Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(4), 804-808
Published Online April 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.134083

Hans汉斯

半E-凸锥集值映射的择一性定理

邹东易

重庆理工大学理学院，重庆

收稿日期：2023年3月13日；录用日期：2023年4月14日；发布日期：2023年4月23日

摘　要

在经济分析、最优控制、生态保护等决策问题中，经常遇到目标映射或约束映射为集值映射的优化问题，称之为集值优化问题。在本文中，在局部凸空间中引入了半***E***-凸锥集值映射的概念。用局部凸空间中的凸集分离定理，建立了半***E***-凸锥集值映射的择一性定理。全文安排如下：在第一章，首先，我们介绍了集值映射的择一性定理的研究意义和动机。其次，我们呈现了集值映射的择一性定理的研究现状。在第二章，我们回顾了一些基本概念、定义和引理，包括凸集、点凸锥等。在第三章，我们在集值映射半***E***-凸性假设下，利用线性空间中凸集分离定理，获得了择一性定理。

关键词

E-凸集，半***E***-凸锥集值映射，择一性定理

A Theorem of the Alternative with the Semi-*E* Cone Convex Set-Valued Map

Dongyi Zou

College of Sciences, Chongqing University of Technology, Chongqing

Received: Mar. 13th, 2023; accepted: Apr. 14th, 2023; published: Apr. 23rd, 2023

Abstract

For some decision problems in economic analysis, optimal control and ecological protection, there are some optimization problems, in which objective maps or constraint maps are set-valued maps, called set-valued optimization problems. In this paper, a new notion of the semi-E cone convex set-valued map is introduced in locally convex spaces. By the separation theorem of convex sets in locally convex spaces, a theorem of the alternative with the semi-*E* cone convex set-valued map is established. This paper is organized as follows: In Chapter 1, firstly, we introduce the interest and motivation to study alternative theorems of set-valued. Secondly, we present the research status

文章引用: 邹东易. 半 *E*-凸锥集值映射的择一性定理[J]. 理论数学, 2023, 13(4): 804-808.
DOI: 10.12677/pm.2023.134083

of alternative theorems of set-valued. In Chapter 2, we recall some basic concepts, definitions and lemmas, including the convex set and the pointed convex cone. In Chapter 3, we obtain the selectivity theorem by using the convex set separation theorem in the linear space under the set-valued mapping semi-*E*-convexity assumption.

Keywords

***E*-Convex Set, Semi-*E* Cone Convex Set-Valued Maps, Theorem of the Alternative**

1. 绪论

函数的凸性在最优化理论中起着重要作用。然而，凸性是一个非常强的概念，以至于带有目标函数或约束函数的优化问题不是凸的。为了削弱函数的凸性，学者们使用不同的方法在文献中引入了广义凸函数(见文[1] [2])。更具体地说，通过放松凸集和凸函数的定义，Youness [3]引入了一类 E-凸集和 E-凸函数。为了纠正文献[3]中的定理 4.2，定理 4.3，定理 4.6，陈修素[4]引入了半 E-凸函数的概念和属性。

早在 20 世纪 30 年代，就已经有学者们开始对集值优化进行了深入地研究，随着集值优化的迅速发展以及在最优化、数理经济、控制论等方面的广泛应用，集值优化问题得到了飞速的发展。在局部凸的拓扑线性空间中，对集值优化问题真有效性的最优性条件已经有比较丰富地研究。

分离定理在优化理论中扮演着非常重要的角色，是研究优化问题的有力工具。随着集值映射锥凸性的推广，借助凸集分离定理，集值映射的择一定理也得到了发展。Giannessi [5]在锥凸集值映射下，给出了以集合相交或包含为形式的两个广义不等式不相容的择一定理。Giannessi 的工作是富有开创性的，既为后来致力于集值优化研究的学者奠定了坚实的基础，又指明了方向。文献[6] [7] [8]均在不同的广义凸性下利用凸集分离定理建立了集值映射的择一定理。周志昂和杨新民[9]用拟相对内部定义了广义锥次似凸集值映射，并借助拟相对内部刻画的凸集分离定理获得了广义锥次似凸集值映射的分离性质。

近来，一些学者借助非凸分离定理也建立了集值映射的择一定理。Nishizawa 等[10]利用非凸分离定理，在没有任何凸性假设下，建立了集值映射择一定理。Araya [11]将文献[10]的择一定理进行推广，获得了十种不同类型的集值映射择一定理。

