

# A Modified CUI Scheme for Convection-Dominated Equations

Na Lv<sup>1</sup>, Taofeng Xie<sup>2</sup>, Wei Gao<sup>1</sup>

<sup>1</sup>School of Mathematical Sciences, Inner Mongolia University, Hohhot Inner Mongolia

<sup>2</sup>College of Computer and Information, Inner Mongolia Medical University, Hohhot Inner Mongolia

Email: math\_lvna@163.com, nmgxietaofeng@126.com, gaow@imu.edu.cn

Received: Nov. 9<sup>th</sup>, 2016; accepted: Nov. 24<sup>th</sup>, 2016; published: Nov. 29<sup>th</sup>, 2016

Copyright © 2016 by authors and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

---

## Abstract

In this paper, a modified CUI scheme is presented for discretizing the convection term. Coupled with Hermite interpolation, CBC (Convection Boundedness Criterion) and TVD (Total Variational Diminishing Constraint) are applied to suppress numerical oscillations. Typical test cases demonstrate that the present scheme possesses the boundedness of convection and high accuracy.

## Keywords

CUI Scheme, Hermite Interpolation Polynomial, CBC/TVD, mCUI Scheme

---

# 对流占优问题的一种修正CUI格式

吕娜<sup>1</sup>, 谢桃枫<sup>2</sup>, 高巍<sup>1</sup>

<sup>1</sup>内蒙古大学数学科学学院, 内蒙古 呼和浩特

<sup>2</sup>内蒙古医科大学计算机信息学院, 内蒙古 呼和浩特

Email: math\_lvna@163.com, nmgxietaofeng@126.com, gaow@imu.edu.cn

收稿日期: 2016年11月9日; 录用日期: 2016年11月24日; 发布日期: 2016年11月29日

---

## 摘要

对流扩散方程是一类重要的模型方程, 构造对流项的高分辨率离散格式是数值计算的关键, 本文基于CBC

文章引用: 吕娜, 谢桃枫, 高巍. 对流占优问题的一种修正 CUI 格式[J]. 应用数学进展, 2016, 5(4): 716-727.

<http://dx.doi.org/10.12677/aam.2016.54083>

(Convection Boundedness Criterion)准则和TVD (Total Variational Diminishing Constraint)准则, 利用Hermite插值, 构造一种改进的CUI格式。经典的算例表明, 此数值方法不仅能很好的抑制线性对流离散格式的数值振荡, 也表现出良好的数值计算精度。

## 关键词

CUI格式, Hermite插值, CBC/TVD, mCUI格式

## 1. 引言

在流体动力学中对流项的计算有着重要的意义。数值格式离散对流项时关系到数值结果的精度、稳定性和收敛性。因此, 在计算流体动力学中构造易于实现且能避免数值耗散的数值方法, 仍然是一项具有挑战性和吸引力的研究目标。

目前已经有很多经典的格式, 如一阶迎风格式 FOU (First-order Upwind)和 Lax-friedrichs 格式[1]等。但这些格式大多都是低阶的, 会产生较大的数值耗散。于是, 人们又提出了一些格式, 如中心差分格式 CD (Central Difference)、二阶迎风格式 SOU (Second-order Upwind)、Quick (Quadratic Upstream Interpolation for Convective Kinematics) [2]格式和 CUI (Cubic Upwind Interpolation) [3]格式等。这些线性高阶格式的数值耗散较低, 但是不满足对流有界性, 数值解在间断解处会出现非物理震荡。

为了解决上述的问题, 人们提出了高分辨率格式(High Resolution Scheme) [4] [5], 它是高阶格式和某些有界性准则的结合。高分辨率格式最早是利用 Harten 提出的 TVD (Total Variational Diminishing Constraint) [4]性质构造一个限制器函数, 然后将它和高阶格式结合构造出高分辨率格式。另外的一些重要的有界性准则包括 Leonard 提出的 NVF (Normalized Variable Formulation) [6]与 Gaskell 和 Lau [1]提出来的 CBC (Convection Boundedness Criterion)准则等。在此基础上, 构造出了一些对流有界格式, 如 SMART [7], CLAM [8], HOAB [9], CUBISTA [10]等。

