Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(2), 198-205
Published Online February 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.132023

Hans汉斯

借助GeoGebra软件对2022年高考数学乙卷(理) 22题的解法探究

刘　丰[1]，徐恭贤[2]

[1]辽西育明高级中学，辽宁　锦州
[2]渤海大学数学科学学院，辽宁　锦州

收稿日期：2023年1月5日；录用日期：2023年2月6日；发布日期：2023年2月14日

摘　要

以2022年全国高考乙卷数学(理)压轴导数试题为载体，借助于GeoGebra软件强大作图和动态演示功能，学生通过对图象的动态观察发现不同函数的自身性质以及他们之间微妙联系，通过GeoGebra动态演示，使学生更加直观认识超越函数以及动态变化中分析探索函数切线的作用，通过数形结合方法对题目进行更加深度分析探究，引发学生的思考，促使学生形成解题思路，进而找到不同解决方法。

关键词

GeoGebra，动态变化，函数切线，数形结合

With the Help of GeoGebra Software, I Will Explore the Solution of 22 Questions in the Mathematics Paper B of 2022 College Entrance Examination

Feng Liu[1], Gongxian Xu[2]

[1]Western Liaoning Yuming Senior High School, Jinzhou Liaoning
[2]School of Mathematical Sciences, Bohai University, Jinzhou Liaoning

Received: Jan. 5th, 2023; accepted: Feb. 6th, 2023; published: Feb. 14th, 2023

文章引用: 刘丰, 徐恭贤. 借助 GeoGebra 软件对 2022 年高考数学乙卷(理) 22 题的解法探究[J]. 理论数学, 2023, 13(2): 198-205. DOI: 10.12677/pm.2023.132023

Abstract

Based on the final derivative test of mathematics (science) in the second paper of the National College Entrance Examination in 2022, with the help of the powerful mapping and dynamic demonstration function of GeoGebra software, students can discover the properties of different functions and the subtle relationships between them through dynamic observation of images. Through GeoGebra dynamic demonstration, students will have a more intuitive understanding of transcendental functions and the function of tangents of analysis and exploration functions in dynamic changes. Through the combination of number and form method, the problems are analyzed and explored in a more in-depth way, which triggers students' thinking and encourages them to form problem-solving ideas and then find different solutions.

Keywords

GeoGebra, Dynamic Changes, Function Tangent, Number Form Association

1. 引言

针对 GeoGebra 在高中数学教学中的运用国内很多初高中一线教师做了很多有价值的研究，例如安徽合肥一中教师胡媛媛利用 GeoGebra 探究高考中的函数零点问题[1]；广东珠海教师李凯利用 GeoGebra 针对指对函数研究他们的公切线问题[1]；广东珠海教师陈清华运用 GeoGebra 软件对 2016 年全国高考 I 卷导数试题通过学生互动的方式进行深度探究[2]；宁夏王伯龙老师以 2019 年高考题为例充分借助 GeoGebra 软件强大作图和动态演示功能寻求不同的解题方法[3]；广东珠海教师李凯利用 GeoGebra 针对指对函数研究他们的公切线问题[4]等等。

本文主要针对 2022 年全国高考乙卷数学(理)压轴导数试题进行深度探究，借助于 GeoGebra 软件强大作图和动态演示功能，通过对图象的动态观察给出不同以往的解题方法并加以严谨的证明。通过分析探究促使学生更加直观认识超越函数以及相应的函数性质，提升学生想象观察能力和分析问题解决问题能力。本文不同与往文献的研究，借助于 GeoGebra 对函数图象变化趋势做了更加深度的探究。本文主要分为发现问题与提出问题；课堂探究；思考总结等几部分构成。

2. 发现问题与问题提出

函数作为高中数学教学核心内容之一，历年高考数学试题常常已函数和导数综合应用题目作为高考试卷的压轴题，常常也是令学生谈虎色变的题目，学生要想在考场精准解决此类题目绝非易事。压轴题目的函数类型常常都是指对幂混合复合的超越函数，以超越函数为基础提出相应的问题。

