

Multidimensional Visualization Exploration of Trinomial Combination Coefficient Based on Variant Measurement

Feng Deng, Zhijie Zheng

Yunnan University, Kunming Yunnan
Email: 1345246776@qq.com

Received: Aug. 6th, 2019; accepted: Aug. 16th, 2019; published: Aug. 26th, 2019

Abstract

The binomial and trinomial combination counting calculation mode plays a core role in data description and data analysis of probability statistics, artificial intelligence, and big data. In this paper, the variable measurement is used to calculate and project the multi-dimensional distribution of the trinomial combination counting coefficient. Based on the binomial combination equation and the quaternary variable metric, the binomial combination coefficients are decomposed and transformed to form a trinomial combination coefficient equation, and the two-dimensional quantization counting matrix is obtained by the combination number calculation method. The relevant numerical calculation results are converted into statistical two-dimensional histograms and displayed in a two-dimensional color map. In this paper, the results of spatial symmetry and distribution diversity of the trinomial coefficients are exhibited by using multiple graphical results. From the variation and invariant characteristics of the trinomial combination coefficient distribution, the clustering distribution characteristics of various combined transformations are systematically explored.

Keywords

Variable Measurement, Combination Number, Visualization, Trinomial Coefficient

基于变值测量对三项式组合系数的多维可视化探索

邓 凤, 郑智捷

云南大学, 云南 昆明
Email: 1345246776@qq.com

收稿日期: 2019年8月6日; 录用日期: 2019年8月16日; 发布日期: 2019年8月26日

摘要

二项式、三项式组合计数的计算在概率统计、人工智能、大数据等的数据描述和分析中起着核心作用。本文利用变值测量, 对三项式组合计数系数的多维分布进行计算和投影。采用二项式组合表达式和四元变值度量为基础, 对二项式组合系数进行分解转换, 形成三项式组合系数表达式, 利用组合数计算方法得到二维量化计数矩阵。将相关数值计算结果转化为统计二维直方图, 以二维彩图模式展现。文中利用多个图示结果展现出三项式系数的空间对称性和分布多样性的特征。从三项式组合系数分布的变化和不变特性, 系统地探索各种组合变换的聚类分布特性。

关键词

变值测量, 组合数, 可视化, 三项式组合系数

Copyright © 2019 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

二项式组合系数在数论、图论、统计和概率等数学分支扮演着重要的角色[1], 其在组合数学[2] [3] [4] [5] [6]、解析数学等学科研究领域也很重要, 得到大数据、人工智能、概率统计等领域专家的关注。随着大数据和人工智能、机器学习的深入发展, 从基础数学的角度对组合计数的作用机制进行深入研究, 变得越来越重要。与前沿大数据和人工智能相关的数学问题可能是一个抽象的计数问题, 所涉及到的组合问题一直是组合函数中研究的核心。

传统组合计数问题的研究集中在恒等式证明, 对二项式组合系数的可视化研究需要更为深入探索。从统计分布的角度来看, 可视化是与实验、理论、计算同样重要的研究工具[7], 可以将复杂问题几何化, 具有清晰易懂、简洁明了的特点。将一个数学公式以图示化的结果表现出来, 便于统计学研究人员进行全局观察, 从中找出其固有的属性特征。为了描述二项式组合系数形成的丰富的特征, 本文利用变值测量[8] [9]理论模型形成二项式组合系数, 通过二项式表达式的四个元度量[10], 研究了三项式组合系数的变化和不变特性。利用多维空间组合, 组合数计算方法得到二维空间矩阵, 并对这个二维空间分布结果进行可视化。从全局不变的角度来看, 系统地探索了各种组合变换的聚类分布特性。

2. 基本理论

2.1. 二项式系数

二项式系数表示 n 元素的所有 i 元子集的个数, 其数学表达式为:

