

一类具有传播媒介的SIS传染病模型的动力学性态分析

代林烽, 陈龙伟*

云南财经大学, 云南 昆明

收稿日期: 2023年1月16日; 录用日期: 2023年2月16日; 发布日期: 2023年2月24日

摘要

随着传媒技术的进步和成熟, 媒体对疾病疫情的报道产生的影响已经成为人们预防和控制疾病传播不可忽略的因素之一。文中考虑了疾病信息意识影响, 建立了一个新的具有媒介影响的SIS传染病模型。首先, 对建立的具有媒介影响的新的SIS传染病模型讨论了无病平衡点和地方病平衡点的存在性和基本再生数。其次, 应用Routh-Hurwitz判别准则分别证明了无病平衡点和地方病平衡点的局部渐近稳定性的满足条件。紧接着构造了恰当Lyapunov函数并结合LaSalle不变原理, 分别讨论了无病平衡点和地方病平衡点在不同阈值条件下的全局渐近稳定性。最后进行了数值模拟, 验证在不同阈值条件下系统的稳定性, 比较参数在不同取值时平衡点的变化, 分析传染病的发展规律。数值模拟的结果与理论分析的结果是吻合的。

关键词

疾病信息意识, 平衡点, 稳定性, 基本再生数, Lyapunov函数

Dynamic Behavior Analysis of a Class of SIS Infectious Disease Models with Vectors

Linfeng Dai, Longwei Chen*

Yunnan University of Finance and Economics, Kunming Yunnan

Received: Jan. 16th, 2023; accepted: Feb. 16th, 2023; published: Feb. 24th, 2023

Abstract

With the progress and maturity of media technology, the influence of media on the report of dis-

*通讯作者。

ease has become one of the factors that can not be ignored for people to prevent and control the spread of disease. In this paper, a new SIS infectious disease model with vector influence is established by considering the influence of disease information awareness. First, the existence and basic regeneration numbers of disease-free equilibrium and endemic equilibrium points are discussed for a new model of SIS infectious disease with vector influence. Secondly, the Routh-Hurwitz criterion is applied to prove the local asymptotic stability of disease-free equilibrium and endemic equilibrium. Then an appropriate Lyapunov function is constructed and LaSalle invariance principle is used to discuss the global asymptotic stability of disease-free equilibrium and endemic equilibrium under different threshold conditions. Finally, numerical simulation is carried out to verify the stability of the system under different threshold conditions, compare the changes of equilibrium point when the parameters are different values, and analyze the development law of infectious diseases. The results of numerical simulation agree well with those of theoretical analysis.

Keywords

Disease Information Awareness, Equilibrium Point, Stability, Basic Regeneration Number, Lyapunov Function

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

在当今社会, 传染病名目繁多, 传播途径多种多样, 对人类的整个历史发展进程产生了深远影响[1] [2]。自 1927 年 Kermack 和 McKendrick [3] 提出了利用动力学的方法建立了 SIR 传染病模型, 后继学者又提出了各种传染病的动力学模型。几十年来, 国内外学者针对传染病的各种病例提出了各种动力学模型。目前的主要研究方法有描述性研究, 分析性研究, 实验仿真性研究和理论研究等。

目前, 关于信息传播因素、时滞因素等的研究是传染病动力学研究工作的主要集中方面之一。文献 [4] 中, 媒介报道对疫情传播的影响首次被考虑进传染病模型, 将其看作一个传染系数,

$f(E, I, H) = \beta e^{-a_1 E - a_2 I - a_3 H}$, 但是该模型具有一定的局限性, 没有考虑出生率和死亡率, 这并不适用于实际情况中的疾病。在文献 [5] 中, 崔景安等 [6] 学者在此基础上又加入了系统输入输出人口数量变化影响的因素, 这里假设了系统外来人口增长是满足 Logistic 模型的, 此时建立了如下的模型:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = bS \left(1 - \frac{S}{k}\right) - \mu e^{-mI} SI, \\ \frac{dE}{dt} = \mu e^{-mI} SI - (c + d) E, \\ \frac{dI}{dt} = cE - \gamma I. \end{cases}$$

在上述模型中, 作者仍然采用衰减指数函数 $f(I) = \mu e^{-mI}$ 作为传染系数, 这样一来, 就较为全面地研究了媒体报道的影响。

在 2014 年, 肖燕妮等 [7] 学者提出了一个具有分段光滑传染率函数 $f(I)$ 的 SIR 模型, 具体的分段光滑函数如下:

$$f(I) = \begin{cases} \beta \left(1 - \frac{I}{m+I} \right), & I - I_c \leq 0, \\ \beta \left(1 - \frac{I_c}{m+I_c} \right), & I - I_c > 0. \end{cases}$$

其中, $m(m > 0)$ 是影响因子, 反映的是媒体报道对有效接触率的影响, I_c 则表示临界值。此函数表示的生物学意义是明显的, 即表示媒体报道的影响率是呈现阶段性变化的。

文献[7][8]还研究了疾病信息意识影响下的时滞问题, 参与这方面研究的专家学者并不在少数。今天需要重点关注的是 Misra 等[9]学者提出关于疾病信息意识的表示方式, 这同时也是本文建立考虑疾病信息意识的 SIS 传染病模型的重要依据。Misra 将信息意识视作为一个变量 $M(t)$, 并且构造了媒体报道的影响和传染病这之间的函数关系, 如下:

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = A - \beta XY - \lambda XM - dX + vY + \lambda_0 X_m \\ \frac{dY}{dt} = \beta XY - vY - dX \\ \frac{dX_m}{dt} = \lambda XM - dX_m - \lambda_0 X_m \\ \frac{dM}{dt} = \mu Y - \mu_0 M \end{cases}$$

在这里, 作者将易感染者划分为具有防范意识的易感染者 X_m 和不具有防范意识的易感染者 X 。将疾病信息意识视作为一个变量 $M(t)$, 媒体报道改变了感染者恢复为易感染者的人群具有疾病信息意识的比例。建立具有疾病信息意识的 SIS 传染病数学模型, 从具有疾病信息意识的人群所占比的角度细化了信息意识对疾病传播的影响, 而这是前人尚未完善的工作。

本文做出了如下贡献:

- 1) 本文考虑疾病信息意识对传染病模型的影响, 建立了一个新的具有媒介影响的 SIS 传染病模型。
- 2) 讨论了所建立的具有媒介影响的新的 SIS 传染病模型在无病平衡点和地方病平衡点的稳定性。
- 3) 对建立的模型进行数值模拟实验, 验证在不同阈值条件下系统的稳定性, 比较参数在不同取值时平衡点的变化, 分析传染病的发展规律, 结果表明数值模拟的结果与理论分析的结果是吻合的。