题目：(2022 年全国高考乙卷数学(理)试题)已知函数 $f(x)=\ln(1+x)+ax\mathrm{e}^{-x}$

(2)若 $f(x)$ 在区间 $(-1,0),(0,+\infty)$ 各恰有一个零点，求 a 的取值范围。

分类讨论法答案部分呈现：

$$f(x)=\ln(1+x)+\frac{ax}{\mathrm{e}^x},f'(x)=\frac{1}{1+x}+\frac{a(1-x)}{\mathrm{e}^x}=\frac{\mathrm{e}^x+a(1-x^2)}{(1+x)\mathrm{e}^x}，设\ g(x)=\mathrm{e}^x+a(1-x^2)$$

1°若 $a>0$，当 $x\in(-1,0)$，$g(x)=e^x+a(1-x^2)>0$，即 $f'(x)>0$ 所以 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 上单调递增，$f(x)<f(0)=0$ 故 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 上没有零点，不符合题意。

2°若 $-1\le a\le 0$，当 $x\in(0,+\infty)$，则 $g'(x)=e^x-2ax>0$ 所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增所以 $g(x)>g(0)=1+a\ge 0$，即 $f'(x)>0$ 所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，$f(x)>f(0)=0$ 故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上没有零点，不合题意。

3°若 $a<-1$

1) 当 $x\in(0,+\infty)$，则 $g'(x)=e^x-2ax>0$，所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增 $g(0)=1+a<0$，$g(1)=e>0$。

2) 当 $x\in(-1,0)$, $g(x)=e^x+a(1-x^2)h(x)=g'(x)=e^x-2ax$, $h'(x)=e^x-2a>0$。

本题第二小问主要是以指对幂混合复合的含参超越函数为基础考查含参函数零点求解参数范围问题，对于参数范围的求解我们主要有两种方法：分离参数法和分类讨论法，此题分离参数 a 后新构建的函数求导不易，导数的正负也不易判断，进而新构建的函数的单调性不容易讨论因此此题选用分离参数法不易求解。选用分类讨论法对函数带参求导，对求得的含参导数进行分类讨论，解决此题关键就是对 a 的范围进行合理分类，而此题分类层次复杂分，类的标准难以把握，参数 a 分类后还需否定和肯定并用证明方法确定参数 a 的确切范围，而答案分类时为何选–1 和 0 为分类分界点也没有给出相应明确分类原因，对于学生来说在考场上做出此题实属不易。我们是否可以进一步将问题转化，通过数形结合方法对题目进行分析探究，进而寻求不同解决方法，我们可以借助 GeoGebra 强大的作图功能，通过动态演示，使学生更加直观认识超越函数，引发学生的思考，促使学生形成解题思路[2]。

3. 课堂探究

3.1. 真题呈现

题目：(2022 年全国高考乙卷数学(理)试题)已知函数 $f(x)=\ln(1+x)+axe^{-x}$

(2)若 $f(x)$ 在区间 $(-1,0)$，$(0,+\infty)$ 各恰有一个零点，求 a 的取值范围。

3.2. 问题转化

问题 1：对于函数零点问题，根据以往做题经验我们有几种处理方法？

学生乙：① 可以直接解对应方程根的情况 ② 可以转化成两个函数图象交点情况。

问题 2：如果转化成两个函数，我们通常转化时对转化后函数的图象有什么样的要求？

学生丙：转化后函数易判断单调性，易画函数图象。

学生乙：若能转化成直线尽量转化成直线与曲线相交情况。

教师：若转化的函数图象具有凹凸性在判断交点情况时更加容易。

学生戊：对于具有凹凸性的曲线图象，我们可以借助曲线的切线来判断直线和曲线交点个数情况。

因此针对题目中第二问以及学生们对于零点问题处理方法的提示，我们对问题进行转化，$f(x)$ 在区间 $(-1,0)$，$(0,+\infty)$ 各恰有一个零点 $\Leftrightarrow f(x)=\ln(1+x)+axe^{-x}=0$ 方程在 $(-1,0)$，$(0,+\infty)$ 有各有一个根 $\Leftrightarrow e^x\ln(1+x)=-ax$ 令 $g(x)=e^x\ln(1+x)$，$h(x)=-ax$ 两个函数图像在 $(-1,0)$，$(0,+\infty)$ 各恰有一个交点问题。转化后我们可以利用函数切线处理凹凸曲线与动直线相交交点个数问题[4]，进而解决函数零点问题。下面针对(2)问题，利用 GeoGebra 动态演示功能进行探究，寻求求解方法。