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!} \quad (1)$$

其中: n 和 i 均为整数, 且满足 $n \geq i \geq 0$ 。

2.2. 范德蒙德综合式

范德蒙德综合式(Vandermonde) [11] [12]是指相关联的二项式系数乘法组的总和组成二项式系数公式。(范德蒙德综合式)对所有整数 n , 有

$$\sum_k \binom{r}{k} \binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{n} \quad (2)$$

本文中所提及的三项式系数为范德蒙德综合式的逆运算, 是将二项式系数表达式拆分为两个二项式组合计数表达式, 并对这两个分组公式进行计数求和操作的多项组合变形公式。其中: 两个分组二项式组合计数公式共含有 4 个变量, 且各不相同。

2.3. 基本测量公式

变值测量方法请参阅[13], 核心公式详情请参考第 58~68 页内容。

根据变值组合式, 对二项式系数公式 $\binom{m}{p}$, $m \geq p \geq 0$, 将变量 m 拆分为 4 元变量, p 进行等价置换, 结合(2)式, 有

$$\binom{m}{p} = \sum_p \binom{m-2q}{p-k} \binom{2q}{k} \quad (3)$$

其中, m 表示总数, p 为 1 的个数, q 为 0~1 的个数, k 为符合数, 各个变量的取值范围为: $m \geq \lfloor q/2 \rfloor \geq 0$, $m \geq p \geq 0$, $p \geq k \geq 0$ 。

3. 计算模型

利用变值测量相关公式, 本论文中所要求解的组合数的处理模型如下图 1 所示:



Figure 1. Curve: Trinomial coefficient solution processing model

图 1. 三项式系数求解处理模型

选择: 等价替换二项式系数公式 $\binom{m}{p}$ 中的变量 m, p , 形成含有 4 个变量的三项式系数公式:

$$\sum_p \binom{m-2q}{p-k} \binom{2q}{k}$$

计算: m 为任意整数, 控制 p, k, q , 3 个变量中的任意一个, 使用组合数计算方法计算三项式组合系数公式。

计数矩阵: 三项式组合系数公式的结果矩阵。

图示: 将计数矩阵投影在二维图上。

4. 结果展示

4.1. 计数矩阵

对于三项式组合系数公式 $\sum_p \binom{m-2q}{p-k} \binom{2q}{k}$, 取 $m = 10, m = 11$, 控制 q 值变换为例, 计算得出这个组合数公式的结果如下表 1, 表 2, 表 3 所示:

- 当 $m = 10, m = 11, q = 0$ 时有:

Table 1. Resulting data of trinomial coefficients
表 1. 三项式组合公式计数矩阵

	$m = 10$		$m = 11$	
	$k = 0$	$k = 1$	$k = 0$	$k = 1$
$p = 0$	1	0	1	0
$p = 1$	10	0	11	0
$p = 2$	45	0	55	0
$p = 3$	120	0	165	0
$p = 4$	210	0	330	0
$p = 5$	252	0	462	0
$p = 6$	210	0	462	0
$p = 7$	120	0	330	0
$p = 8$	45	0	165	0
$p = 9$	10	0	55	0
$p = 10$	1	0	11	0
$p = 11$	/	/	1	0

*注: 表中只显示有数据的列, 未显示的数据列, 其列值均为 0。

- 当 $m = 10, m = 11, q = 2$ 时有:

Table 2. Resulting data of trinomial coefficients
表 2. 三项式组合公式计数矩阵

	$m = 10$					$m = 11$				
	$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$
$p = 0$	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0
$p = 1$	6	4	0	0	0	7	4	0	0	0
$p = 2$	15	24	6	0	0	21	28	6	0	0
$p = 3$	20	60	36	4	0	35	140	42	4	0
$p = 4$	15	80	90	24	1	35	140	126	28	1
$p = 5$	6	60	120	60	6	21	84	210	84	7
$p = 6$	1	24	90	80	15	7	28	210	140	21
$p = 7$	0	4	36	60	20	1	4	126	140	35
$p = 8$	0	0	6	24	15	0	0	42	84	35
$p = 9$	0	0	0	4	6	0	0	6	28	21
$p = 10$	0	0	0	0	1	0	0	0	4	7
$p = 11$	/	/	/	/	/	0	0	0	0	1

