Pure Mathematics 理论数学, 2022, 12(8), 1291-1295
Published Online August 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.128141

关于$PSL(3,p)$上的3度s-弧传递图的一个注记

秦靖玻

云南财经大学，统计与数学学院，云南 昆明

收稿日期：2022年7月6日；录用日期：2022年8月5日；发布日期：2022年8月15日

摘 要

如果一个图的自同构子群G在图的4-弧集上的作用是传递的，则称该图是$(G,4)$-弧传递的。本文运用三维特殊射影线性群的子群结构以及相关群论的知识，构造了一类新的连通的3度$(PSL(3,p),4)$-弧传递图，其中 $p \equiv 3 \pmod 8$ 为素数。

关键词

特殊射影线性群，极大子群，弧传递图

A Note on Cubic s-Arc-Transitive Graph Admitting an Automorphism Group $PSL(3,p)$

Jingbo Qin

School of Statistics and Mathematics, Yunnan University of Finance and Economics, Kunming Yunnan

Received: Jul. 6th, 2022; accepted: Aug. 5th, 2022; published: Aug. 15th, 2022

Abstract

A graph is said to be $(G,4)$-arc-transitive if its automorphism subgroup G acts transitively on its 4-arcs. In this paper, we construct a new family of connected cubic $(PSL(3,p),4)$-transitive graphs by using the subgroup structure of special projective linear groups and the knowledge of related group theory, where p is a prime and $p \equiv 3 \pmod 8$.

Keywords

Special Projective Linear Group, Maximal Subgroup, Arc-Transitive Graph

文章引用: 秦靖玻. 关于 $PSL(3,p)$上的 3 度 s-弧传递图的一个注记[J]. 理论数学, 2022, 12(8): 1291-1295.
DOI: 10.12677/pm.2022.128141

1. 引言

本文考虑的图都是连通，无向，无重边，无自环的。

对于一个图Γ，我们分别用符号$V\Gamma$，$E\Gamma$，$A\Gamma$来表示其顶点集，边集，弧集，用$Aut(\Gamma)$表示其自同构群。设$G \le Aut(\Gamma)$，如果G作用在弧集上是传递的，则称Γ是G-弧传递图。对于Γ的一个顶点序列$(a_0, a_1, \cdots, a_s)$，其中s是一个正整数，$(a_{i-1}, a_i) \in E\Gamma$且$a_{i-1} \ne a_{i+1}$ $(1 \le i \le s-1)$，则称其为图Γ的一个s-弧，若G在s-弧集上传递，则称Γ是(G,s)-弧传递的。通常而言，若一个图是(G,s)-弧传递的，那么其往往也是$(G,s-1)$-弧传递的。进一步地，若G在s-弧集上传递，但在$s+1$-弧集上不传递，则称Γ是(G,s)-传递的。

对s-弧传递图的研究源于1947年*Tutte*在[1]中对3度s-弧传递图的研究，其证明了不存在$s \ge 6$的3度s-弧传递图。之后，*Weiss*在[2]中将其一般化，他证明了除圈外，不存在$s = 6$和$s \ge 8$的s-弧传递图。1992年，*Praeger*在[3]中将本原群的O'Nan-Scott定理推广到了拟本原情形，并给出了2-弧传递图的分类步骤：

1) 决定所有的顶点拟本原与二部拟本原的2-弧传递图(这些图也被称为基图)；
2) 决定上述基图的正规覆盖。

在此策略指导下，2-弧传递图得到广泛研究。由于2-弧传递图的基图刻画很多时候可以归约到研究自同构群为几乎单群的情形，所以后续很多学者对此情形做了研究。例如，*Fang*和*Prager*在[4]和[5]中分别分类了Suzuki群和Ree群作用下的2-弧传递图；*Hassani*等人在[6]中分类了容许二维线性群$PSL(2,q)$作用下的2-弧传递图；2004年，*Chen*在其博士论文[7]中分类了$PSL(3,q)$的s-弧传递图，其中$s \ge 2$。更多关于几乎单群弧传递图的分类，可见[8] [9] [10]。