本文的组织结构如下。在第 2 节介绍具有媒介影响的 SIS 传染病模型的内容。在第 3 节介绍提出的模型平衡点的存在性。第 4 节中介绍提出的模型平衡点的稳定性。为了验证所提出模型的有效性, 在第 5 节给出了所提出模型的数值模拟实验结果。在第 6 节给出了结论与展望。

2. 建立具有媒介影响的 SIS 传染病模型

众所周知, 在传染病的传播过程中, 媒介信息的报道会直接影响人群的防范意识, 这具有重要作用。基于众多的研究文献, 建立具有信息传播影响的 SIS 传染病模型

$$\begin{cases} \frac{dS_n}{dt} = -\beta IS_n - \eta MS_n + \tau S_a + r q I \\ \frac{dS_a}{dt} = -\sigma_s \beta IS_a + \eta MS_n - \tau S_a + r p I \\ \frac{dI}{dt} = \beta IS_n + \sigma_s \beta IS_a - r I \\ \frac{dM}{dt} = \omega_0 + \alpha_0 I + \alpha S_a - \lambda_0 M \end{cases} \quad (1)$$

该模型具有如下的初始条件:

$$\begin{cases} S_n(0) = S_{n0} \geq 0 \\ S_a(0) = S_{a0} \geq 0 \\ I(0) = I_0 > 0 \\ S_{n0} + S_{a0} + I_0 = 1 \\ M(0) = M_0 \geq 0 \end{cases} \quad (2)$$

上述模型中, $S_n(t) + S_a(t) + I(t) = 1$. S_n 表示对疾病信息一无所知的易感染者人群, S_a 表示对疾病信息了解比较完善, 有较强的防范意识的易感染者人群. 具有防范意识的感染者人群记为 I . β 为直接传染率, 并将受到修正因子 $0 < \sigma_s < 1$ 的控制. r 为恢复率. p 表示具有防范意识的恢复人群比例, 不具防范意识的恢复人群占比为 q , 有 $p + q = 1$. τ 为防范意识失去速率, 因此对疾病的有效感知时间为 $1/\tau$. 在整个系统中, 认为人们的意识水平由 M 决定, 并且受到稳定常数 ω_0 的控制. 疾病的感染意识与 I 成正比, 比率为 α_0 , 具有防范意识的易感染者输入数量与其本身成正比, 比率为 α . 一旦对疾病的防范意识开始传播开来, 没有防范意识的感染者人群将会以 η 的速率变成具有防范意识的人群, 并且他们的防范意识失去速率为 λ_0 .

3. 平衡点的存在性

3.1. 解的有界性

首先确定微分方程动力系统的解对于所有 $t \in [0, \infty)$ 都是可行的, 即需要讨论解的存在性.

定理 1 在初值条件(2)条件下, 微分动力系统的解 $S_n(t), S_a(t), I(t), M(t)$ 对于所有的 $t \in [0, \infty)$ 都是非负的, 且对 $\forall (S_n, S_a, I, M)$ 有 $0 \leq S_n, S_a, I, M \leq 1$, $0 \leq M \leq \bar{M}$.

证明: 该结果可以使用常规的方法进行验证, 使用文献[10]中的定理 5.2.1 可证明. 因此, 我们得出结论: 在动力系统的演化过程中, 具有初始条件(2)的动力系统(1)的解将保持在有界集内

$$E = \{(S_n, S_a, I, M) \in R^+ \mid 0 \leq S_n \leq 1, 0 \leq S_a \leq 1, 0 \leq I \leq 1, 0 \leq M \leq \bar{M}\}. \quad (3)$$

上式中, $\bar{M} = \max \left[M_0 \frac{\omega_0 + \alpha_0 + \alpha}{\lambda_0} \right]$. 根据 LaSalle 不变原理, 动力系统(1)的解是有界的.

3.2. 平衡点的存在性及基本再生数

通过对系统(1)的求解可以知道, 存在一个无病平衡点 E_0 和一个地方病平衡点 E^* .

3.2.1. 无病平衡点

令 $I = 0$ 时, 可以解得其无病平衡点 $E_0 = (S_n^0, S_a^0, 0, M^0)$, 其中,

$$\begin{aligned} S_n^0 &= 1 - F_0, \quad S_a^0 = F_0, \quad M_0 = (\omega_0 + \alpha F_0) / \lambda_0, \\ F_0 &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\tau \lambda_0 + \eta \omega_0}{\eta \alpha} \right) + \sqrt{\frac{1}{4} \left(1 - \frac{\tau \lambda_0 + \eta \omega_0}{\eta \alpha} \right)^2 + \frac{\omega_0}{\alpha}}. \end{aligned} \quad (4)$$

(4)式中 F_0 的表达式不难发现, 只要满足对任意的 $\omega_0 > 0$, 有 $0 < F_0 < 1$ 成立, 则平衡点的存在性不会受到参数的影响而恒存在, 并且在 $\omega_0 = 0$ 时, 只有 $1 - (\tau \lambda_0 + \eta \omega_0) / (\eta \alpha) > 0$ 才能使上式成立, 也即 $\eta \alpha > \tau \lambda_0$.

3.2.2. 地方病平衡点

当系统(1)的各个解均为正值时, 存在地方病平衡点. 通过对原方程进行变形和代入计算, 地方病平

衡点 $E^* = (S_n^*, S_a^*, I^*, M^*)$ 。其中,

$$S_n^* = \frac{A_2 \pm \sqrt{A_2^2 - 4A_1A_3}}{2A_1}, M^* = \frac{\omega_0 + \alpha_0 I^* + \alpha S_a^*}{\lambda_0} \tag{5}$$

$$S_a^* = \frac{r - \beta S_n^*}{\sigma_s \beta}, I^* = \frac{\beta \tau \alpha S_n^{*2} - (\beta \tau \lambda_0 + \sigma_s \beta \eta \omega_0 + r \eta \alpha) S_n^* + r \tau \lambda_0}{\sigma_s \beta [(\eta \alpha_0 + \beta \lambda_0) S_n^* - r q \lambda_0]} \tag{6}$$

这里,

$$A_1 = \beta [(1 - \sigma_s)(\eta \alpha_0 + \beta \lambda_0) - \eta \alpha], A_3 = r \lambda_0 [q(r - \sigma_s \beta) - \tau], \tag{7}$$

$$A_2 = \beta r q \lambda_0 (1 - \sigma_s) + (\eta \alpha_0 + \beta \lambda_0)(r - \sigma_s \beta) - \beta(\tau \lambda_0 + \eta \sigma_s \omega_0) - r \eta \alpha.$$