*注: 表中只显示有数据的列, 未显示的数据列, 其列值均为 0。

- 当 $m = 10, m = 11, q = 4$ 时有:

Table 3. Resulting data of trinomial coefficients
表 3. 三项式组合公式计数矩阵

	$m = 10$									$m = 11$										
	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$	$k=9$	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$	$k=9$
$p=0$	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$p=1$	2	8	0	0	0	0	0	0	0	0	3	8	0	0	0	0	0	0	0	0
$p=2$	1	16	28	0	0	0	0	0	0	0	3	24	28	0	0	0	0	0	0	0
$p=3$	0	8	56	56	0	0	0	0	0	0	1	24	84	56	0	0	0	0	0	0
$p=4$	0	0	28	112	70	0	0	0	0	0	0	8	84	168	70	0	0	0	0	0
$p=5$	0	0	0	56	140	56	0	0	0	0	0	0	28	168	210	56	0	0	0	0
$p=6$	0	0	0	0	70	112	28	0	0	0	0	0	0	56	210	168	28	0	0	0
$p=7$	0	0	0	0	0	56	56	8	0	0	0	0	0	0	70	168	84	8	0	0
$p=8$	0	0	0	0	0	0	28	16	1	0	0	0	0	0	0	56	84	24	1	0
$p=9$	0	0	0	0	0	0	0	8	2	0	0	0	0	0	0	0	28	24	3	0
$p=10$	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	8	3	0
$p=11$	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0

*注: 表中只显示有数据的列, 未显示的数据列, 其列值均为 0。

4.2. 图示

4.2.1. $m = 10, q$ 值变换

以上二维计数矩阵空间, 以 p, k 为横纵坐标, 将计算结果投影在二维图上, 形式一个多元彩色色谱图。此三项式所得出的结果包含 6 个图(见图 2), 分别为 $q = 0, q = 1, q = 2, q = 3, q = 4, q = 5$ 。