本文中，我们的主要结论是以下定理，这类图是新发现的，但并未出现在[7]中。

定理1.1：设$G = PSL(3,p)$，其中$p \equiv 3 \pmod 8$为奇素数，则存在一个3度的$(G,4)$-弧传递图，其中点稳定子同构于S_4。

本文结构如下：在第二节中，给出了一些群论和图论的相关定义和引理。在第三节中，给出**定理1.1**中图的构造和该图性质的证明。

2. 预备知识

*Aschbacher*在[11]中定义了典型群的8种几何类：$C_1, C_2, \cdots, C_8$和一个C类，并表明了有限典型群的子群包含在这几种类型中。之后，*O.H. King*在[12]中介绍了维数不超过4的有限典型群的子群结构，从中可以读出射影线性群$PGL(2,p)$的子群结构。

引理2.1 [[12]，推论2.3]设$G = PGL(2,p)$，其中p是奇素数，则G的极大子群为下列群之一：

1) $D_{2(p-1)}$，$p > 5$；
2) $D_{2(p+1)}$；
3) $\mathbb{Z}_p : \mathbb{Z}_{p-1}$；
4) $PSL(2,p)$；
5) S_4，其中$p \equiv \pm 3 \pmod 8$。

文献[[13]，表 8.3]给出了特殊线性群 $SL(3,q)$ 的极大子群结构，结合 *Du* 等在[14]中给出 $SL(3,q)$ 的子群结构，可以得到下列引理：

引理 2.2 [13] [14]设 $G=PSL(3,p)$，其中 p 是奇素数，则 G 的极大子群为下列群之一：

1) C_1 类：$\mathbb{Z}_p^2:\left(SL(2,p).\frac{p-1}{(3,p-1)}\right)$，同构于 $AGL(2,p)$ 的一个子群；

2) C_2 类：$\mathbb{Z}_{p-1}^2/\mathbb{Z}_{(3,p-1)}:S_3$；

3) C_3 类：$\mathbb{Z}_{p^2+p+1}/\mathbb{Z}_{(3,p-1)}:\mathbb{Z}_3$；

4) C_6 类：$\mathbb{Z}_3^2:Q_8$，其中 $p\equiv 4,7(\bmod 9)$ 或者 $\mathbb{Z}_3^2:SL(2,3)$，其中 $p\equiv 1(\bmod 9)$；

5) C_8 类：$PGL(2,p)$，$p\geq 5$；

6) C 类：$PSL(2,7)$，其中 $p^3\equiv 1(\bmod 7)$ 或者 A_6，其中 $p\equiv 1,19(\bmod 30)$。

在文献[15]中，给出了 3 度的弧传递图的点稳定子，即为如下引理：

引理 2.3 [15]设 Γ 是一个连通的 3 度 (G,s)-弧传递图，$\alpha\in V\Gamma$，G_α 是 G 中稳定 α 的点稳定子，则 $1\leq s\leq 5$，而且

1) 若 $s=1$，则 $G_\alpha=\mathbb{Z}_3$；

2) 若 $s=2$，则 $G_\alpha=S_3$；

3) 若 $s=3$，则 $G_\alpha=S_3\times\mathbb{Z}_2$；

4) 若 $s=4$，则 $G_\alpha=S_4$；

5) 若 $s=5$，则 $G_\alpha=S_4\times\mathbb{Z}_2$。

最后，我们给出陪集图的相关概念与性质。

定义 2.4 [16]设 G 是一个有限群，H 是 G 的一个无核子群，即 H 不包含 G 的非平凡正规子群，$g\in G$。定义群 G 关于 H 和 HgH 的陪集图 $\Gamma=\mathrm{Cos}(G,H,HgH)$，这里顶点集 $V\Gamma$ 为 H 在 G 中的全体右陪集，边集 $E\Gamma=\{\{Hx,Hax\}\,|\,a\in HgH\}$。

