Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(7), 1938-1945
Published Online July 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.137199

Hans汉斯

可分解的正则* - 半群

王钰鑫

云南师范大学数学学院，云南 昆明

收稿日期：2023年6月5日；录用日期：2023年7月7日；发布日期：2023年7月14日

摘 要

半群分解是一类经典的半群理论研究课题。本文主要围绕正则* - 半群的可分解性进行研究。首先介绍正则* - 半群及可分解的正则* - 半群的相关概念，再用正则* - 半带和群的半直积给出了可分解的正则* - 半群和*E*-酉可分解的正则* - 半群的刻画，推广了逆半群的相关结果。

关键词

正则* - 半群，可分解，半直积

On Factorizable Regular*-Semigroups

Yuxin Wang

School of Mathematics, Yunnan Normal University, Kunming Yunnan

Received: Jun. 5th, 2023; accepted: Jul. 7th, 2023; published: Jul. 14th, 2023

Abstract

Factorization of semigroups is a classic topic in semigroup theory. Factorizable regular*-semigroups are studied in this paper. The related concepts of regular*-semigroups and factorizable regular*-semigroups are introduced, and some characterizations of factorizable regular*-semigroups and *E*-unitary factorizable regular*-semigroups are obtained by the semidirect products of regular*-semibands and groups. This generalizes the corresponding results of inverse semigroups.

Keywords

Regular*-Semigroup, Factorizable, Semidirect Product

文章引用: 王钰鑫. 可分解的正则*-半群[J]. 理论数学, 2023, 13(7): 1938-1945.
DOI: 10.12677/pm.2023.137199

1. 引言

众所周知，群的分解是研究群的结构的重要方式。与此相仿，半群的分解理论在半群研究中也占有重要地位。上世纪 60 年代末，Tolo 在[1]中介绍了半群分解的一些基本事实。逆半群是半群理论中研究成果最丰富的一类半群(见[2])。上世纪 70 年代，Chen 和 Hsieh 在[3]中研究了可分解的逆半群。随后文献[4] [5]分别研究了弱可分解逆半群和可分解的变换半群。关于可分解的逆半群的更详细的结果可参见综述文章[6]。作为逆半群的一种推广，纯正半群在上世纪 70 年代被引入，目前也取得了比较丰富的结果(见[7])。特别的，2007 年，文献[8]研究了纯正半群的可分解性。1978 年，Nordahl 和 Scheiblich 在文献[9]中介绍了逆半群的另一种推广形式，即正则*-半群。随后，这类半群得到了众多学者的关注，至今仍不断有新的结果出现(见[10])。本文的目的是介绍并研究正则*-半群的可分解性。在给出正则*-半群的一些必要概念和结果后，提出了可分解正则*-半群的概念，然后用正则*-半带和群的半直积给出了可分解的正则*-半群的结构。

2. 预备知识

设$(S,\cdot)$是半群。记 S 的幂等元集为$E(S)$。对任意$a\in S$，记

$$V(a)=\{x\in S\mid axa=a,xax=x\}.$$

设$^*:S\to S$是映射。称$(S,\cdot,^*)$为正则*-半群，若下述公理成立：

$$xx^*x=x,\ (x^*)^*=x,\ (xy)^*=y^*x^*.$$

记$P(S)=\{e\in E(S)\mid e^*=e\}$，并称$P(S)$中元素为 S 的投射元。

引理 2.1 [9] 设$(S,\cdot,^*)$是正则*-半群。

(1) $P(S)=\{xx^*\mid x\in S\}=\{x^*x\mid x\in S\}$，$E(S)=P(S)^2$。

(2) 对任意$a\in S$，$e\in P(S)$，有$a^*ea\in P(S)$。

(3) 每个$\mathcal{L}$-类和$\mathcal{R}$-类均含唯一的投射元。

(4) $a\mathcal{R}b$ 当且仅当$aa^*=bb^*$。

(5) $a\mathcal{L}b$ 当且仅当$a^*a=b^*b$。

称半群 S 正则，若对任意$a\in S$，有$V(a)\neq\varnothing$。易见，正则*-半群是正则半群。正则半群 S 称为纯正半群，若$E(S)$形成 S 的子半群(子带)。