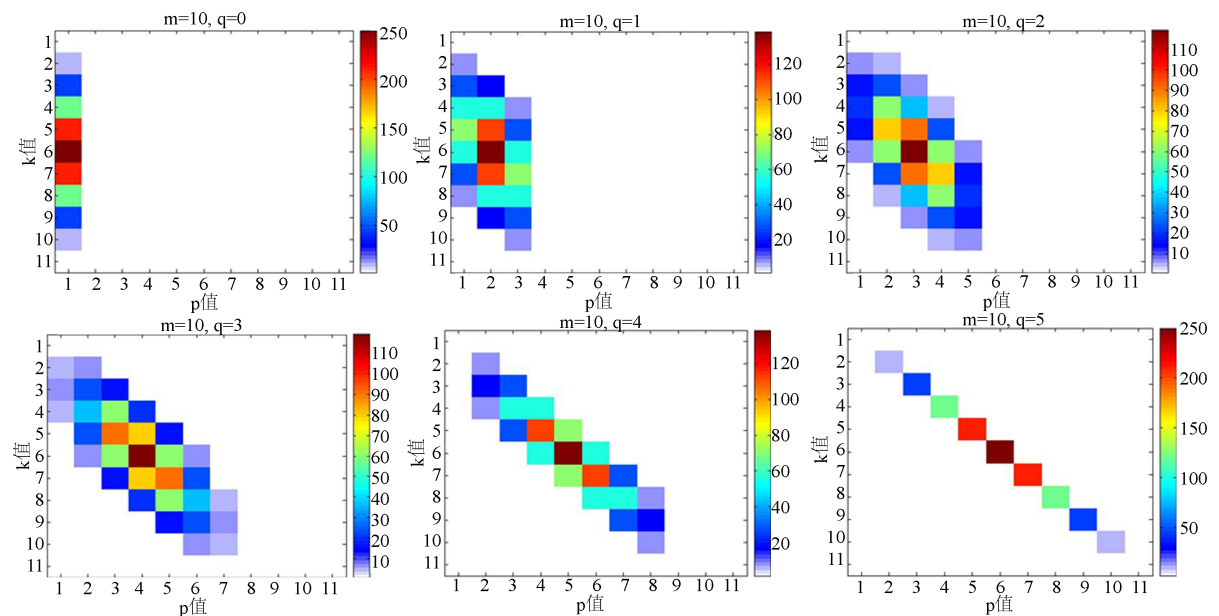


Figure 2. Curve: q value conversion result icon

图 2. $m = 10, q$ 值变换结果图示

4.2.2. $m = 11, q$ 值变换

同上述方法, 直接给出当 q 值变换, $m = 11$ 时的结果图示(见图 3)。从左到右依次为: $q = 0, q = 1, q = 2, q = 3, q = 4, q = 5$ 。

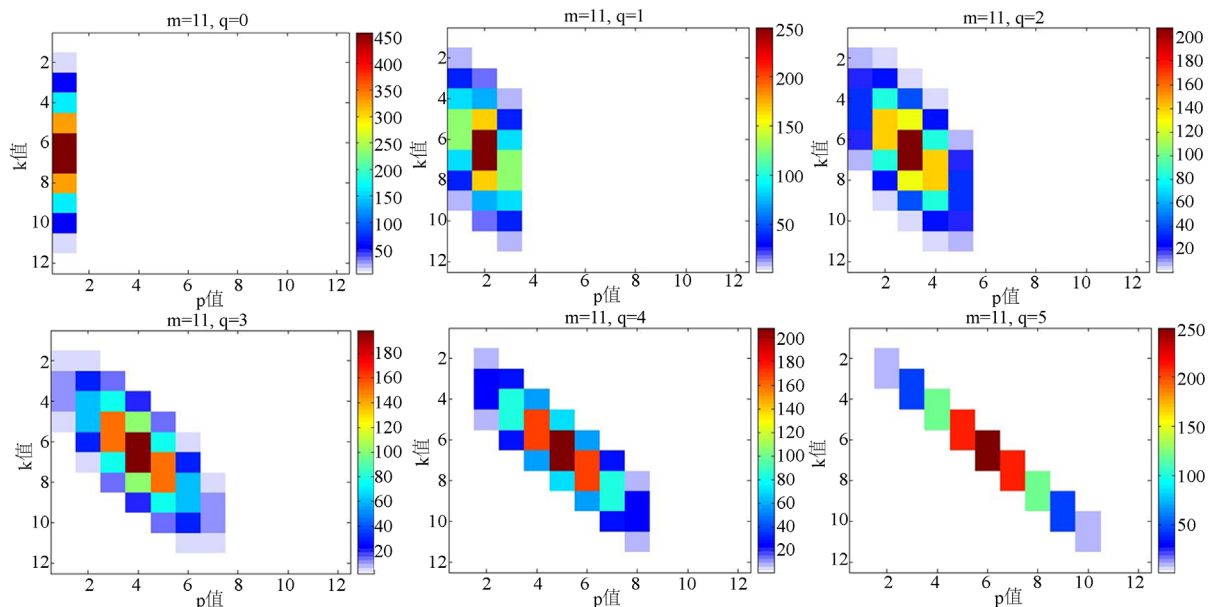


Figure 3. Curve: q value conversion result icon

图 3. $m = 11, q$ 值变换结果图示

5. 结果分析

图 1, 图 2 是取 $m = 10, m = 11$, 根据 q 值的变换所得的结果图示。从图 1, 图 2 形成的 12 个结果图示来看, 每个二维彩色图都是对称的, 且所得到的值, 点的密集度均服从正态分布, 当 $m = 10$ 的时候, 最大值只有一个, $m = 11$ 时, 最大值有两个, 且均位于图形中间位置。从形状来看, 三项式组合计数的结果随着 q 的变换呈现出特殊的形状, 当 q 的取值相同时, $m = 10, m = 11$ 形成的图形形状类似。从整体来看, 三项式组合系数可以变值投影为不同的图示, 且每一个结果二维图都有其固有的特征, 这就体现出了变值的特性。反过来说, 多个图示都是来自于同一个三项式组合系数公式, 这就解释了变值理论体系中的等值不变性。