引理 2.5 [16]设 $\Gamma=\mathrm{Cos}(G,H,HgH)$，其中 H 是 G 的一个无核子群，$g\in G$，则：

1) 图 Γ 是无向的当且仅当 $HgH=Hg^{-1}H$；

2) 图 Γ 是连通的当且仅当 $G=\langle H,g\rangle$；

3) 图 Γ 的度数 $val(\Gamma)=|HgH:H|=|H:H\cap H^g|$。

3. 构造及定理 1.1 的证明

图的构造： 设 $G=PSL(3,p)$，其中 $p\equiv 3(\bmod 8)$ 为一个素数。若 $p=3$，由 Atlas [17]，G 中存在一个同构于 S_4 的子群。若 $p>3$，由引理 2.2 可知，$PGL(2,p)$ 是 G 的一个极大子群。又由引理 2.1 可知，S_4 是 $PGL(2,p)$ 的一个极大子群，所以此时 G 中也存在一个同构于 S_4 的子群。设 H 是 G 的一个同构于 S_4 的子群，A 为 H 的 Sylow 2-子群，$|A|=8$。由 Sylow 第二定理可知，G 存在 Sylow 2-子群 E，$|E|=16$，使得 $A\leq E$，取 $g\in E-A$，令 $\Gamma=\mathrm{Cos}(G,H,HgH)$。

接下来我们证明上述构造的图 Γ 是连通的 3 度 $(G,4)$-弧传递图。

引理 3.1 H 不含在 G 的 C_1 类极大子群。

证明 反证：如果 H 含在 G 的 C_1 类极大子群中，即 $H\leq\mathbb{Z}_p^2:\left(SL(2,p).\frac{p-1}{(3,p-1)}\right)$。设 $H\cap\mathbb{Z}_p^2=K$，因为 H 的非平凡正规子群只有 A_4，$\mathbb{Z}_2^2$ 两个，所以 K 只能为 H，A_4，$\mathbb{Z}_2^2$ 或者 1。若 $K=H$，则 $H\leq\mathbb{Z}_p^2$，

矛盾；若 $K=A_4$，则 $A_4\le\mathbb{Z}_p^2$，矛盾；若 $K=\mathbb{Z}_2^2$，则 $\mathbb{Z}_2^2\le\mathbb{Z}_p^2$，但是这里 p 是奇素数，矛盾；所以 $K=1$，那么 $H\le\left(SL(2,p).\frac{p-1}{(3,p-1)}\right)$。又因为 $SL(2,p)$ 中仅有一个 2 阶元，所以 $H\cap SL(2,p)=1$，进而有 $H\le\mathbb{Z}_{\frac{p-1}{(3,p-1)}}$，矛盾，从而 H 不含在 G 的 C_1 类极大子群。

引理 3.2 Γ 是连通的无向图。

证明 因为 $p\equiv 3(\bmod 8)$，所以 G 的 C_1 类极大子群 $\mathbb{Z}_p^2:\left(SL(2,p).\frac{p-1}{(3,p-1)}\right)$ 的 Sylow 2-子群的阶为 16，且剩余各类极大子群的 Sylow 2-子群的阶均不超过 8，所以 E 只含在 G 的 C_1 类极大子群。由**引理 3.1** 可知 H 不含在 G 的 C_1 类极大子群，所以 $\langle E,H\rangle=G$。又因为 $A\le H$，$\langle A,g\rangle=E$，所以 $\langle H,g\rangle\ge\langle H,E\rangle=G$，则 $\langle H,g\rangle=G$。因为 $|E:A|=2$ 以及 $g\in E-A$，所以 $g^2\in A\le H$，从而 $Hg^{-1}H=Hg\cdot g^{-2}H=HgH$，由**引理 2.5** 可知 Γ 是连通的无向图。

引理 3.3 构造中的图是 3 度图。

证明 由于 $|E:A|=2$，所以 $A\lhd E$。又 $g\in E-A$，所以 $A^g=A$，从而 $A=A^g\le H^g$，因此 $A\le H^g\cap H$。由 H 及 A 的阶数可知，要么 $H^g\cap H=A$，要么 $H^g\cap H=H$。若 $H^g\cap H=H$，则 $g\in N_G(H)$，从而 $G=\langle H,g\rangle=N_G(H)$，即 $H\lhd G$，这与 G 是单群相矛盾，于是 $H^g\cap H=A$，所以 $val(\Gamma)=|HgH:H|=3$。