定义基本再生数的表达式

$$R_0 = \frac{\beta(S_n^0 + \sigma_s S_a^0)}{r} = \frac{\beta(1 + \sigma_s F_0 - F_0)}{r} \tag{8}$$

当 $R_0 < 1$ 时, 疾病会随着时间的推移自然消亡, 当 $R_0 > 1$ 时, 有可能会达到某种地方病平衡点。

4. 平衡点的稳定性

本小节在系统(1)平衡点存在和基本再生数的基础上[11]-[16], 分析无病平衡点和地方病平衡点的局部渐近稳定性和全局渐近稳定性。

4.1. 平衡点的局部渐近稳定性分析

定理 2 当 $R_0 < 1$ 时, 动力系统(1)的无病平衡点 $E_0 = (S_n^0, S_a^0, 0, M^0)$ 是局部渐近稳定的; 当 $R_0 > 1$ 时, 动力系统(1)的无病平衡点是不稳定的。

证明: 对于动力系统(1)可以求得其对应的 Jacobi 矩阵

$$J = \begin{bmatrix} -\beta I - \eta M & \tau & -\beta S_n + r q & -\eta S_n \\ \eta M & -\sigma_s \beta I - \tau & -\sigma_s \beta S_a + r q & \eta S_n \\ \beta I & \sigma_s \beta I & \beta S_n + \sigma_s \beta S_a - r & 0 \\ 0 & \alpha & \alpha_0 & -\lambda_0 \end{bmatrix} \tag{9}$$

首先证明当 $R_0 < 1$ 时, 无病平衡点 $E_0 = (S_n^0, S_a^0, 0, M^0)$ 局部渐近稳定。

根据上述的 Jacobi 矩阵可知, 在无病平衡点 $E_0 = (S_n^0, S_a^0, 0, M^0)$ 处对应的 Jacobi 矩阵

$$J(E^0) = \begin{bmatrix} -\eta \frac{\omega_0 + \alpha F_0}{\lambda_0} & \tau & -\beta(1 - F_0) + r q & -\eta(1 - F_0) \\ \eta \frac{\omega_0 + \alpha F_0}{\lambda_0} & -\tau & -\sigma_s \beta F_0 + r q & \eta(1 - F_0) \\ 0 & 0 & \beta(1 - F_0) + \sigma_s \beta F_0 - r & 0 \\ 0 & \alpha & \alpha_0 & -\lambda_0 \end{bmatrix} \tag{10}$$

根据(10)式可得 $J(E_0)$ 对应的特征多项式

$$\lambda(\lambda + r - \beta(1 - F_0) - \sigma_s \beta F_0) [\lambda^2 + \lambda(\lambda_0 + F) + \lambda_0 F - \alpha \eta(1 - F_0)] = 0, \tag{11}$$

这里 $F = \tau + \eta(\omega_0 + \alpha F_0)/\lambda_0$ 。

从(10)式和(11)式可以知道, $\lambda_1 = 0$ 始终是成立的, 但 $J(E_0)$ 的秩为 3, 因而 $\lambda_1 = 0$ 不是特征方程的一

个特征根。第一个特征根 λ_2 在下面的式子中给出:

$$\lambda + r - \beta(1 - F_0) - \sigma_s \beta F_0 = 0.$$

也即是 $\lambda_2 = \beta(1 - F_0) + \sigma_s \beta F_0 - r$ 。

当 $R_0 < 1$ 时, 即有 $\beta(S_n^0 + \sigma_s S_a^0) - r < 0$, 将无病平衡点 E_0 的值代入其中, 则有 $\beta(1 + \sigma_s F_0 - F_0) - r < 0$, 也就说明了特征根 λ_2 是负的。

另外的两个特征根即是下述一元二次方程的两个根,

$$\lambda^2 + \lambda \left(\tau + \lambda_0 + \eta \frac{\omega_0 + \alpha F_0}{\lambda_0} \right) + \lambda_0 \left(\tau + \eta \frac{\omega_0 + \alpha F_0}{\lambda_0} \right) - \alpha \eta (1 - F_0) = 0. \quad (12)$$

根据(12)式, 可以计算得到对称轴 $b = -(\tau + \lambda_0 + \eta(\omega_0 + \alpha F_0)/\lambda_0)/2 < 0$, 因此对称轴在 y 轴左侧, 因而要想上述方程中的两个根 λ_1 和 λ_2 都为负数, 当且仅当 $\lambda_0(\tau + \eta(\omega_0 + \alpha F_0)/\lambda_0) - \alpha \eta(1 - F_0) > 0$, 对此式进行化简可得

$$\tau \lambda_0 + \eta \omega_0 + 2\eta \alpha F_0 > \eta \alpha. \quad (13)$$

对(13)式中的 F_0 进行变化, 有 $F_0 > 1 - (\tau \lambda_0 + \eta \omega_0)/(\eta \alpha)$, 由上面的分析可以知道, 此式恒成立, 这说明上述方程中的两个根是恒为负数的。

综上所述, $J(E_0)$ 的特征多项式的三个特征根没有正实部的根, 根据关于微分动力系统的稳定性分析的相关知识, 可以说明无病平衡点 $E_0 = (S_n^0, S_a^0, 0, M^0)$ 是局部渐近稳定的。

接下来证明当 $R_0 > 1$ 时, 动力系统(1)的无病平衡点 $E_0 = (S_n^0, S_a^0, 0, M^0)$ 不稳定。

在分析 $J(E_0)$ 的特征多项式的第二个特征根的时候, 当 $R_0 < 1$ 时, 有 $\beta(1 + \sigma_s F_0 - F_0) - r < 0$, 此时说明无病平衡点恒为负数, 是具有负实部特征根; 当 $R_0 > 1$ 时, 有 $\beta(1 + \sigma_s F_0 - F_0) - r > 0$, 此时说明无病平衡点恒有正实部, 根据微分方程动力系统的稳定性分析知识, 可以知道, 当 $R_0 > 1$ 时, 无病平衡点不稳定。

定理 3 若 $(\lambda_0 + g_2)(\lambda_0 g_2 + g_3 - \alpha \eta S_n) > \lambda_0 g_3 - \alpha \sigma_s \beta \eta S_n I$ 成立, 则微分动力系统(1)的地方病平衡点 $E^* = (S_n^*, S_a^*, I^*, M^*)$ 是局部渐近稳定的。