引理 2.2 [7] 设$(S,\cdot,^*)$是正则*-半群。则 S 纯正当且仅当对任意$e\in E(S)$，有$V(e)\subseteq E(S)$。

设$(S,\cdot,^*)$为正则*-半群。记$P(S)$生成的子半群为$C(S)$，即

$$C(S)=\{e_1e_2\cdots e_n\mid e_i\in P(S),i=1,2,\cdots,n,n\in\mathbb{N}\}.$$

由引理 2.1(1)，$E(S)\subseteq C(S)$。若$S=C(S)$，则称 S 是正则*-半带。特别的，若$S=E(S)$，则称 S 是正则*-带。容易看出，若$(S,\cdot,^*)$是纯正的正则*-半群，则$(E(S),\cdot,^*)$形成正则*-带。

命题 2.3 设$(S,\cdot,^*)$是正则*-半群。则$(C(S),\cdot,^*)$是正则*-半带。特别地，若 S 含单位元 1，则$C(S)$是含单位元的正则*-半带。

证明. 任取 $c=e_1e_2\cdots e_n\in C(S)$，其中 $e_i\in P(S),i=1,2,\cdots,n$。则

$$(e_1e_2\cdots e_n)^*=e_n^*\cdots e_2^*e_1^*=e_n\cdots e_2e_1\in C(S),$$

故 $C(S)$ 对运算 * 封闭，从而 $C(S)$ 是 S 的正则 * – 子半群。对任意 $p\in P(S)$，有 $p\in C(S)$，从而 $p=pp=pp^*\in P(C(S))$。于是 $P(C(S))\subseteq P(S)\subseteq P(C(S))$。这表明 $C(C(S))=C(S)$。故 $C(S)$ 是正则 * – 半带。若 S 含单位元 1，则 $1\in P(S)\subseteq C(S)$，于是 $C(S)$ 是含单位元的正则 * – 半带。

设 S 是正则 * – 半群，称 S 是 E-酉的，如果对任意 $s\in S$ 及 $e\in E(S)$，$se\in E(S)$ 蕴含 $s\in E(S)$。

命题 2.4 设 S 是 E-酉的正则 * – 半群。则 $E(S)=C(S)$ 是正则 * – 带。

证明. 设 $e\in E(S)$，$x\in V(e)$。则 $xe\in E(S)$。由于 S 是 E-酉的，故 $x\in E(S)$。由引理 2.2 知 S 纯正，从而 $E(S)$ 是正则 * – 带。由引理 2.1(1)及 $C(S)$ 的定义知

$$E(S)=P(S)^2\subseteq C(S)\subseteq E(S),$$

从而 $E(S)=C(S)$。

3. 主要结果及其证明

本节设 S 为正则 * – 半群，U 是群，设 U 在 S 上有作用 $U\times S\to S$，$(u,s)\mapsto u\cdot s$ 且满足以下条件：对任意 $u,v\in U$ 及 $s,t\in S$，

$$u\cdot(v\cdot s)=(uv)\cdot s,\ 1\cdot s=s,\ u\cdot(st)=(u\cdot s)(u\cdot t),\ u\cdot s^*=(u\cdot s)^*.$$

在集合 $S\times U$ 上定义

$$(s,u)(t,v)=(s(u\cdot t),uv),\ (s,u)^*=(u^{-1}\cdot s^*,u^{-1}).$$

命题 3.1 $S\times U$ 关于上述运算形成正则 * – 半群，称为 S 和 U 的半直积，记为 $S*U$。若 S 有单位元 1，则 $(1,1)$ 是 $S*U$ 的单位元。进一步的，有

$$P(S\times U)=P(S)\times\{1\},\ E(S\times U)=E(S)\times\{1\}\left(=P(S)^2\times 1\right),\ C(S\times U)=C(S)\times\{1\}.$$

特别的，若 S 是正则 * – 半带，则 $C(S\times U)=C(S)\times\{1\}=S\times\{1\}$。

证明. 设 $(s,u),(t,v),(x,y)\in S\times U$。则

$$\begin{aligned}((s,u)(t,v))(x,y)&=(s(u\cdot t),uv)(x,y)=(s(u\cdot t)((uv)\cdot x),uvy)\\&=(s(u\cdot t)(u\cdot(v\cdot x)),uvy)=(s(u\cdot(t(v\cdot x))),uvy)\\&=(s,u)(t(v\cdot x),vy)=(s,u)((t,v)(x,y)).\end{aligned}$$

