix}\hat{q}\\ \hat{\Upsilon}\\ \hat{M}\end{pmatrix}=0, \tag{12}$$

此处

$$Q=\begin{pmatrix}0 & |\xi| & 0\\ -P'(1)|\xi| & (\mu+\eta)|\xi|^2 & 0\\ 0 & 0 & \nu|\xi|^2\end{pmatrix}. \tag{13}$$

3.2. 定理 1.1 证明

根据(11)，计算得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{P'(1)|\hat{q}|^2+\left|\hat{\Upsilon}\right|^2+\left|\hat{M}\right|^2}{2}\right)+(\mu+\eta)|\xi|^2\left|\hat{\Upsilon}\right|^2+\nu|\xi|^2\left|\hat{M}\right|^2=0. \tag{14}$$

对(11)的第一个式子乘 $\overline{\hat{\Upsilon}}$，第二个式子先求共轭再乘 $\hat{q}$，然后，把二者所得的结果相加并两边取实部得到

$$2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{Re}\left(\hat{q}\overline{\hat{\Upsilon}}\right)+|\xi|\left|\hat{\Upsilon}\right|^2-P'(1)|\xi||\hat{q}|^2=-(\mu+\eta)|\xi|^2\mathrm{Re}\left(\hat{q}\overline{\hat{\Upsilon}}\right). \tag{15}$$

选取一个小的固定常数 $\delta_*>0$，把 $-\delta_*|\xi|\times(15)$和(14)相加，并根据杨不等式得

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{P'(1)|\hat{q}|^2+|\hat{\Upsilon}|^2+|\hat{M}|^2-4\delta_*|\xi|\mathrm{Re}\left(\hat{q}\bar{\hat{\Upsilon}}\right)}{2}\right)\\
&+(\mu+\eta)|\xi|^2|\hat{\Upsilon}|^2+\nu|\xi|^2|\hat{M}|^2-\delta_*|\xi|^2|\hat{\Upsilon}|^2+P'(1)\delta_*|\xi|^2|\hat{q}|^2\\
&=\delta_*(\mu+\eta)|\xi|^3\mathrm{Re}\left(\hat{q}\bar{\hat{\Upsilon}}\right)\\
&\le\frac{\delta_*(\mu+\eta)^2}{2P'(1)}|\xi|^4|\hat{\Upsilon}|^2+\frac{P'(1)\delta_*}{2}|\xi|^2|\hat{q}|^2.
\end{aligned}
\tag{16}
$$

选取

$$
0<\delta_*\le\min\left\{\frac{1}{2},\frac{\mu+\eta}{2}\right\},\tag{17}
$$

可以验证

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{P'(1)|\hat{q}|^2+|\hat{\Upsilon}|^2+|\hat{M}|^2-4\delta_*|\xi|\mathrm{Re}\left(\hat{q}\bar{\hat{\Upsilon}}\right)}{2}\right)\\
&+\frac{\mu+\eta}{2}|\xi|^2|\hat{\Upsilon}|^2+\nu|\xi|^2|\hat{M}|^2+\frac{P'(1)\delta_*}{2}|\xi|^2|\hat{q}|^2\le\frac{(\mu+\eta)^2}{4P'(1)}|\xi|^4|\hat{\Upsilon}|^2.
\end{aligned}
\tag{18}
$$

选取常数 k_0 满足

$$
|\xi|\le k_0\le\min\left\{\sqrt{\frac{P'(1)}{\mu+\eta}},\frac{1}{2},\frac{P'(1)}{2}\right\},\tag{19}
$$

使得

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}l(\xi,t)+\frac{\mu+\eta}{4}|\xi|^2|\hat{\Upsilon}|^2+\nu|\xi|^2|\hat{M}|^2+\frac{P'(1)\delta_*}{2}|\xi|^2|\hat{q}|^2\le 0,\tag{20}
$$