证明: 经过简单地计算可知, 动力系统(1)处在地方病平衡点 E^* 处的 Jacobi 矩阵

$$J(E^*) = \begin{bmatrix} -\beta I^* - \eta M^* & \tau & -\beta S_n^* + r q & -\eta S_n^* \\ \eta M^* & -\sigma_s \beta I^* - \tau & -\sigma_s \beta S_a^* + r q & \eta S_n^* \\ \beta I^* & \sigma_s \beta I^* & \beta S_n^* + \sigma_s \beta S_a^* - r & 0 \\ 0 & \alpha & \alpha_0 & -\lambda_0 \end{bmatrix}. \quad (14)$$

根据上式可以计算出关于特征值 λ 的特征多项式

$$\lambda \left(\lambda^3 + \lambda^2 (\lambda_0 + g_2) + \lambda (\lambda_0 g_2 + g_3 - \alpha \eta S_n^*) + \lambda_0 g_3 + [\alpha \eta \beta S_n^* I^* (1 - \sigma_s) - \alpha \eta S_n^* (\beta I - g_1)] \right) = 0 \quad (15)$$

这里,

$$\begin{aligned} g_1 &= r - \beta(I^* + \sigma_s S_a^*), \quad g_2 = \tau + \beta I^* (1 + \sigma_s) + \eta M^*, \\ g_3 &= \sigma_s \beta I^* (\sigma_s \beta S_a^* + \eta M^*) + r p (\beta I^* - \sigma_s \beta I^*) \\ &\quad + \beta I^* (\tau + \sigma_s \beta I^* - \sigma_s \beta S_a^*) + g_1 (\tau + \sigma_s \beta I^* + \eta M^*). \end{aligned}$$

对地方病平衡点 $E^* = (S_n^*, S_a^*, I^*, M^*)$ 进行变量的替换[7], 可以得到 $\sigma_s \beta S_a = r - \beta S_n$, 更进一步, 对地方病平衡点进行运算, 可以得到

$$\begin{aligned} \beta I^* - \sigma_s \beta I^* &= \beta I^* (1 - \sigma_s) \geq 0, \\ \sigma_s \beta I^* (\beta I^* + \sigma_s \beta S_a^* + \eta M^*) - \beta \sigma_s \beta I^* S_a^* \\ &= \frac{\sigma_s \beta I^*}{\lambda_0} \left[\eta (\omega_0 + \alpha_0 I^*) + \eta \alpha S_a^* + \beta \lambda_0 I^* + \sigma_s \beta \lambda_0 S_a^* - \beta \lambda_0 S_a^* \right] > 0. \end{aligned}$$

在此基础上推导得出

$$\begin{aligned} g_1 &= 0 \\ g_2 &= \tau + \beta I^* + \sigma_s \beta I^* + \eta M^* > 0 \\ g_3 &= \left[\sigma_s \beta I^* (\beta I^* + \sigma_s \beta S_a^* + \eta M^*) - \beta \eta I^* M^* \right] + rp (\beta I^* - \sigma_s \beta I^*) + \beta \tau I^* > 0 \end{aligned}$$

经过上述的分析, 特征方程可以化简为:

$$\lambda \left[\lambda^3 + \lambda^2 (\lambda_0 + g_2) + \lambda (\lambda_0 g_2 + g_3 - \alpha \eta S_n^*) + \lambda_0 g_3 - \alpha \sigma_s \beta \eta I^* S_n^* \right] = 0.$$

根据上式可以得到, $\lambda_1 = 0$ 始终成立, 但并不是多项式的一个特征值, 其余的三个特征根, 也即是下列一元三次方程的根:

$$\lambda^3 + \lambda^2 (\lambda_0 + g_2) + \lambda (\lambda_0 g_2 + g_3 - \alpha \eta S_n^*) + \lambda_0 g_3 - \alpha \sigma_s \beta \eta I^* S_n^* = 0.$$

根据动力系统的相关知识, 可以利用 Routh-Hurwitz 判别法[17]对特征根的正负情况进行判断。对上述的一元三次多项式进行分析。

令 $a_0 = 1$, $a_1 = \lambda_0 + g_2$, $a_2 = \lambda_0 g_2 + g_3 - \alpha \eta S_n^*$, $a_3 = \lambda_0 g_3 - \alpha \sigma_s \beta \eta I^* S_n^*$ 。

则 $a_0 = 1 > 0$, $\Delta_1 = a_1 > 0$,

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= \begin{vmatrix} \lambda_0 + g_2 & 1 \\ \lambda_0 g_3 - \alpha \sigma_s \beta \eta I^* S_n^* & \lambda_0 g_2 + g_3 - \alpha \eta S_n^* \end{vmatrix} = (\lambda_0 + g_2)(\lambda_0 g_2 + g_3 - \alpha \eta S_n^*) - (\lambda_0 g_3 - \alpha \sigma_s \beta \eta I^* S_n^*); \\ \Delta_3 &= (\lambda_0 g_3 - \alpha \sigma_s \beta \eta I^* S_n^*) \left[(\lambda_0 + g_2)(\lambda_0 g_2 + g_3 - \alpha \eta S_n^*) - (\lambda_0 g_3 - \alpha \sigma_s \beta \eta I^* S_n^*) \right]. \end{aligned}$$

只要判断了 $\Delta_2 > 0$ 和 $\Delta_3 > 0$, 即可说明上述的特征多项式有三个有负实部的根。下面来证明这个结论。

由于 $\lambda_0 + g_2 = \lambda_0 + \tau + \beta I^* + \sigma_s \beta I^* + \eta M^* > 0$, 则可以说明 $\lambda_0 + g_2 > 0$ 。

由 $g_1 > 0$, $g_2 > 0$, $g_3 > 0$, 可以得到:

$$\lambda_0 g_2 + g_3 - \alpha \eta S_n^* > \lambda_0 g_2 - \alpha \eta S_n^* = \lambda_0 (\beta I^* + \sigma_s \beta I^* + \eta M^*) + (\tau \lambda_0 - \alpha \eta S_n^*).$$

由 S_n^* 在可行范围内的取值范围[18], 可以得到 $\tau \lambda_0 - \alpha \eta S_n^* > 0$ 。

以此可以证明到 $\lambda_0 g_2 + g_3 - \alpha \eta S_n^* > 0$ 。

接下来证明 $\lambda_0 g_3 - \alpha \sigma_s \beta \eta I^* S_n^*$ 的正负情况。对其进行显示表示, 则

$$\begin{aligned} &\lambda_0 g_3 - \alpha \sigma_s \beta \eta I^* S_n^* \\ &= \lambda_0 \left[\sigma_s \beta I (\beta I + \sigma_s \beta S_a + \eta M) - \beta^2 I \sigma_s S_a \right] + (\lambda_0 rp + \alpha \eta S_n) \beta I (1 - \sigma_s) + \beta I (\tau \lambda_0 - \alpha \eta S_n) > 0. \end{aligned}$$