这表明 $S*U$ 是半群。又因为

$$\begin{aligned}(s,u)(s,u)^*(s,u)&=(s,u)(u^{-1}\cdot s^*,u^{-1})(s,u)\\&=(s(u\cdot(u^{-1}\cdot s^*)),1)(s,u)\\&=(ss^*,1)(s,u)=(ss^*s,u)=(s,u),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}((s,u)^*)^*&=(u^{-1}\cdot s^*,u^{-1})^*=\left(u\cdot(u^{-1}\cdot s^*)^*,u\right)\\&=((uu^{-1})\cdot s^{**},u)=(s,u)\end{aligned},$$

$$\begin{aligned}\left((s,u)(t,v)\right)^{*}&=\left(s(u\cdot t),uv\right)^{*}=\left((uv)^{-1}\cdot\left(s(u\cdot t)\right)^{*},(uv)^{-1}\right)\\&=\left((uv)^{-1}\cdot\left((u\cdot t)^{*}s^{*}\right),v^{-1}u^{-1}\right)\\&=\left(\left(\left(v^{-1}u^{-1}\right)\cdot(u\cdot t)^{*}\right)\left(\left(v^{-1}u^{-1}\right)\cdot s^{*}\right),v^{-1}u^{-1}\right)\\&=\left(\left(v^{-1}\cdot t^{*}\right)\left(v^{-1}\cdot\left(u^{-1}\cdot s^{*}\right)\right),v^{-1}u^{-1}\right)\\&=\left(v^{-1}\cdot t^{*},v^{-1}\right)\left(u^{-1}\cdot s^{*},u^{-1}\right)=(t,v)^{*}(s,u)^{*},\end{aligned}$$

故 $S*U$ 是正则*－半群。进一步的，有 $u\cdot\left(u^{-1}\cdot s\right)=1\cdot s=s$，从而

$$s(u\cdot 1)=\left(u\cdot\left(u^{-1}\cdot s\right)\right)(u\cdot 1)=u\cdot\left(\left(u^{-1}\cdot s\right)1\right)=u\cdot\left(u^{-1}\cdot s\right)=s,$$

$$(1,1)(s,u)=(1(1\cdot s),u)=(s,u)=(s(u\cdot 1),u)=(s,u)(1,1).$$

故 $(1,1)$ 是 $S*U$ 的单位元。另一方面，由上述证明知 $(s,u)(s,u)^{*}=\left(ss^{*},1\right)\in P(S)\times\{1\}$。这说明

$$P(S\times U)=\left\{(s,u)(s,u)^{*}\mid(s,u)\in S\times U\right\}\subseteq P(S)\times\{1\}.$$

对任意 $e\in P(S)$，有

$$(e,1)=\left(ee^{*},1\right)=(e,1)\left(e^{*},1\right)=(e,1)(e,1)^{*}\in P(S\times U).$$

故 $P(S\times U)=P(S)\times\{1\}$。据引理 2.1 知 $E(S\times U)=\left(P(S)\times\{1\}\right)^{2}=P(S)^{2}\times\{1\}$。最后由 $C(S)$ 及 $C(S\times U)$ 的定义立得 $C(S\times U)=C(S)\times\{1\}$。

命题 3.2 设 $S*U$ 是正则*－半群 S 与群 U 的半直积。则

(1) $(s,u)\mathcal{R}(t,v)$ 当且仅当 $ss^{*}=tt^{*}$。

(2) $(s,u)\mathcal{L}(t,v)$ 当且仅当 $u^{-1}\cdot\left(s^{*}s\right)=v^{-1}\cdot\left(t^{*}t\right)$。

证明. 由引理 2.1(4)及事实 $(s,u)(s,u)^{*}=\left(ss^{*},1\right)$ 和 $(t,v)(t,v)^{*}=\left(tt^{*},1\right)$ 知(1)成立。另一方面，由引理 2.1(5)及

$$(s,u)^{*}(s,u)=\left(u^{-1}\cdot s^{*},u^{-1}\right)(s,u)=\left(\left(u^{-1}\cdot s^{*}\right)\left(u^{-1}\cdot s\right),1\right)=\left(u^{-1}\cdot\left(s^{*}s\right),1\right)$$