3.3. 动态探究

教师：利用班级多媒体教学白板，示范使用 GeoGebra 软件进行精准作图操作，利用 GeoGebra 在代

数区输入转化后的函数 $g(x)$、$h(x)$，绘图区绘制出精准的 $g(x)$ 图象，由于函数 $h(x)$ 有参量 a，GeoGebra 可以创建 a 的滑动条，通过调节滑动条形成动态图象以便后续的演示观察。

问题 3：对于函数 $h(x)=-ax$ 此函数图象有何特点与函数 $g(x)$ 图象有怎样的关系。

学生甲：由于直线方程中函数参数，无论参数 a 如何变化当 x 为 0 时 y 恒为 0 直线恒过定点原点且与函数 $g(x)$ 交点也为原点。

教师：我们借助与 GeoGebra 强大的作图功能直接做出函数 $g(x)$ 在原点处的切线，观察切线与函数 $g(x)$ 交点情况。引导各组学生调节滑动条 a 观察两个函数图象交点情况。并进行小组讨论寻求求解方法。

图象探究 1：A 组学生通过 GeoGebra 图象的观察，发现原点处切线 $y=x$ 与函数 $g(x)$ 图象在 $(-1,0)$ 上恰有一个交点如图 1，而在 $(0,+\infty)$，A 组学生通过缩放坐标轴比例发现原点处切线和曲线无限接近无法观测判断出交点情况如图 2。

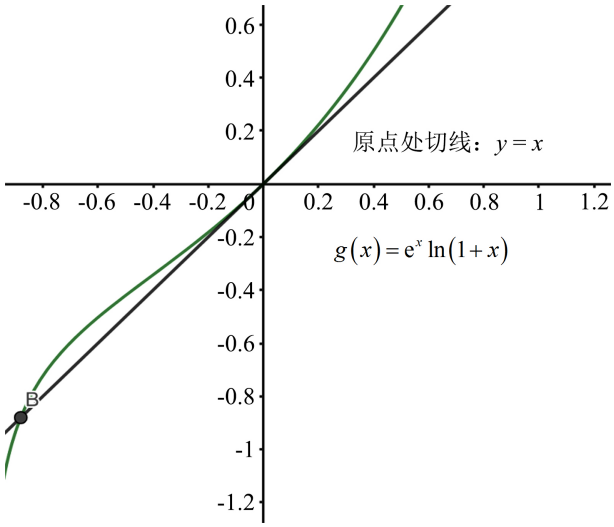

Figure 1. Tangential diagram at the origin
图 1. 原点处切线图

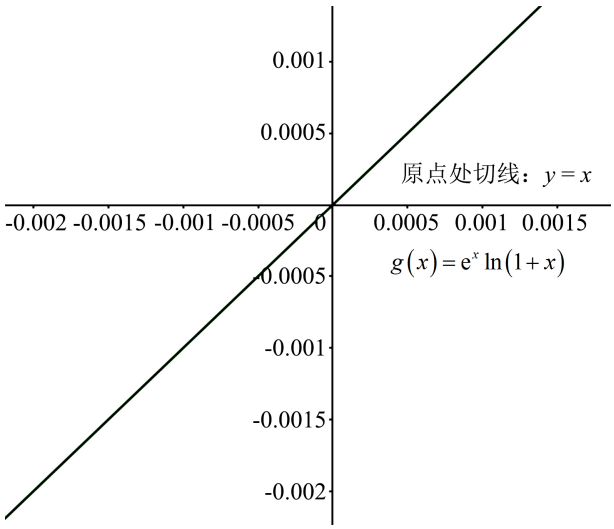

Figure 2. Tangential diagram at the origin after scaling downaxis
图 2. 放缩轴比例后原点处切线图

教师：对于 A 组学生发现的问题，观察图象在 $(0,+\infty)$ 又是个下凸曲线，那么我们如何来判定直线与下凸曲线位置关系呢？

A 组学生： $g(x)=e^x\ln(1+x)$， $y=x$ 图象在原点处相交，而在 $(0,+\infty)$ 上 $y=x$ 是匀速增加的，我们可以借助于函数 $g(x)=e^x\ln(1+x)$ 在原点附近处的增减趋势和增减快慢来判断两个函数图象交点个数情况。

教师：要判断上升或下降趋势的快慢需要对原函数多次求导，一阶导数相当于物理学中加速度来判断函数图象上升还是下降，再次求导即二阶导数又是对加速度的升降趋势的判断进而判断上升下降的快慢。