此处

$$
l(\xi,t)=\frac{P'(1)|\hat{q}|^2+|\hat{\Upsilon}|^2+|\hat{M}|^2-4\delta_*|\xi|\mathrm{Re}\left(\hat{q}\bar{\hat{\Upsilon}}\right)}{2},\tag{21}
$$

由于 $\delta_* k_0\le\min\left\{\frac{1}{4},\frac{P'(1)}{4}\right\}$，根据杨不等式可以得到

$$
l(\xi,t)\sim|\hat{q}|^2+|\hat{\Upsilon}|^2+|\hat{M}|^2.\tag{22}
$$

因此，对任意 $|\xi|\le k_0$，存在常数 C_l 使得

$$
C_l|\xi|^2 l(\xi,t)\le\frac{\mu+\eta}{4}|\xi|^2|\hat{\Upsilon}|^2+\nu|\xi|^2|\hat{M}|^2+\frac{P'(1)\delta_*}{2}|\xi|^2|\hat{q}|^2.\tag{23}
$$

结合(20)和(23)，得到

$$
l(\xi,t)\le \mathrm{e}^{-c_l|\xi|^2 t}l(\xi,0).
$$

定理 1.1 的证明完毕。

3.3. 定理 1.2 证明

根据矩阵 Q，计算其特征多项式

$$\begin{aligned} Q_{\lambda_0} &= \left(\lambda_0^2 - (\mu+\eta)|\xi|^2 \lambda_0 + P'(1)|\xi|^2\right)\left(\lambda_0 - \nu|\xi|^2\right) \\ &= a_0\lambda_0^3 - a_1\lambda_0^2 + a_2\lambda_0 - a_3, \end{aligned} \tag{24}$$

此处，$a_0 = 1$，$a_1 = (\mu+\eta)|\xi|^2 + \nu|\xi|^2$，$a_2 = \nu(\mu+\eta)|\xi|^4 + P'(1)|\xi|^2$，$a_3 = \nu P'(1)|\xi|^4$。

由于 a_0 至 a_3 均大于 0，根据 Routh-Hurwitz 定理，所有的根有正实部当且仅当

$$Q_1 = a_1 = (\mu+\eta)|\xi|^2 + \nu|\xi|^2 > 0,$$

$$Q_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} = \nu(\mu+\eta)^2|\xi|^6 + P'(1)(\mu+\eta)|\xi|^4 + \nu^2(\mu+\eta)|\xi|^6 > 0,$$

在文章[1]中，通过根据 Routh-Hurwitz 定理，分析得到了相应特征多项式的所有根有正实部，进而建立了关于中频率的估计([1]中(55)式)，据此便有，对于任意的常数 $0 < k_1 < k_2$，存在常数 $\varsigma > 0$，ς 仅依赖于 η, ν, k_1, k_2，使得对任意的 $k_1 \le |\xi| \le k_2$ 和 $t \in R^+$

$$\left|e^{-tQ}\right| \le Ce^{-\varsigma t} \tag{25}$$

成立，进一步，结合(12)和(25)，即可得到

$$\left|\left(\hat{q}, \hat{\Upsilon}, \hat{M}\right)(\xi, t)\right| \le \left|e^{-tQ}\left(\hat{q}, \hat{\Upsilon}, \hat{M}\right)(\xi, 0)\right| \le Ce^{-\varsigma t}\left|\left(\hat{q}, \hat{\Upsilon}, \hat{M}\right)(\xi, 0)\right|.$$

定理 1.2 的证明完毕。

基金项目

国家自然科学基金资助项目(编号：12101345)，山东省自然科学基金资助项目(编号：ZR2021QA017)。

参考文献

[1] Danchin, R. and Ducomet, B. (2014) On a Simplified Model for Radiating Flows. *Journal of Evolution Equations*, **14**, 155-195. https://doi.org/10.1007/s00028-013-0211-5

[2] Hu, X.P. and Wang, D.H. (2010) Global Existence and Large-Time Behavior of Solutions to the Three-Dimensional Equations of Compressible Magnetohydrodynamic Flows. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **197**, 203-238. https://doi.org/10.1007/s00205-010-0295-9