和 $(t,v)^{*}(t,v)=\left(v^{-1}\cdot\left(t^{*}t\right),1\right)$ 知(2)成立。

称正则*－半群 S 是可分解的，若存在 S 的子群 G 使得 $S=GC(S)$，且 G 的单位元为 S 的投射元。

下面的例子指出，可分解的正则*－半群未必是逆半群。

例 3.3 设 $I=\Lambda=\{1,2\}$ 是指标集，$x,y,z,w\in I\times\Lambda$，其中

$$x=(1,1),y=(1,2),z=(2,1),w=(2,2).$$

记 $S=\{x,y,z,w\}$。在 S 上定义乘法如下：对任意 $s_{1}=\left(a_{1},b_{1}\right),s_{2}=\left(a_{2},b_{2}\right)\in S$，$a_{1},a_{2},b_{1},b_{2}\in I$，

$$s_{1}s_{2}=\left(a_{1},b_{1}\right)\left(a_{2},b_{2}\right)=\left(a_{1},b_{2}\right).$$

则 S 关于乘法作成矩形带。记 $S^{e}=S\cup\{e\}$，其中 e 是单位元。在 S^{e} 上规定一元运算“*”如下：

$$x^{*}=x,y^{*}=z,z^{*}=y,w^{*}=w,e^{*}=e.$$

易验证 $\left(S^{e},\cdot,^{*}\right)$ 是正则*－半群且 $P\left(S^{e}\right)=\{x,w,e\}$，$C\left(S^{e}\right)=S^{e}$。又 S^{e} 的单位元 e 所在的 $\mathcal{H}$-类只有 e 本身，所以 S^{e} 的单位群为 $U\left(S^{e}\right)=\{e\}$。于是 $S^{e}=U\left(S^{e}\right)C\left(S^{e}\right)$。故 S^{e} 是可分解的正则*－半群，并且 S^{e} 不是逆半群。

下面给出可分解的正则*－半群的一些性质。

命题 3.4 设 S 是可分解的正则*－半群且 $S=GC(S)$。则

(1) 对任意 $g\in G$，g 在 G 中的逆元为 g^*。

(2) $S=C(S)G$。

(3) G 的单位元是 S 的单位元，记为 1。

(4) $G=U(S)$，其中 $U(S)$ 是 S 的单位群，即 S 的单位元 1 所在的 $\mathcal{H}$-类 H_1。

证明. (1) 设 1 是 G 的单位元，g^{-1} 是 g 在 G 中的逆元。则由假设条件知 $1\in P(S)$ 且 $1=gg^{-1}\mathcal{R}g\mathcal{L}g^{-1}g=1$。另一方面，有 $gg^*\mathcal{R}g\mathcal{L}g^*g$。故由引理 2.1(3)知 $gg^{-1}=gg^*$，$g^{-1}g=g^*g$。于是 $g^*=g^*gg^*=g^{-1}gg^*=g^{-1}gg^{-1}=g^{-1}$。

(2) 设 $s\in S$。因为 $S=GC(S)$，所以存在 $g\in G$ 和 $c\in C(S)$，使得 $s^*=gc\in S$。由命题 2.3 及(1)，$s=s^{**}=(gc)^*=c^*g^*=c^*g^{-1}\in C(S)G$。故 $S=C(S)G$。

(3) 设 G 的单位元是 1。因为 $S=GC(S)$，所以对任意 $s\in S$，存在 $g\in G$，$c\in C(S)$ 使得 $s=gc$。因此 $1s=1(gc)=(1g)c=gc=s$。由(2)知 $S=C(S)G$。所以对任意 $s\in S$，存在 $g\in G$，$c\in C(S)$ 使得 $s=cg$。因此 $s1=(cg)1=c(g1)=cg=s$。这表明 1 是 S 的单位元。