$g(x)=e^x\ln(1+x)$， $g'(x)=e^x\left(\ln(1+x)+\dfrac{1}{x+1}\right)$， $g'(0)=1$，

$g''(x)=e^x\left(\ln(1+x)+\dfrac{2}{x+1}-\dfrac{1}{(1+x)^2}\right)=e^x\left(\ln(1+x)+\dfrac{2x+1}{(1+x)^2}\right)$ 当 $x\in(0,+\infty)$ 时 $g''(x)>0$。则 $g'(x)$ 递增，当 $x\in(0,+\infty)$ 时 $g'(x)>g'(0)=1$ 说明导函数单调递增且导函数值在 $x\in(0,+\infty)$ 恒大于 1，导数几何意义是切线的斜率，由此可以推出原函数 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上切线斜率在增加反应到原函数 $g(x)$ 图象上曲线上升且越来越陡峭即加速上升，而 $y=x$ 函数图象匀速上升，又知 $g(x)$ 与 $y=x$ 在原点处函数值相同，而 $g(x)$ 增加的更快所以在 $x\in(0,+\infty)$， $g(x)$ 图象恒在 $y=x$ 上方，所以是无交点的。

教师：针对 A 组学生探究的结果，我们可以将原点处切线作为参照，通过调节滑动条 a 改变动直线通过观察动直线与原点处切线和曲线的位置关系进一步探究交点情况。

图象探究 2：C 组学生调节滑动条 a 改变 a 值使 $-a>1$ 即 $a<-1$ 时，此时动直线与函数 $g(x)$ 图象在区间 $(-1,0)$， $(0,+\infty)$ 各恰有一个交点如图 3。说明 $a<-1$ 时可以推出 $f(x)$ 在区间 $(-1,0)$， $(0,+\infty)$ 各恰有一个零点，进而 C 组同学认为 a 范围为 $(-\infty,-1)$。

图象探究 3：D 组学生调节滑动条 a 改变 a 值使 $-a>1$ 即 $a>-1$ 时，随着调节 a 值的不同此时动直线与函数 $g(x)$ 图象在区间 $(-1,0)$ 恰有一个交点，而在 $(0,+\infty)$ 无交点如图 4，动直线与函数 $g(x)$ 图象在区间 $(-1,0)$，$(0,+\infty)$ 均无交点如图 5，如图 6。B 组学生探究结果显示当 $a>-1$，$f(x)$ 在区间 $(-1,0)$，$(0,+\infty)$ 各恰有一个零点结论不成立，结合原点处切线也是与函数 $g(x)$ 图象有一个交点，综上当 $a\in[-1,+\infty)$ 不成立。

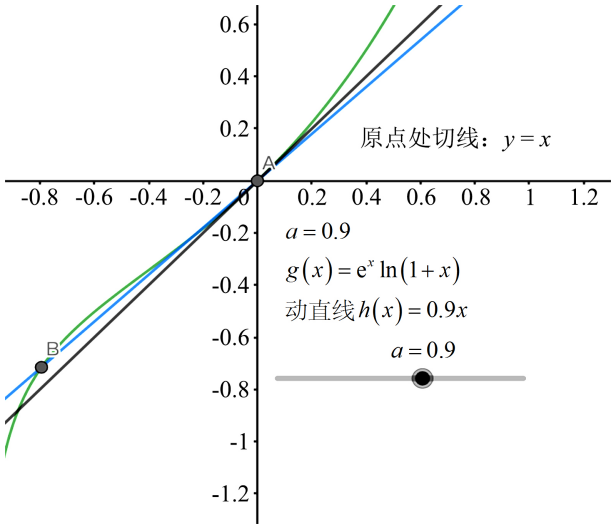

Figure 3. Intersection of moving line and curve when $a<-1$
图 3. $a<-1$ 情况下动直线与曲线相交图

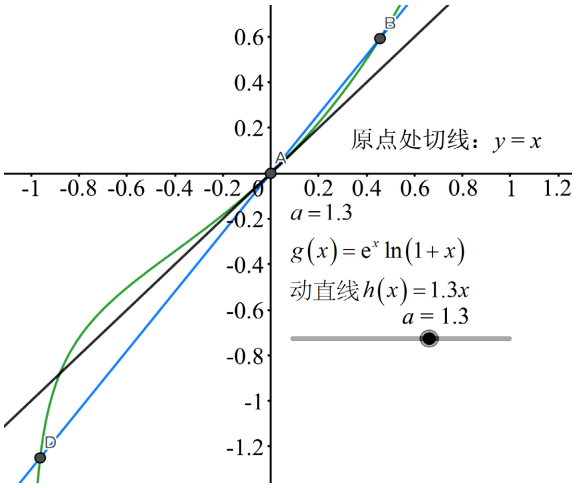

Figure 4. Intersection of moving line and curve when $a>-1$
图 4. $a>-1$ 情况下动直线与曲线相交图