6. 总结

本文利用变值测量模型对三项式组合系数的多维可视化进行初步探索。其处理流程主要包含 4 个核心模块: 选择公式, 计算, 计数矩阵, 图示。从图示和结果分析可以看出, 新的多元组合计数公式在计数矩阵分布, 投影图形, 形状, 点变换, 值变换上都表现出特有的属性。这种对组合计数公式的创新型处理方法为基础数学、统计分布等领域的研究提供了新思路, 具有极其深远的意义。

参考文献

- [1] 宋桢桢, 及万会. 由裂项法导出二项式系数级数[J]. 西南民族大学学报(自然科学版), 2013, 39(5): 709-717.
- [2] 毛经中. 组合数学基础[M]. 武汉: 华中师范大学出版社, 1990.
- [3] Hall, M. (1986) Combinatorial Theory. 2nd Edition, Wiley Interscience, New York.
- [4] Chen, J.R. (2012) Combinatorial Mathematics. Harbin Institute of Technology Press, Harbin.

-
- [5] Gould, H.W. (1972) *Combinatorial Identities*. Morgantown Printing and Binding Company, Morgantown.
- [6] Stanton, D. and White, D. (1986) *Constructive Combinatorics*. Springer, New York.
<https://doi.org/10.1007/978-1-4612-4968-9>
- [7] 李秦. 基于 Matlab 的数学可视化问题研究及实践[J]. 兰州交通大学学报, 2013, 32(4): 27-30.
- [8] 郑智捷, 郑昊航. 变值测量结构及其可视化统计分布[J]. 光子学报, 2011, 40(9): 1397-1404.
- [9] Zheng, J. (2011) Conditional Probability Statistical Distributions in Variant Measurement Simulations. *Acta Photonica Sinica*, **40**, 1662-1666. <https://doi.org/10.3788/gzxb20114011.1662>
- [10] 郑智捷. 多元逻辑函数的基础等价变值表示[J]. 云南民族大学学报(自然科学版), 2011, 20(5): 396-397.
- [11] Knuth, D.E. (1998) *Art of Computer Programming, the: Volume 1: Fundamental Algorithms*, 3rd Edition. China Machine Press, Beijing.
- [12] Gould, H.W. (1956) Some Generalizations of Vandermonde's Convolution. *American Mathematical Monthly*, **63**, 84-91. <https://doi.org/10.1080/00029890.1956.11988763>
- [13] Zheng, J. (2019) Variant Logic Construction under Permutation and Complementary Operations on Binary Logic. In: Zheng, J., Ed., *Variant Construction from Theoretical Foundation to Applications*, Springer, Singapore, 3-21.
https://doi.org/10.1007/978-981-13-2282-2_1

知网检索的两种方式:

1. 打开知网首页: <http://cnki.net/>, 点击页面中“外文资源总库 CNKI SCHOLAR”, 跳转至: <http://scholar.cnki.net/new>, 搜索框内直接输入文章标题, 即可查询;
或点击“高级检索”, 下拉列表框选择: [ISSN], 输入期刊 ISSN: 2325-2251, 即可查询。
2. 通过知网首页 <http://cnki.net/> 顶部“旧版入口”进入知网旧版: <http://www.cnki.net/old/>, 左侧选择“国际文献总库”进入, 搜索框直接输入文章标题, 即可查询。

投稿请点击: <http://www.hanspub.org/Submission.aspx>

期刊邮箱: sa@hanspub.org