(4) 因为 $U(S)$ 是 S 的包含 1 的极大子群，所以 $G\subseteq U(S)$。任取 $h\in U(S)$。则由

$$h\in U(S)\subseteq S=GC(S)$$

知，存在 $g\in G$ 和 $c\in C(S)$ 使得 $h=gc$。故 $c=1c=g^{-1}gc=g^{-1}h\in U(S)$，从而 $c\mathcal{H}1$。由(1)和引理 2.1(4)知 $cc^*=cc^{-1}=1$。记 $c=e_1e_2\cdots e_n$，其中 $e_i\in P(S), i=1,2,\cdots,n$。则由 $cc^*=1$ 知 $e_1=e_11=e_1cc^*=cc^*=1$。类似可证 $e_2=e_3=\cdots=e_n=1$。故 $c=1$，从而 $h=g\in G$。这表明 $U(S)\subseteq G$。于是 $G=U(S)$。

由命题 3.4 易得可分解的逆半群的下述已知结果。

命题 3.5 [3] 设 S 是可分解的逆半群且 $S=GE(S)$。则

(1) $S=E(S)G$。

(2) G 的单位元是 S 的单位元，记为 1。

(3) $G=U(S)$，其中 $U(S)$ 是 S 的单位群，即 S 的单位元 1 所在的 $\mathcal{H}$-类 H_1。

定理 3.6 设 S 是正则*－半群。则下述几条等价：

(1) S 可分解。

(2) S 是某个含单位元的正则*－半带 C 和某个群 U 的半直积 $C*U$ 的投射生成元分离的 $(2,1)$-同态像。

(3) S 是幺半群且是某个正则*－半带 C 和某个群 U 的半直积 $C*U$ 的 $(2,1)$-同态像。

证明. (1)$\Rightarrow$(2)。设 S 可分解。由命题 3.4 知 S 含单位元且 $S=C(S)U(S)$，其中 $U(S)$ 是 S 的单位群。据命题 2.3，$C(S)$ 是含单位元的正则*－半带。规定 $U(S)$ 在 $C(S)$ 上的作用如下：

$$U(S)\times C(S)\to C(S),\ (u,c)\mapsto u\cdot c=ucu^{-1},\ u\in U(S),\ c\in C(S),$$

则对任意 $u,v\in U(S)$ 及 $c,c'\in C(S)$，由命题 3.4(1)，有

$$v\cdot(u\cdot c)=v\left(ucu^{-1}\right)v^{-1}=(vu)c(vu)^{-1}=(vu)\cdot c,\quad 1\cdot c=1c1=c,$$

$$u\cdot(cc')=ucc'u^{-1}=ucu^{-1}uc'u^{-1}=(u\cdot c)(u\cdot c'),$$

$$(u\cdot c)^*=\left(ucu^{-1}\right)^*=\left(u^{-1}\right)^*c^*u^*=uc^*u^{-1}=u\cdot c^*.$$

由命题 3.1 可得 $C(S)$ 和 $U(S)$ 的半直积 $C(S)*U(S)$。定义

$$\varphi: C(S)*U(S)\to S,\ (c,u)\mapsto cu.$$

下证 φ 是投射生成元分离的满的 $(2,1)$-同态。由命题 3.1 及命题 2.3 知

$$C\left(C(S)*U(S)\right)=C\left(C(S)\right)\times\{1\}=C(S)\times\{1\}.$$

设 $(c,1),(c',1)\in C\left(C(S)*U(S)\right)$ 且 $(c,1)\varphi=(c',1)\varphi$。则 $c1=c'1$，从而 $c=c'$。这表明 φ 是投射生成元分离的。由于 S 可分解，故对任意 $s\in S$，存在 $c\in C(S)$，$u\in U(S)$ 使得 $s=cu$。于是 $(c,u)\in C(S)*U(S)$ 且 $(c,u)\varphi=cu=s$。故 φ 是满射。设 $(c,u),(c',v)\in C(S)*U(S)$。则

$$\left((c,u)(c',v)\right)\varphi=\left(c(u\cdot c'),uv\right)\varphi=c(u\cdot c')uv=cuc'u^{-1}uv=cuc'v=(c,u)\varphi(c',v)\varphi,$$

$$\left((c,u)^*\right)\varphi=\left(u^{-1}\cdot c^*,u^{-1}\right)\varphi=\left(u^{-1}c^*u,u^{-1}\right)\varphi=u^{-1}c^*uu^{-1}=u^{-1}c^*=(cu)^*=\left((c,u)\varphi\right)^*.$$