本文的第一个目标是推广由陈修素[4]引入的半 E-凸函数，并引入半 E-凸锥集值映射的概念。众所周知，择一性定理是在最优化理论中建立最优性条件的有利工具。本文的第二个目标是在半 E-凸锥集值映射下建立择一性定理。

2. 预备知识

在本文中，我们假设 X 是线性空间，Y 是实局部凸空间。设 0 代表每个空间中的零元。设 K 是 Y 中的非空子集，K 生成的锥当且仅当 $\forall \lambda \ge 0$ 有 $\lambda K \subseteq K$。K 为凸集当且仅当

$$\lambda k_1 + (1-\lambda) k_2 \in K, \forall \lambda \in [0,1], \forall k_1, k_2 \in K$$

显然，锥 K 为凸的当且仅当 $K + K \subseteq K$，K 为点锥当且仅当 $K \cap (-K) = \{0\}$。K 称为非平凡的当且仅当 $K \ne \{0\}$，且 $K \ne Y$。

Y 的拓扑对偶表示为Y^*。设 C 是在 Y 中的非平凡，点凸锥，且 $\operatorname{int} C \neq \varnothing$。$C$ 的拓扑对偶锥 C^+ 定义为

$$C^+ := \left\{ y^* \in Y^* \middle| \left\langle y, y^* \right\rangle \geq 0, \forall y \in C \right\}$$

其中 $\left\langle y, y^* \right\rangle$ 表示点 y 处线性泛函 y^* 的值。

定义 2.1 [3]设 K 是 X 上的非空集合。称 K 是 X 上的 E-凸集当且仅当存在向量映射 $E: X \to X$，使得

$$\lambda E(x) + (1-\lambda) E(y) \in M, \forall x, y \in M, \forall \lambda \in [0,1]$$

设 M 是 X 上的非空集合，$F: X \rightrightarrows Y$ 是 M 上的集值映射，记为 $F(M) := \bigcup_{x \in M} F(x)$，$\left\langle F(x), y^* \right\rangle := \left\{ \left\langle y, y^* \right\rangle \middle| y \in F(x) \right\}$，且 $\left\langle F(M), y^* \right\rangle := \bigcup_{x \in M} \left\langle F(x), y^* \right\rangle$ 其中 $y^* \in y$。

定义 2.2 [12]设 M 是 X 上的非空集合。集值映射 $F: X \rightrightarrows Y$ 在 M 上是的 C-凸的当且仅当

$$\lambda F(x) + (1-\lambda) F(y) \subseteq F(\lambda x + (1-\lambda) y) + C, \forall x, y \in M, \forall \lambda \in [0,1]$$

在 $\mathbb{R}^n$ 中，陈修素[4]定义了半 E-凸函数。现在我们引入半 E-凸锥集值映射的新概念。

定义 2.3 集值映射 $F: X \rightrightarrows Y$ 在 M 上是的半 E-C-凸的当且仅当存在向量映射 $E: X \to X$，且 M 是 X 上的 E-凸集，使得

$$\lambda F(x) + (1-\lambda) F(y) \subseteq F(\lambda E(x) + (1-\lambda) E(y)) + C, \forall x, y \in M, \forall \lambda \in [0,1]$$

引理 2.1 [13]设 C 是 Y 中非平凡点凸锥，且 $\operatorname{int} C \neq \varnothing$，若 $y \in \operatorname{int} C$ 且 $y^* \in C^+ \setminus \{0\}$，那么 $\left\langle y, y^* \right\rangle > 0$。

3. 择一性定理

在本节中，我们将建立半 E-凸锥集值映射的择一性定理。

定理 3.1. 设 $\operatorname{int} C \neq \varnothing$，设 M 是 X 上的 E-凸集。若集值映射 $F: X \rightrightarrows Y$ 在 M 上是半 E-C-凸的，那么当且仅当满足下列条件只有一个成立：

(i) 存在 $x \in M$，使得 $F(x) \cap (-\operatorname{int} C) \neq \varnothing$；

(ii) 存在 $y^* \in C^+ \setminus \{0\}$，使得

$$\left\langle y, y^* \right\rangle \geq 0, \forall y \in F(M)$$

证明： 若(i)和(ii)同时成立，那么存在 $x \in M$ 和 $y \in F(x)$，使得 $y \in -\operatorname{int} C$。从引理 2.1 可以看出，对于 $\forall y^* \in C^+ \setminus \{0\}$，有 $\left\langle y, y^* \right\rangle < 0$，这与条件(ii)相矛盾。因此，(i)和(ii)不能同时成立。