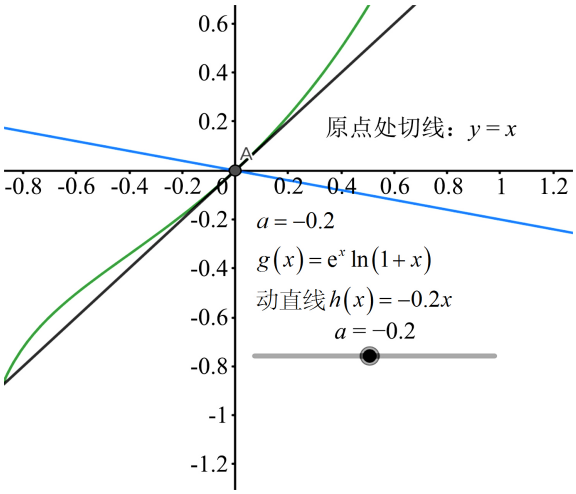

Figure 5. Intersection of moving line and curve when $a>-1$
图 5. $a>-1$ 情况下动直线与曲线相交图

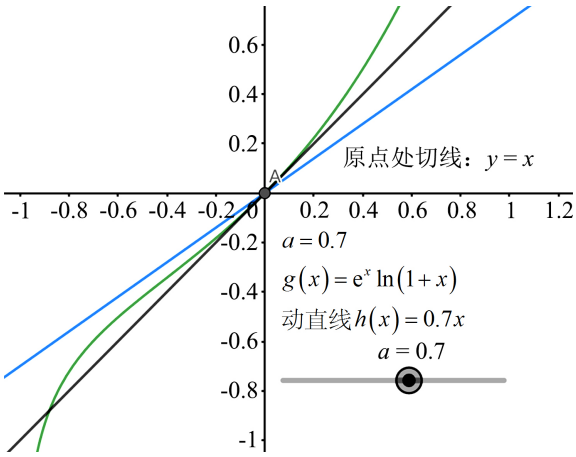

Figure 6. Intersection of moving line and curve when $a>-1$
图 6. $a>-1$ 情况下动直线与曲线相交图

教师：通过 GeoGebra 强大的作图和动态演示功能我们判断出参数 a 的取值范围，而对于解答题我们还需对其进行严谨的证明，下面我们对证明过程加以修饰。

1) $x\in(0,+\infty)$ 时，$g'(x)=e^x\left(\ln(1+x)+\frac{1}{x+1}\right)$ 所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增且

$g''(x)=e^x\left(\ln(1+x)+\frac{2}{x+1}-\frac{1}{(1+x)^2}\right)=e^x\left(\ln(1+x)+\frac{2x+1}{(1+x)^2}\right)>0$，所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 图象下凸只有当 $h(x)=-ax$ 与其相切时此时有一个交点，因此先寻找相切的临界状态。

设切点为 (x_0,y_0) 由于相切所以 $\begin{cases}-a=e^{x_0}\left(\ln(1+x_0)+\frac{1}{x_0+1}\right)\\ e^{x_0}\ln(1+x_0)=-ax_0\end{cases}$ 解得 $x_0=0$ $y_0=0$ 切点即为原点，此时 $-a=1$ 即 $a=-1$ 函数 $h(x)=x$，由 $g(x)$ 图象下凸性可知当 $a=-1$ 时 $g(x)$ 与 $h(x)$ 图象相切此时只有一个交点即为原点。

① 而当 $-a>1$ 即 $a<-1$ 时，由 $g(x)$ 与 $h(x)$ 图象性质可知两函数图象在 $(0,+\infty)$ 上有一个交点。

② 当 $-a<1$ 即 $a>-1$ 时 $h(x)$ 与函数 $g(x)$ 图象在区间 $(0,+\infty)$ 无交点无需在考虑区间 $(-1,0)$ 的情况。