因此 φ 是 $(2,1)$-同态。

若 S 是 E-酉的，则由命题 2.4 知 $E(S)=C(S)$。设 $(c,u),(c',v)\in C(S)*U(S)$。则 $c,c'\in C(S)=E(S)$。若 $(c,u)\varphi=(c',v)\varphi$，则 $cu=c'v$，从而 $c=c'vu^{-1}\in E(S)$。注意到 $c'\in E(S)$ 且 S 是 E-酉的，有 $vu^{-1}\in E(S)$。由于 $v,u^{-1},vu^{-1}\in U(S)$，故 $vu^{-1}=1$，从而 $u=v$，$c=c'$。这说明 φ 是单射。故当 S 是 E-酉可分解的正则*－半群时，

$$\varphi: C(S)*U(S)\to S$$

是同构映射。此时 S 同构于某个含单位元的正则*－带和某个群的半直积。

$(2)\Rightarrow(3)$。显然。

$(3)\Rightarrow(1)$。设 S 有单位元 1，C 是正则*－半带，U 是群，$C*U$ 是 C 和 U 的半直积。又设 $\varphi: C*U\to S$ 是 $(2,1)$-满同态。则 $S=\left\{(c,g)\varphi\mid(c,g)\in C*U\right\}$。设 $(c,g)\varphi=1$。则

$$\left(g^{-1}\cdot c^*,g^{-1}\right)\varphi=(c,g)^*\varphi=\left((c,g)\varphi\right)^*=1^*=1.$$

于是

$$(c,g)\varphi\left(g^{-1}\cdot c^*,g^{-1}\right)\varphi=\left((c,g)\left(g^{-1}\cdot c^*,g^{-1}\right)\right)\varphi=\left(cc^*,1\right)\varphi=1,$$

其中 $cc^*\in P(C)$。这表明，存在 $e\in P(C)$ 使得 $(e,1)\varphi=1$。

设 $g\in G$。则

$$\begin{aligned}(e,g)\varphi&=(e,g)\varphi(e,1)\varphi=\left((e,g)(e,1)\right)\varphi=\left(e(g\cdot e),g\right)\varphi\\&=\left((e,1)(g\cdot e,g)\right)\varphi=(e,1)\varphi(g\cdot e,g)\varphi=(g\cdot e,g)\varphi\end{aligned}$$

据命题 3.2，有 $(g\cdot e,g)\mathcal{R}(g\cdot e,1)$ 和 $(e,g)\mathcal{R}(e,1)$。于是

$$1=(e,1)\varphi\mathcal{R}(e,g)\varphi=(g\cdot e,g)\varphi\mathcal{R}(g\cdot e,1)\varphi. \tag{3.1}$$

由 $e\in P(C)$ 知 $(g\cdot e)^2=(g\cdot e)(g\cdot e)=g\cdot e^2=g\cdot e\in E(C)$，从而

$$(g\cdot e,1)(g\cdot e,1)=\left((g\cdot e)(g\cdot e),1\right)=(g\cdot e,1)\in E(C*U).$$

这导致 $(g\cdot e,1)\varphi\in E(S)$。据(3.1)，$(g\cdot e,1)\varphi=1$。由 g 的任意性得 $\left(g^{-1}\cdot e,1\right)\varphi=1$。另一方面，由

$$g^{-1}\cdot\left(e^*e\right)=\left(g^{-1}\cdot e^*\right)\left(g^{-1}\cdot e\right)=1\cdot\left(\left(g^{-1}\cdot e\right)^*\left(g^{-1}\cdot e\right)\right)$$

及命题 3.2 得 $(e,g)\mathcal{L}\left(g^{-1}\cdot e,1\right)$，从而由(3.1)得 $1=(e,1)\varphi\mathcal{R}(e,g)\varphi\mathcal{L}\left(g^{-1}\cdot e,1\right)\varphi=1$，即 $(e,g)\varphi\mathcal{H}1$，于是