通过以上的证明可以知道, 要使得 $\Delta_2 > 0$, 当且仅当下式成立,

$$(\lambda_0 + g_2)(\lambda_0 g_2 + g_3 - \alpha \eta S_n^*) - (\lambda_0 g_3 - \alpha \sigma_s \beta \eta I^* S_n^*) > 0$$

在 $\Delta_2 > 0$ 时, 因为 $\lambda_0 g_3 - \alpha \sigma_s \beta \eta I^* S_n^* > 0$, 则必有 $\Delta_3 > 0$ 。

综上所述, 根据 Routh-Hurwitz 判别法, 当且仅当

$$(\lambda_0 + g_2)(\lambda_0 g_2 + g_3 - \alpha \eta S_n^*) - (\lambda_0 g_3 - \alpha \sigma_s \beta \eta I^* S_n^*) > 0. \quad (16)$$

成立时, Jacobi 矩阵为的特征多项式(9)有三个特征根, 且都含有负实部, 则可以判定地方病平衡点 $E^* = (S_n^*, S_a^*, I^*, M^*)$ 是局部渐近稳定的。

4.2. 平衡点的全局渐近稳定性分析

对无病平衡点和地方病平衡点进行全局稳定性分析[19][20][21][22][23], 可以得到如下的结论。

定理 4 当 $R_0 \leq 1$ 时, 动力系统(1)的无病平衡点 $E_0 = (S_n^0, S_a^0, 0, M^0)$ 是全局渐近稳定的; 当 $R_0 > 1$ 时, 动力系统(1)的无病平衡点 $E_0 = (S_n^0, S_a^0, 0, M^0)$ 是不稳定的。

证明: 为了证明上述定理的成立, 首先, 构造如下的 Lyapunov 函数[24]

$$V = \frac{\beta}{2} [S_a + S_n - (S_a^0 + S_n^0)]^2 + [r - \beta - \beta(\sigma_s - 1)F_0]I. \quad (17)$$

注意到, 在不变集 E 中, $0 \leq S_n \leq 1$, $0 \leq S_a \leq 1$, 且有 $S_{n0} + S_{a0} + I_0 = 1$, 基本再生数 $R_0 = \beta(1 + \sigma_s F_0 - F_0)/r$ 。则构造的 Lyapunov 函数沿动力系统(1)的全导数

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \frac{dV}{dS_n} \frac{dS_n}{dt} + \frac{dV}{dS_a} \frac{dS_a}{dt} + \frac{dV}{dI} \frac{dI}{dt} + \frac{dV}{dM} \frac{dM}{dt} \\ &= \beta [S_a + S_n - (S_a^0 + S_n^0)] \left(\frac{dS_n}{dt} + \frac{dS_a}{dt} \right) + [r - \beta - \beta(\sigma_s - 1)F_0] \frac{dI}{dt} \\ &= \left[\beta(S_a + S_n - (S_a^0 + S_n^0)) + \beta + \beta(\sigma_s - 1)F_0 - r \right] (rI - \beta I S_n - \sigma_s \beta I S_a) \\ &< \beta r I [S_a + S_n - (S_a^0 + S_n^0)] < 0. \end{aligned} \quad (18)$$

上式的化简过程中进行了多次的放缩变换, 可以明确知道的是, 在系统达到无病平衡点 $E_0 = (S_n^0, S_a^0, 0, M^0)$ 时, $S_a^0 + S_n^0$ 将达到系统内易感染者数量的最大值, 即整个系统里面没有染病者。

显然, 在 $R_0 \leq 1$ 时, 只有当 $I = 0$ 时, 才有 $\left. \frac{dV}{dt} \right|_{E_0} = 0$ 。而无病平衡点 $E_0 = (S_n^0, S_a^0, 0, M^0)$ 是 $I = 0$ 上的最大正向不变集, 所以由 LaSalle 不变性原理得到: $\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = 0$, 即当 $t \rightarrow \infty$ 时, 动力系统(1)的解都有 $I(t) \rightarrow 0$ 始终成立, 可以得到极限系统

$$\begin{aligned} \frac{dS_n}{dt} &= -\eta M S_n + \tau S_a, \\ \frac{dS_a}{dt} &= \eta M S_n - \tau S_a, \\ \frac{dM}{dt} &= \omega_0 + \alpha S_a - \lambda_0 M. \end{aligned}$$

显然, 平衡点 $E'_0 = (S_n^0, S_a^0, M^0)$ 局部渐近稳定, 根据唯一性可知, 此平衡点也保持全局渐近稳定性, 故动力系统(1)的无病平衡点 $E_0 = (S_n^0, S_a^0, 0, M^0)$ 在 $R_0 \leq 1$ 时全局渐近稳定。

接下来说明当 $R_0 > 1$ 时无病平衡点的不稳定性。显然根据 $J(E_0)$ 容易知道, 其线性化系统存在正的特征根, 因而, 当 $R_0 > 1$ 时, 动力系统(1)的无病平衡点不稳定。

定理 5 当 $R_0 > 1$ 时, 动力系统(1)的地方病平衡点 $E^* = (S_n^*, S_a^*, I^*, M^*)$ 在区域 $D = E \cap \{(S_n, S_a, I, M) | I = 0\}$ 内全局渐近稳定。

证明: 构造如下的 Lyapunov 函数:

$$V = (\alpha_0 + \alpha + \omega_0) N_2 \left[\frac{1}{2} (S_n + S_a - (S_n^* + S_a^*))^2 + \frac{1}{N_1} I^* I \right] + M. \tag{19}$$

则(19)式沿动力系统(1)的全导数

$$\frac{dV}{dt} = (\alpha_0 + \alpha + \omega_0) N_2 \left[(S_n + S_a - (S_n^* + S_a^*)) \left(\frac{dS_n}{dt} + \frac{dS_a}{dt} \right) + \frac{1}{N_1} I^* \frac{dI}{dt} \right] + \frac{dM}{dt}. \tag{20}$$