本文以 CUI 格式为基础, 构造了一个满足对流有界性的一个无振荡格式 mCUI。本文的具体安排如下: 第二节建立对流项的高分辨率格式, 第三节给出经典的算例及讨论计算结果, 第四节给出结论。

## 2. 建立数值格式

### 2.1. 高阶格式

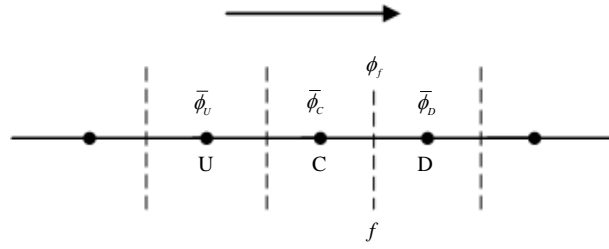
以图 1 所示, 数值格式在离散对流项的时候, 一般会用到该界面值相邻三个点  
由此常见线性格式可统一表示为  $k$  格式

$$\phi_f = \phi_c + \left[ \frac{1+k}{4}(\phi_D - \phi_c) + \frac{1-k}{4}(\phi_c - \phi_U) \right] \quad (1)$$

其中, 参数  $k \in [-1, 1]$ , 对  $k$  赋不同的值可以得到不同的高阶格式。根据 Leonard [11]的正则化思想, 正则化变量定义为  $\hat{\phi} = \frac{\phi - \phi_U}{\phi_D - \phi_U}$ , 则  $k$  格式(1)可以化为

$$\hat{\phi}_f = \left( 1 - \frac{1}{2}k \right) \hat{\phi}_c + \frac{1}{4}(1+k) \quad (2)$$

由式(2)得知,  $\hat{\phi}_f$  的变化只依赖于  $k$  和  $\hat{\phi}_c$ 。表 1 给出了几种常见的对流格式的 NV 线。值得注意的是, 这些线性高阶格式都不满足有界性, 因此, 采用有界性准则结合线性高阶格式来构造高分辨率格式。



**Figure 1.** Three neighboring mesh points and the mesh face  
**图 1.** 三个相邻的节点及单元边界

**Table 1.** The linear convection schemes and the NV formulations  
**表 1.** 线性对流格式及其 NV 格式

Schemes	k	Non-normalized	Normalized
SOU	-1	$\phi_f = \frac{3}{2}\phi_c - \frac{1}{2}\phi_u$	$\hat{\phi} = \frac{3}{2}\hat{\phi}_c$
CD	1	$\phi_f = \frac{1}{2}\phi_c + \frac{1}{2}\phi_D$	$\hat{\phi}_f = \frac{1}{2}\hat{\phi}_c + \frac{1}{2}$
Fromm	0	$\phi_f = \phi_c + \frac{1}{4}(\phi_D - \phi_u)$	$\hat{\phi}_f = \hat{\phi}_c + \frac{1}{4}$
QUICK	$\frac{1}{2}$	$\phi_f = \frac{3}{4}\phi_c + \frac{3}{8}\phi_D - \frac{1}{8}\phi_u$	$\hat{\phi}_f = \frac{3}{4}\hat{\phi}_c + \frac{3}{8}$
CUI	$\frac{1}{3}$	$\phi_f = \frac{5}{6}\phi_c + \frac{1}{3}\phi_D - \frac{1}{6}\phi_u$	$\hat{\phi}_f = \frac{5}{6}\hat{\phi}_c + \frac{1}{3}$

在 Leonard 提出的 NVD 的基础上,利用正则化思想, CBC 准则可以表达为

$$\begin{cases} \hat{\phi}_c < \hat{\phi}_f = f(\hat{\phi}_c) < 1, & 0 < \hat{\phi}_c < 1 \\ \hat{\phi}_f = \hat{\phi}_c, & \hat{\phi}_c \leq 0 \\ \hat{\phi}_f = \hat{\phi}_c, & \hat{\phi}_c \geq 1 \end{cases}$$