至此，这就完成了主要定理的证明。

基金项目

云南省科技厅应用基础研究项目(2019FD116)资助。

参考文献

[1] Tutte, W.T. (1947) A Family of Cubical Graphs. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **43**, 459-474. https://doi.org/10.1017/S0305004100023720

[2] Weiss, R. (1981) The Nonexistence of 8-Transitive Graphs. *Combinatorica*, **1**, 309-311. https://doi.org/10.1007/BF02579337

[3] Praeger, C.E. (1993) An O'Nan-Scott Theorem for Finite Quasiprimitive Permutation Groups and an Application to 2-Arc Transitive Graphs. *Journal of the London Mathematical Society*, **2-47**, 227-239. https://doi.org/10.1112/jlms/s2-47.2.227

[4] Fang, X.G. and Preager, C.E. (1999) Fintte Two-Arc Transitive Graphs Admitting a Suzuki Simple Group. *Communications in Algebra*, **27**, 3727-3754. https://doi.org/10.1080/00927879908826659

[5] Fang, X.G. and Praeger, C. (1999) Finite Two-ARC Transitive Graphs Admitting a Ree Simple Group. *Communications in Algebra*, **27**, 3755-3769. https://doi.org/10.1080/00927879908826660

[6] Hassani, A., Nochefranca, L.R. and Praeger, C.E. (1999) Two-Arc Transitive Graphs Admitting a Two-Dimensional Projective Linear Group. *Journal of Group Theory*, **2**, 335-353.

[7] 陈尚弟. 特殊射影线性群 PSL(3,*q*)与 2-弧传递图[D]: [博士学位论文]. 杭州: 浙江大学, 2004.

[8] Pan, J.M., Wu, C.X., and Zhang, Y.N. (2022) 2-Arc-Transitive Hexavalent Cayley Graphs on Nonabelian Simple Groups. *Communications in Algebra*. https://doi.org/10.1080/00927872.2022.2077952

[9] Du, J.L., and Feng, Y.Q. (2019) Tetravalent 2-Arc-Transitive Cayley Graphs on Non-Abelian Simple Groups. *Communications in Algebra*, **47**, 4565-4574. https://doi.org/10.1080/00927872.2018.1549661

[10] Yin, F.G., Feng, Y.Q., and Zhou, J.X. and Chen, S.-S. (2021) Arc-Transitive Cayley Graphs on Nonabelian Simple Groups with Prime Valency. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, **177**, Article ID: 105303. https://doi.org/10.1016/j.jcta.2020.105303

[11] Aschbacher, M. (1984) On the Maximal Subgroups of the Finite Classical Groups. *Inventiones Mathematicae*, **3**, 469-514. https://doi.org/10.1007/BF01388470

[12] King, O.H. (2005) The Subgroup Structure of Finite Classical Groups in Terms of Geometric Configurations. In: Webb, B.S., Ed., *Surveys in Combinatorics* 2005, Cambridge University Press, Cambridge, 29-56. https://doi.org/10.1017/CBO9780511734885.003

[13] Bray, J.N., Holt, D.F. and Roney-Dougal, C.M. (2013) The Maximal Subgroups of the Low-Dimensional Finite Classical Groups. Cambridge University Press, Cambridge. https://doi.org/10.1017/CBO9781139192576

[14] Du, S.F. and Jin, H.K. (2009) Groups PSL(3,*p*) and Nonorientable Regular Maps. *Journal of Algebra*, **321**, 1367-1382. https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2008.11.037

[15] Biggs, N. (1974) Algebraic Graph Theory. Cambridge University Press, Cambridge. https://doi.org/10.1017/CBO9780511608704

[16] Sabidussi, G. (1964) Vertex-Transitive Graphs. *Monatshefte für Mathematik*, **68**, 426-438. https://doi.org/10.1007/BF01304186

[17] Conway, J.H. (1985) Atlas of Finite Groups: Maximal Subgroups and Ordinary Characters for Simple Groups. Oxford University Press, Oxford.