$(e,g)\varphi \in U(S)$。

设 $s \in S$。因为 S 是 $C*U$ 的 $(2,1)$-同态像，故存在 $(c,g) \in C*U$，使得 $s=(c,g)\varphi$，从而由 $(e,1)\varphi=1$ 知

$$\begin{aligned} s &= (c,g)\varphi = (c,g)\varphi(e,1)\varphi = ((c,g)(e,1))\varphi \\ &= (c(g\cdot e),g)\varphi = ((c,1)(g\cdot e,g))\varphi = (c,1)\varphi(g\cdot e,g)\varphi. \end{aligned}$$

由命题 3.1 知 $(c,1) \in C(C*U)$，从而 $(c,1)\varphi \in C(S)$。据(3.1)式，有

$$(g\cdot e,g)\varphi = (e,g)\varphi \in U(S).$$

故 $S = C(S)U(S)$。这就证明了 S 可分解。

推论 3.7 设 S 是正则*－半群，则 S 是 E-酉可分解的当且仅当 S 同构于某个含单位元的正则*－带和某个群的半直积。

证明. 由定理 3.6 证明中(1)$\Rightarrow$(2)部分的最后一段可得必要性。下证充分性。设 B 是一个含单位元的正则*－带，G 是群，$B*G$ 是 B 和 G 的半直积。由命题 2.3 知 S 是幺半群。据定理 3.6，S 可分解。另一方面，据命题 3.1 知 $E(B*G)=E(B)\times\{1\}=B\times\{1\}$。设

$$(b,g) \in B*G，\ (e,1) \in E(B*G) \text{ 且 } (b,g)(e,1) \in E(B*G)。$$

注意到

$$(b,g)(e,1) = (b(g\cdot e),g) \in E(B*G),$$

有 $g=1$，从而 $(b,g) \in E(B*G)$。故 $B*G$ 是 E-酉的。

将定理 3.6 及推论 3.7 用到逆半群的情况，有以下推论。

推论 3.8 [2] 设 S 是逆半群。则下述几条等价：

(1) S 可分解。

(2) S 是某个含单位元的半格 E 和某个群 G 的半直积 $E*G$ 的幂等元分离的 $(2,1)$-同态像。

(3) S 是幺半群且是某个半格 E 和某个群 G 的半直积 $E*G$ 的 $(2,1)$-同态像。

推论 3.9 [2] 设 S 是逆半群，则 S 是 E-酉可分解的当且仅当 S 同构于某个含单位元的半格和某个群的半直积。

参考文献

[1] Tolo, K. (1969) Factorizable Semigroups. *Pacific Journal of Mathematics*, **31**, 523-535. https://doi.org/10.2140/pjm.1969.31.523

[2] Lawson, M.V. (1998) Inverse Semigroups, the Theory of Partial Symmetries. World Scientific, New York. https://doi.org/10.1142/3645

[3] Chen, S.Y. and Hsieh, S.C. (1974) Factorizable Inverse Semigroups. *Semigroup Forum*, **8**, 283-297. https://doi.org/10.1007/BF02194773

[4] Tirasupa, Y. (1979) Weakly Factorizable Inverse Semigroups. *Semigroup Forum*, **18**, 283-291. https://doi.org/10.1007/BF02574193

[5] Tirasupa, Y. (1979) Factorizable Transformation Semigroups. *Semigroup Forum*, **18**, 15-19. https://doi.org/10.1007/BF02574171

[6] FitzGerald, D.G. (2010) Factorizable Inverse Monoids. *Semigroup Forum*, **80**, 484-509. https://doi.org/10.1007/s00233-009-9177-6

[7] Howie, J.M. (1995) Fundamentals of Semigroup Theory. Oxford University Press, New York.

[8] Hartmann, M. (2007) Almost Factorizable Orthodox Semigroups. *Semigroup Forum*, **74**, 106-124. https://doi.org/10.1007/s00233-006-0618-1

[9] Nordahl, T.E. and Scheiblich, H.E. (1978) Regular*-Semigroups. *Semigroup Forum*, **16**, 369-377. https://doi.org/10.1007/BF02194636

[10] East, J. and Azeef Muhammed, P.A. (2023) A Groupoid Approach to Regular*-Semigroups. arXiv:2301.04845v1