对于(20)式, 结合数值模拟的结果图 2, 可以知道 $S_n + S_a < (S_n^* + S_a^*)$ 和 $\frac{dI}{dt} < 0$, 由我们的模型可以知道 $\frac{dS_n}{dt} + \frac{dS_a}{dt} = -\frac{dI}{dt}$, 因而 $\frac{dS_n}{dt} + \frac{dS_a}{dt} > 0$, 可以对(20)式进行放缩, 得到

$$\frac{dV}{dt} < (\alpha_0 + \alpha + \omega_0) N_2 \left[S_n + S_a - (S_n^* + S_a^*) + \frac{1}{N_1} I^* \right] (\beta S_n + \sigma_s \beta S_a) I + \alpha_0 + \alpha + \omega_0 - \lambda_0 M.$$

根据 $S_n + S_a + I = 1$ 和 $S_n^* + S_a^* + I^* = 1$, 对上式进行放缩, 则

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &< (\alpha_0 + \alpha + \omega_0) N_2 \left(\frac{N_1 + 1}{N_1} \right) (\beta S_n + \sigma_s \beta S_a) I + \alpha_0 + \alpha + \omega_0 \\ &< (\alpha_0 + \alpha + \omega_0) \left[N_2 \left(\frac{N_1 + 1}{N_1} I^* - I \right) (\beta - r) + 1 \right]. \end{aligned}$$

当 $R_0 > 1$ 时, 有 $\beta - r > 0$ 。

根据数字模拟的结果, $I^* < I$, 因而必定存在一份比较大的且为整数的 N_1 使得 $\frac{N_1 + 1}{N_1} I^* - I < 0$ 成立,

故 $\left(\frac{N_1 + 1}{N_1} I^* - I \right) (\beta - r) < 0$, 因此也存在一个正的数 N_2 使得下式成立:

$$N_2 \left(\frac{N_1 + 1}{N_1} I^* - I \right) (\beta - r) + 1 < 0. \tag{21}$$

综上所述, 始终存在 N_1 和 N_2 使得 $\frac{dV}{dt} < 0$ 恒成立。

因而, 当且仅当 $R_0 = \beta(1 + \sigma_s F_0 - F_0) / r > 1$ 时, 有 $V > 0$, $\frac{dV}{dt} < 0$ 。当且仅当在当

$E^* = (S_n^*, S_a^*, I^*, M^*)$ 时, 有 $\frac{dV}{dt} = 0$, 定理 5 得证。

5. 数值仿真

对动力系统(1)中参数赋予常数值, 应用 MATLAB 对系统进行数值模拟, 对不同阈值条件下系统的稳定性分析的结论进行验证, 当参数 p 取不同值时, 比较系统平衡点的变化情况, 分析了传染病发展的规律。

对于动力系统(1), 取初始值为 $S_n(0) = 0.85$ 、 $S_a(0) = 0.1$ 、 $I(0) = 0.05$ 和 $M(0) = 0.2$ 各参数的取值为 $\alpha = 0.3$ 、 $\alpha_0 = 20$ 、 $\tau = 0.1$ 、 $\lambda_0 = 0.3$ 、 $\omega_0 = 0.2$ 、 $\sigma_s = 0.04$ 、 $r = 0.4$ 和 $\eta = 0.01$ 再取 $\beta = 0.2$ 、 $p = 0.9$ 和 $q = 0.1$, 此时 $R_0 = 0.4671$, 模拟结果见图 1。

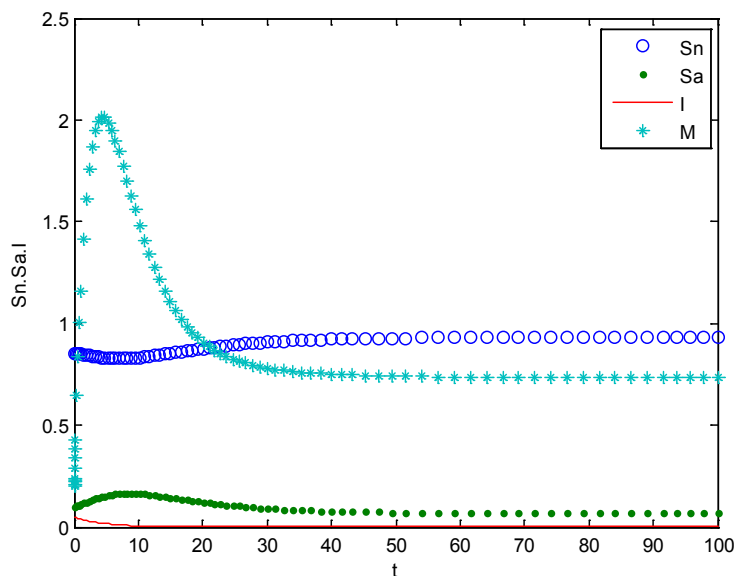


Figure 1. Numerical simulation of disease free equilibrium

图 1. 无病平衡点的数值模拟图

根据上图可知, 在上述参数值条件下, 经过一段时间之后, 整个系统趋于稳定, 此系统的平衡点为 $E_1(S_n^1, S_a^1, I^1, M^1) = (0.9315, 0.0685, 0.0000, 0.7352)$ 。即无病平衡点, 这则表明此时系统中已经没有染病者了。

在初值不变和参数取值不变的条件下, 此时取 $\beta = 0.5$ 、 $p = 0.1$ 和 $q = 0.9$ 。有 $R_0 = 1.1678$, 可以得到下图 2。

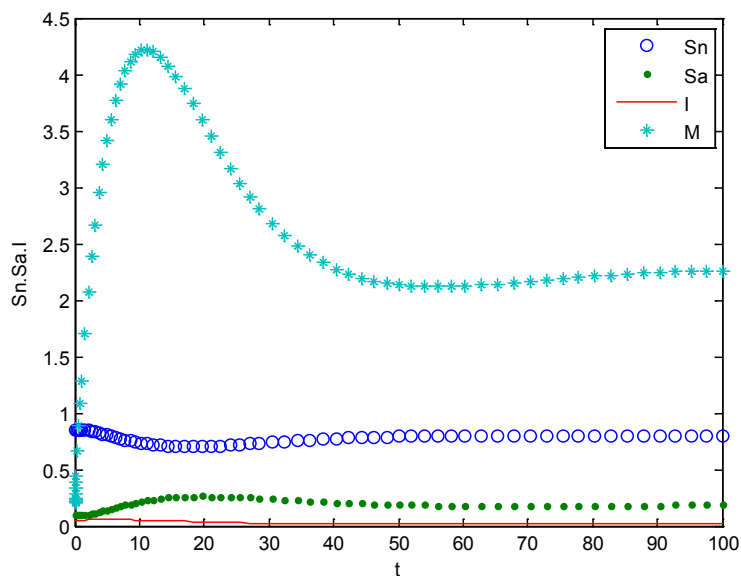


Figure 2. Numerical simulation diagram of endemic disease balance point when $p = 0.1$