假设条件(i)不成立。下证条件(ii)成立。我们在 M 上定义一个集值映射：

$$\Gamma(x) := \left\{ y \in Y \middle| (F(x) - y) \cap (-\operatorname{int} C) \neq \varnothing \right\}, \forall x \in M$$

我们现证 $\Gamma(M)$ 是在 Y 上的凸集。设 $z_1, z_2 \in \Gamma(M), \lambda[0,1]$，存在 $x_1, x_2 \in M$，使得 $z_1 \in \Gamma(x_1)$，$z_2 \in \Gamma(x_2)$，因此，$(F(x_1) - z_1) \cap (-\operatorname{int} C) \neq \varnothing$，$(F(x_2) - z_2) \cap (-\operatorname{int} C) \neq \varnothing$。然后存在 $y_1 \in F(x_1)$，$y_2 \in F(x_2)$，$c_1, c_2 \in \operatorname{int} C$，使得 $y_1 = z_1 - c_1$，$y_2 = z_2 - c_2$，我们得到

$$(\lambda y_1 + (1-\lambda) y_2) - (\lambda z_1 + (1-\lambda) z_2) = -\lambda c_1 - (1-\lambda) c_2 \in -\operatorname{int} C \tag{1}$$

集值映射 $F: X \rightrightarrows Y$ 在 M 上是半 E-C-凸的，我们有

$$\lambda F(x_1) + (1-\lambda) F(x_2) \subseteq F(\lambda E(x_1) + (1-\lambda) E(x_2)) + C \tag{2}$$

因为 M 是 X 上的 E-凸集，存在 $x_0 \in K$ 使得

$$x_0 = \lambda E(x_1) + (1-\lambda)E(x_2) \tag{3}$$

由(2)式和(3)式可知存在 $y_0 \in F(x_0)$，$c_0 \in C$，使得

$$\lambda y_1 + (1-\lambda) y_2 = y_0 + c_0 \tag{4}$$

从(1)式和(4)式我们可得 $y_0 - (\lambda z_1 + (1-\lambda) z_2) = -\lambda c_1 - (1-\lambda) c_2 - c_0 \in -\operatorname{int} C$，那么 $(F(x_0)) - (\lambda z_1 + (1-\lambda) z_2) \cap (-\operatorname{int} C) \neq \varnothing$，我们有 $(\lambda z_1 + (1-\lambda) z_2) \in \Gamma(x_0) \subseteq \Gamma(M)$，即 $\Gamma(K)$ 是在 Y 上的凸集。

设 $x_3 \in M, c_3 \in \operatorname{int} C$，有 $y_3 \in F(x_3)$。记 $y_4 := y_3 + c_3$。我们现在证 $y_4 \in \operatorname{int}(\Gamma(x_3))$。因为 $c_3 \in \operatorname{int} C$，存在一个 0 的领域 V 使得 $c_3 + V \subseteq C$，我们有 $(y_4 - y_3) + V \subseteq C$。显然有，

$$2(y_4 - y_3) + V = (y_4 - y_3) + (y_4 - y_3 + V) \subseteq C + c_3 \subseteq \operatorname{int} C \tag{5}$$

由(5)式可得 $y_3 - \left(y_4 + \frac{1}{2}V\right) \subseteq -\operatorname{int} C$。即 $y_4 + \frac{1}{2}V \subseteq \Gamma(x_3)$。因此，$y_4 \in \operatorname{int}(\Gamma(x_3))$，这意味着 $\operatorname{int}(\Gamma(x_3)) \neq \varnothing$。有 $\Gamma(x_3) \subseteq \Gamma(M)$，$\operatorname{int}(\Gamma(M)) \neq \varnothing$。因为条件(i)不成立，$0 \notin \operatorname{int}(\Gamma(M))$。由分离定理(见文[14])可知，存在 $y^* \in Y^* \setminus \{0\}$，使得

$$\langle y, y^* \rangle \geq 0, \forall y \in \Gamma(M) \tag{6}$$

我们下证 $y^* \in C^+$。另外，存在 $\bar{y} \in C$，使得 $\langle \bar{y}, y^* \rangle < 0$。对于 $\forall t > 0$，我们有 $\langle t\bar{y}, y^* \rangle < 0$，因为 $\Gamma(M) \neq \varnothing$，我们设 $y' \in \Gamma(M)$，那么存在 $x' \in M$，使得 $y' \in \Gamma(x')$。显然有 $(F(E(x')) - y') \cap (-\operatorname{int} C) \neq \varnothing$。因此存在 $y'' \in F(x')$，使得 $y' - y'' \in \operatorname{int} C$，那么我们得到

$$y'' - (t\bar{y} + y') = (y'' - y') - t\bar{y} \in -\operatorname{int} C - C = -\operatorname{int} C, \forall t > 0$$