[3] Jiang, M.S., Zhang, Z.Y. and Zhao, J. (2022) Improving the Accuracy and Consistency of the Scalar Auxiliary Variable (SAV) Method with Relaxation. *Journal of Computational Physics*, **456**, Article ID: 110954. https://doi.org/10.1016/j.jcp.2022.110954

[4] Shi, W.X. and Zhang, J.Z. (2021) A Remark on the Time-Decay Estimates for the Compressible Magnetohydrodynamic System. *Applicable Analysis*, **100**, 2478-2498. https://doi.org/10.1080/00036811.2020.1745779

[5] Suen, A. and Hoff, D. (2012) Global Low-Energy Weak Solutions of the Equations of Three-Dimensional Compressible Magnetohydrodynamics. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **205**, 27-58. https://doi.org/10.1007/s00205-012-0498-3

[6] Wang, W.J. and Wen, H.Y. (2022) Global Well-Posedness and Time-Decay Estimates for Compressible Navier-Stokes Equations with Reaction Diffusion. *Science China Mathematics*, **65**, 1199-1228. https://doi.org/10.1007/s11425-020-1779-7

[7] Zhu, L.M. and Zi, R.Z. (2021) Decay Estimates of the Smooth Solution to the Compressible Magnetohydrodynamic Equations on T^3. *Journal of Differential Equations*, **288**, 1-39. https://doi.org/10.1016/j.jde.2021.04.010

[8] Chen, Q. and Tan, Z. (2010) Global Existence and Convergence Rates of Smooth Solutions for the Compressible Magnetohydrodynamic Equations. *Nonlinear Analysis*: *Theory Methods and Applications*, **72**, 4438-4451. https://doi.org/10.1016/j.na.2010.02.019

[9] Li, F.C. and Yu, H.J. (2011) Optimal Decay Rate of Classical Solutions to the Compressible Magnetohydrodynamic Equations. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*. *Section A*: *Mathematics*, **141**, 109-126. https://doi.org/10.1017/S0308210509001632

[10] Pu, X.K. and Guo, B.L. (2013) Global Existence and Convergence Rates of Smooth Solutions for the Full Compressible MHD Equations. *Zeitschrift für angewandteMathematik und Physik*, **64**, 519-538. https://doi.org/10.1007/s00033-012-0245-5

[11] Gao, J.C., Chen, Y.H. and Yao, Z.A. (2015) Long-Time Behavior of Solution to the Compressible Magnetohydrodynamic Equations. *Nonlinear Analysis*, **128**, 122-135. https://doi.org/10.1016/j.na.2015.07.028

[12] Gao, J.C., Tao, Q. and Yao, Z.A. (2016) Optimal Decay Rates of Classical Solutions for the Full Compressible MHD Equations. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*, **67**, Article No. 23. https://doi.org/10.1007/s00033-016-0616-4

[13] Huang, W.T., Lin, X.Y. and Wang, W.W. (2021) Decay-in-Time of the Highest-Order Derivatives of Solutions for the Compressible Isentropic MHD Equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **502**, Article ID: 125273. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2021.125273

[14] Tan, Z. and Wang, H.Q. (2013) Optimal Decay Rates of the Compressible Magnetohydrodynamic Equations. *Nonlinear Analysis*: *Real World Applications*, **14**, 188-201. https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2012.05.012

[15] Chen, Y.H., Huang, J.C. and Xu, H.Y. (2019) Global Stability of Large Solutions of the 3-D Compressible Magnetohydrodynamic Equations. *Nonlinear Analysis*: *Real World Applications*, **47**, 272-290. https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2018.11.001

[16] Gao, J.C., Wei, Z.Z. and Yao, Z.A. (2020) Decay Rate of Strong Solution for the Compressible Magnetohydrodynamic Equations with Large Initial Data. *Applied Mathematics Letters*, **102**, Article ID: 106100. https://doi.org/10.1016/j.aml.2019.106100