图 2. $p = 0.1$ 时地方病平衡点处的数值模拟图

系统趋于稳定, 平衡点为 $E_2(S_n^2, S_a^2, I^2, M^2) = (0.7931, 0.1857, 0.0212, 2.2621)$, 这表示了系统中有染病者的存在, 并且稳定在一个常数边缘。

系统(1)的初始取值不变, 将这些参数的取值为 $\beta = 0.5$ 、 $p = 0.5$ 和 $q = 0.5$, 此时 $R_0 = 1.1678$, 可以得到下图 3。

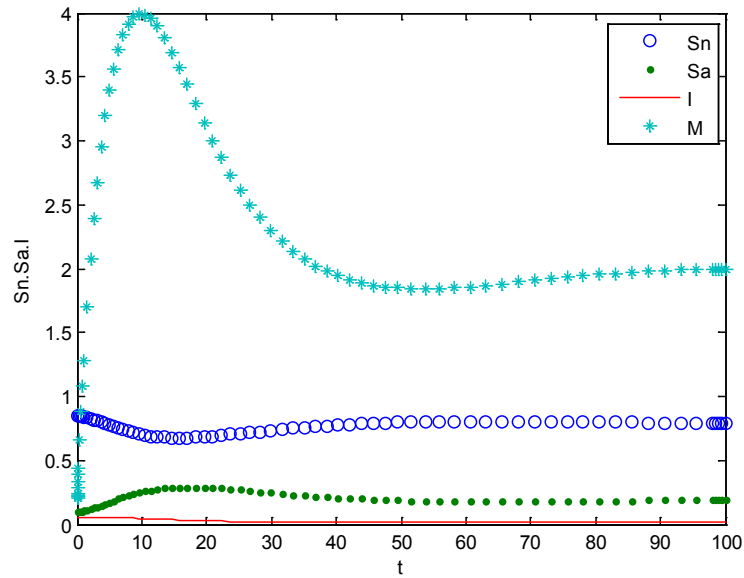


Figure 3. Numerical simulation of endemic equilibrium point at $p = 0.5$
图 3. $p = 0.5$ 时地方病平衡点的数值模拟图

在取上述参数值的条件下, 在自变量的取值范围内, 整个系统逐渐趋于稳定, 此系统的平衡点为 $E_3(S_n^3, S_a^3, I^3, M^3) = (0.7925, 0.1904, 0.0171, 1.9963)$ 。

系统的初值和参数的初始取值不变, 改变这些参数的取值为 $\beta = 0.5$ 、 $p = 0.9$ 和 $q = 0.1$, 此时 $R_0 = 1.1678$, 可以得到下图 4。

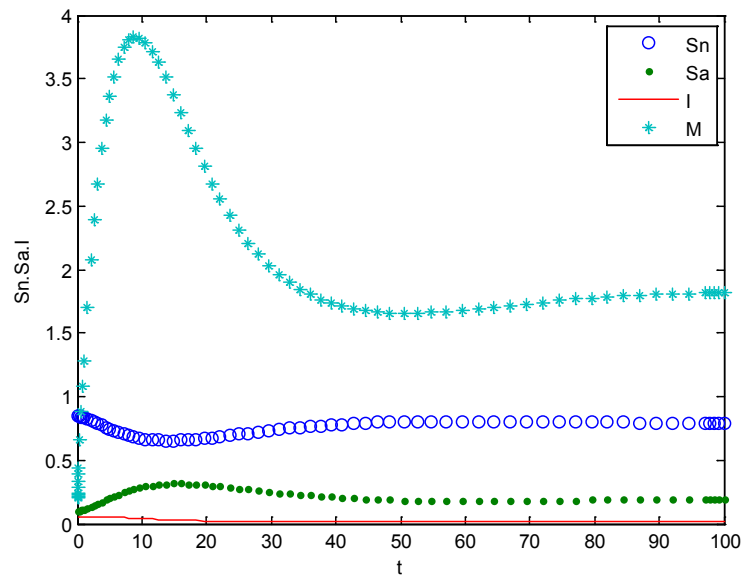


Figure 4. Numerical simulation of endemic disease equilibrium at $p = 0.9$
图 4. $p = 0.9$ 时地方病平衡点处的数值模拟图

在取上述参数值的条件下, 在自变量的取值范围内, 整个系统逐渐趋于稳定, 此系统的平衡点为 $E_4(S_n^4, S_a^4, I^4, M^4) = (0.7920, 0.1936, 0.0144, 1.8167)$ 。

图 1 和图 2 是模型中阈值分别为 $R_0 = 0.4671 < 1$ 和 $R_0 = 1.1678 > 1$ 时, 系统(1)数值仿真的结果, 此时从中可以得到无病平衡点 $E_1(0.9315, 0.0685, 0.0000, 0.7352)$ 和地方病平衡点 $E_2(0.7931, 0.1857, 0.0212, 2.2621)$, 也即无病平衡点和地方病平衡点。从上图也可以看出系统在平衡点处均是渐进稳定, 即与上文中对动力系统(1)平衡点的稳定性分析结果一致。

图 2、图 3 和图 4 分别为动力系统(1)中对患病之后疾病具有防范意识的人群占比 p 和没有防范意识的人群占比 q 的取值分别为: $p = 0.1, q = 0.9$; $p = 0.5, q = 0.5$; $p = 0.9, q = 0.1$ 时, 对系统进行数值模拟所得到的各个变量随时间变化的图像。此时, 动力系统(1)的 R_0 都成立 $R_0 = 1.1678 > 1$, 上述的参数条件下对应的地方病平衡点分别为 $E_2(0.7931, 0.1857, 0.0212, 2.2621)$, $E_3(0.7925, 0.1904, 0.0171, 1.9963)$, $E_4(0.7920, 0.1936, 0.0144, 1.8167)$ 。很显然, 从上述的图像上和平衡点的具体数值可以知道, 随着媒体报道的广泛传播, 具有防范意识的人群占比逐渐增多, 相应地地方病平衡点出的不具备防范意识的易感染者 $S_n(t)$ 和感染者 $I(t)$ 的数量逐渐减少, 具有防范意识的易感染者人群 $S_a(t)$ 逐渐增多, 与此同时, 人们的意识水平 $M(t)$ 也逐渐降低, 这是因为意识水平是与感染者 $I(t)$ 的数量成正比的, 随着感染者 $I(t)$ 数量的减少, 则意识水平 $M(t)$ 也逐渐降低, 这与实际情况是非常符合的。整个分析过程说明, 当传染性疾病的爆发流行开来的时候, 加大媒体报道的力度, 是有更多的人群具有防范意识, 可以增强对这种疾病的抑制作用, 能够非常有效地降低传染性疾病的传播。