上述式子意味着

$$t\bar{y} + y' \in \Gamma(x') \subseteq \Gamma(M), \forall t > 0 \tag{7}$$

根据(6)式和(7)式，我们有

$$t\langle \bar{y}, y^* \rangle + \langle y', y^* \rangle = \langle t\bar{y} + y', y^* \rangle \geq 0, \forall t > 0 \tag{8}$$

当 $t > -\dfrac{\langle y', y^* \rangle}{\langle \bar{y}, y^* \rangle}$ 时，上述(8)式不成立，得到矛盾，因此，$y^* \in C^+$。

设 $\bar{c} \in \operatorname{int} C$ 是固定的，显然有

$$y + \mu\bar{c} \in \Gamma(x) \subseteq \Gamma(M), \forall \mu > 0, \forall x \in M, \forall y \in F(x) \tag{9}$$

通过(6)式和(9)式，我们有

$$\mu\langle \bar{c}, y^* \rangle + \langle y, y^* \rangle \geq 0, \forall \mu > 0, \forall x \in M, \forall y \in F(x) \tag{10}$$

我们使(10)式中的 $\mu \to 0^+$，我们得到 $\langle y, y^* \rangle \geq 0, \forall y \in F(M)$ 成立。证毕。

参考文献

[1] Yu, P.L. (1974) Cone Convexity, Cone Extreme Points, and Nondominated Solutions in Decision Problems with Multiobjectives. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **14**, 319-377.

[2] Hanson, M.A. (1981) On Sufficiency of the Kuhn-Tucker Conditions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **80**, 545-550. https://doi.org/10.1016/0022-247X(81)90123-2

[3] Youness, E.A. (1999) E-Convex Sets, E-Convex Functions and E-Convex Programming. *Journal of Optimization*

Theory & Applications, **102**, 439-450. https://doi.org/10.1023/A:1021792726715

[4] Chen, X.S. (2002) Some Properties of Semi-E-Convex Functions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **275**, 251-262. https://doi.org/10.1016/S0022-247X(02)00325-6

[5] Giannessi, F. (1987) Theorems of the Alternative for Multifunctions with Applications to Optimization: General results. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **55**, 233-256. https://doi.org/10.1007/BF00939083

[6] Song, W. (1996) Duality for Vector Optimization of Set-Valued Functions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **201**, 212-225. https://doi.org/10.1006/jmaa.1996.0251

[7] Yang, X.M., Li, D. and Wang, S.Y. (2001) Near-Subconvexlikeness in Vector Optimization with Set-Valued Functions. *Journal of Optimization Theory & Applications*, **110**, 413-427. https://doi.org/10.1023/A:1017535631418

[8] Sach, P.H. (2005) New Generalized Convexity Notion for Set-Valued Maps and Application to Vector Optimization. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **125**, 157-179. https://doi.org/10.1007/s10957-004-1716-4

[9] Zhou, Z.A and Yang, X.M. (2011) Optimality Conditions of Generalized Subconvexlike Set Valued Optimization Problems Based on the Quasi-Relative Interior. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **150**, 327-340. https://doi.org/10.1007/s10957-011-9844-0

[10] Nishizawa, S., Onodsuka, M. and Tanaka, T. (2005) Alternative Theorems for Set-Valued Maps Based on a Nonlinear Scalarization. *Pacific Journal of Optimization*, **1**, 147-159. https://doi.org/10.1016/j.na.2012.02.004

[11] Araya, Y. (2012) Four types of Nonlinear Scalarizations and Some Applications in Set Optimization. *Nonlinear Analysis Theory Methods and Application*, **75**, 3821-3835.

[12] Giannessi, F. (1984) Theorems of the Alternative and Optimality Conditions. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **42**, 331-365. https://doi.org/10.1007/BF00935321

[13] Li, Z. (1999) A Theorem of the Alternative and Its Application to the Optimization of Set-Valued Maps. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **100**, 365-375. https://doi.org/10.1023/A:1021786303883

[14] Jahn, J. (2011) Vector Optimization: Theory, Applications and Extensions. 2nd Edition, Springer, Berlin. https://doi.org/10.1007/978-3-642-17005-8