下面针对①情况对 $(-1,0)$ 上交点情况进行分析讨论。

2) 还是以特殊情况进行分析，当 $a=-1$ 函数 $h(x)=x$ 与 $g(x)$ 在原点处切，$x\in(-1,0)$ 时，

$g'(x)=e^x\left(\ln(1+x)+\frac{1}{x+1}\right)$，令 $r(x)=\ln(1+x)+\frac{1}{x+1}$，$r'(x)=\frac{x}{(x+1)^2}$ 当 $x\in(-1,0)$ 时 $r'(x)<0$，$r(x)$ 单调递减，所以 $r(x)>r(0)=1$，所以 $g'(x)>0$，$g(x)$ 在 $(-1,0)$ 单调递增，

$g''(x)=e^x\left(\ln(1+x)+\frac{2}{x+1}-\frac{1}{(1+x)^2}\right)=e^x\left(\ln(1+x)+\frac{2x+1}{(1+x)^2}\right)$，令 $p(x)=\ln(1+x)+\frac{2x+1}{(1+x)^2}$，

$p'(x)=\frac{x^2+1}{(1+x)^2}>0$，$g''(x)$ 单调递增 $x\to-1$，$g''(x)\to-\infty$，$g''(0)>0$，存在 $x_0\in(-1,0)$ 使得 $g''(x_0)=0$，$x\in(-1,x_0)$，$g''(x)<0$，$g'(x)>0$，所以 $g(x)$ 图象上凸。当 $x\in(x_0,0)$，$g''(x)>0$，$g'(x)>0$ 所以 $g(x)$ 图象下凸，$x\to-1$，$g(x)\to-\infty$ $g\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{e}}\ln 2>0$ 由图象性质可知，$h(x)=x$ 与 $g(x)$ 在 $\left(-1,-\frac{1}{2}\right)$ 有一个交点，当 $-a>1$ 即 $a<-1$ 时由 $g(x)$ 与 $h(x)$ 图象性质可知两函数图象在 $\left(-1,-\frac{1}{2}\right)$ 恒有一个交点。

综上参数 a 范围为 $(-\infty,-1)$。

4. 思考总结

4.1. 高考中的导数

对于每年高考试题当中，零点个数问题，恒成立问题，估值问题，参数范围问题，极值点偏移问题等等层出不穷，可是高考中导数试题本质还是考查对应单个或多个函数性质以及他们之间的关系，要想解决问题，我们更需要对函数的性质进行深度的探究，例如函数的极值最值、单调性、奇偶性、周期性、图象凹凸性、图象上升下降的快慢等等。只有对函数性质挖掘的更透彻，对于解决高考中的导数试题才会更得心应手。

4.2. GeoGebra 合理运用

将 GeoGebra 融入高中课堂教学当中，GeoGebra 可以精准作出函数图象，还可以通过改变函数解析

式中参数，完整呈现函数的动态变化[3]，激发了学生学习兴趣，让学生感受到信息技术的魅力。通过图象的动态变化，更加直观揭示了函数图象的本质以及函数相应的性质，学生通过观察探索进而寻求函数代数本质，对学生解题思路的形成有很好的促进作用，有效提高学生分析问题解决问题的能力。

4.3. 未来与展望

本文借助于 GeoGebra 探究函数与导数方面知识，GeoGebra 强大的作图功能和代数运算功能还可以对高中知识中的立体几何，解析几何等等各方面的知识做更深入的探究学习。通过本次课堂探究发现信息技术不仅是学生获取数学知识的便捷手段，也是分析探究解决问题的有力工具。在今后教学中有效利用信息技术提升教学效率教学效果。

基金项目

2021 年渤海大学中小学联合教学改革研究项目(2021ZXXJG56)。

参考文献

[1] 胡媛媛. 利用 GeoGebra 探究一道高考数学函数零点问题[J]. 中学数学教学, 2020(5): 38-41.

[2] 陈清华. 践行同课同构, 发展核心素养——用 GeoGebra 软件探究 2016 年全国 I 卷导数试题的课堂实录[J]. 中学数学教研, 2021(5): 3-6.

[3] 王伯龙. 信息技术助力, 创新思维能力培养——以 2019 年高考函数题为例[J]. 理科考试研究数学版, 2019(10): 2-5.

[4] 李凯. 基于 GeoGebra 探究指数函数与对数函数公切线条数——以 2018 年高考天津卷第 20 题的深度探究[J]. 中学数学研究, 2022(3): 6-9.