6. 结论与展望

6.1. 结论

文中建立了一类具有媒介影响的 SIS 传染病模型, 并对其稳定性进行分析, 做了相应的数值模拟来验证结论。动力系统中只有一个无病平衡点和地方病平衡点, 当 $R_0 < 1$ 时, 在无病平衡点处局部渐近稳定的, 同时也是全局渐近稳定的; 当 $R_0 > 1$ 时, 无病平衡点不稳定。只要满足文中的条件(10), 地方病平衡点是局部渐近稳定的。这表明, 在媒体报道的影响下, 会提高人们的疾病信息意识, 疾病传播形势总是能够趋近于一个稳定的状态, 也就是说疾病不可能蔓延下去。通过数值模拟验证了对系统平衡点稳定性的分析, 并且通过对具有疾病意识的人群所占比例 q 进行不同的取值进行数值模拟, 结果表明, 通过媒体的报道, 具有疾病信息意识的人群越多, 在到达稳定状态时染病者的数量就越少。这充分说明了媒体报道对疾病蔓延形势的控制具有积极的作用。

6.2. 展望

本文讨论了受媒介影响下的传染病模型的有效性, 在实际中传染病模型受到许多因素的影响, 如: 年龄结构、时滞、隔离措施、传播方式等。接下来考虑研究复杂情形下的传染病模型, 即结合多种影响下的传染病模型, 并探究传染病综合控制策略。

参考文献

- [1] 谢丽. 一类具有接种和非线性发生率的传染病模型稳定性分析[D]: [硕士学位论文]. 信阳: 信阳师范学院, 2018.
- [2] 罗百良. 几类微分方程模型定性及稳定性分析[D]: [硕士学位论文]. 长沙: 湖南大学, 2013.
- [3] Kermack, W.O. and McKendrick, A.G. (1927) A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, **115**, 700-721. <https://doi.org/10.1098/rspa.1927.0118>
- [4] Liu, R., Wu, J. and Zhu, H. (2007) Media/Psychological Impact on Multiple Outbreaks of Emerging Infectious Diseases.

Computational and Mathematical Methods in Medicine, **8**, 153-164.

<https://doi.org/10.1080/17486700701425870>

- [5] 王宝童, 王稳地. 流感传播数学模型的基本再生数[J]. 西南大学学报(自然科学版), 2013, 35(5): 84-88.
- [6] 崔景安, 叶萌, 宋国华, 等. 北京市手足口病的流行趋势预测[J]. 生物数学学报, 2014(1): 131-135.
- [7] Wang, A. and Xiao, Y. (2014) A Filippov System Describing Media Effects on the Spread of Infectious Diseases. *Non-linear Analysis: Hybrid Systems*, **11**, 84-97. <https://doi.org/10.1016/j.nahs.2013.06.005>
- [8] 常玉婷. 疾病信息意识影响的几类传染病模型研究[D]: [硕士学位论文]. 太原: 中北大学, 2017.
- [9] Misra, A.K., Sharma, A. and Shukla, J.B. (2011) Modeling and Analysis of Effects of Awareness Programs by Media on the Spread of Infectious Diseases. *Mathematical and Computer Modelling*, **53**, 1221-1228. <https://doi.org/10.1016/j.mcm.2010.12.005>
- [10] Smith, H.L. (2008) *Monotone Dynamical Systems: An Introduction to the Theory of Competitive and Cooperative Systems*. American Mathematical Society, Providence. <https://doi.org/10.1090/surv/041>
- [11] 毛红艳. 一类离散 SIS 传染病模型的动力学性态分析[D]: [硕士学位论文]. 西安: 陕西科技大学, 2017.
- [12] 王星. 几类传染病模型的稳定性分析[D]: [硕士学位论文]. 太原: 中北大学, 2017.
- [13] 白娟. 两类传染病模型的稳定性分析[D]: [硕士学位论文]. 临汾: 山西师范大学, 2018.
- [14] 周康. 几类传染病模型动力学问题研究[D]: [硕士学位论文]. 杭州: 浙江理工大学, 2018.
- [15] 曹琨, 樊玲玲. 非线性系统稳定性的 Liapunov 判别法[J]. 新乡学院学报(自然科学版), 2012, 29(1): 52-53.
- [16] 闫卫平, 吴素赞. 带有治疗项的 SIS 反应扩散传染病模型动力学分析[J]. 河北科技大学学报, 2015, 36(6): 587-592.
- [17] Lehnigk, S.H. (1970) On the Hurwitz Matrix. *Zeitschrift Für Angewandte Mathematik Und Physik Zamp*, **21**, 498-500. <https://doi.org/10.1007/BF01627957>
- [18] Agaba, G.O., Kyrychko, Y.N. and Blyuss, K.B. (2017) Time-Delayed SIS Epidemic Model with Population Awareness. *Ecological Complexity*, **31**, 50-56. <https://doi.org/10.1016/j.ecocom.2017.03.002>
- [19] 杜鹏, 段彩霞, 廖新元. 一类具 logistic 出生率的 SIS 传染病模型的全局稳定性[J]. 陕西科技大学学报(自然科学版), 2014, 32(4): 167-171.
- [20] 王拉娣. 具有非线性传染率的两类传染病模型的全局分析[J]. 工程数学学报, 2005(4): 640-644.
- [21] 李建全, 于斌, 杨亚莉, 杨友社. 一类带有种群迁移的 SIS 传染病模型的全局分析[J]. 数学的实践与认识, 2009, 39(15): 114-121.
- [22] 杜艳可, 徐瑞, 段立江. 一类具有标准发生率的 SIS 传染病模型的全局稳定性[J]. 数学的实践与认识, 2009, 39(10): 140-144.
- [23] 赵亚飞, 苏强, 吕贵臣. 一类 SEIR 流行病模型的全局稳定性分析[J]. 重庆理工大学学报(自然科学), 2018, 32(5): 225-228+235.
- [24] Fushimi, K., Enatsu, Y. and Ishiwata, E. (2018) Global Stability of an SIS Epidemic Model with Delays. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **41**, 5345-5354. <https://doi.org/10.1002/mma.5084>