之后, Wei [9]和 Hou [12]证明了 CBC 准则只能保证数值格式的有界性,不能保证数值格式的精度。为了克服这个缺点, Wei 和 Hou 提出了一个改进的 CBC 准则即 BAIR 准则

$$\begin{cases} \frac{3}{2}\hat{\phi}_c \leq f(\hat{\phi}_c) \leq \frac{1}{2}(\hat{\phi}_c + 1), & 0 < \hat{\phi}_c < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}(\hat{\phi}_c + 1) \leq f(\hat{\phi}_c) \leq \frac{3}{2}\hat{\phi}_c, f(\hat{\phi}_c) \leq 1, & \frac{1}{2} \leq \hat{\phi}_c < 1 \\ \hat{\phi}_f = \hat{\phi}_c, & \hat{\phi}_c \geq 1 \\ \hat{\phi}_f = \hat{\phi}_c, & \hat{\phi}_c \leq 1 \end{cases}$$

另外, TVD 性质的正则化形式为

$$\begin{cases} \hat{\phi}_f \leq 1, \hat{\phi}_f \in [\hat{\phi}_c, 2\hat{\phi}_c], & 0 < \hat{\phi}_c < 1 \\ \hat{\phi}_f = \hat{\phi}_c, & \hat{\phi}_c \leq 0 \\ \hat{\phi}_f = \hat{\phi}_c, & \hat{\phi}_c \geq 1 \end{cases}$$

将 BAIR 区域与 TVD 区域绘制于图 2 中, 阴影区域表示 BAIR 区域与 TVD 区域重合区域。正则化于是, 只要格式的 NV 线落在阴影区域内, 则格式同时满足 BAIR 条件和 TVD 条件, 它将具备对流有界性[9] [12]。

## 2.2. 对流项的离散

由上可知, 若格式满足对流有界性, 那么格式的 NV 线必须落在 TVD 区域和 BAIR 区域的重合区域内。由前面提到的 HR 格式的标准化形式:  $\hat{\phi}_f = f(\hat{\phi}_C)$ 。由图 2 可知  $f(0)=0$ ,  $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}$ ,  $f(1)=1$ 。由于所选取的 CUI 格式不满足对流有界性, 因此利用分段的思想来构造 mCUI 格式, 使得此格式满足有足对流有界性准则。在  $\frac{1}{3} \leq \hat{\phi}_C \leq \frac{2}{3}$  的区间内, 选取原有的 CUI 格式, 在  $0 < \hat{\phi}_C < \frac{1}{3}$  内, 选取  $f(0)=0$ ,  $f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{11}{18}$  和  $f'(0)=2$ , 利用 Hermite 插值构造曲线, 使其满足对流有界性; 同理在  $\frac{2}{3} < \hat{\phi}_C < 1$  内, 选取  $f(1)=1$ ,  $f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{8}{9}$  和  $f'\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{5}{6}$  构造曲线, 使曲线在重合的区域内。得到图 3 所示的满足对流有界性的格式 mCUI 格式。该格式的正则化形式为

$$\hat{\phi}_f = \begin{cases} 2\hat{\phi}_C - \frac{1}{2}\hat{\phi}_C^2, & 0 < \hat{\phi}_C \leq \frac{1}{3} \\ \frac{5}{6}\hat{\phi}_C + \frac{1}{3}, & \frac{1}{3} < \hat{\phi}_C \leq \frac{2}{3} \\ -1 + \frac{11}{2}\hat{\phi}_C - 5\hat{\phi}_C^2 + \frac{3}{2}\hat{\phi}_C^3, & \frac{2}{3} < \hat{\phi}_C < 1 \\ \hat{\phi}_C, & \text{elsewhere} \end{cases}$$

## 2.3. 时间离散

完成了关于空间项的离散后, 得到了关于时间  $t$  的一个常微分方程, 即  $\frac{d\bar{\phi}}{dt} = L(\bar{\phi})$ 。为了避免非物理震荡, 采用的是三阶 TVDRunge-Kutta [13] 格式来离散时间, 它的形式为

$$\begin{cases} \phi^{(1)} = \phi^n + L(\phi^{(1)}) \\ \phi^{(2)} = \frac{3}{4}\phi^n + \frac{1}{4}[\phi^{(1)} + L(\phi^{(1)})] \\ \phi^{n+1} = \frac{1}{3}\phi^n + \frac{2}{3}[\phi^n + L(\phi^n)] \end{cases}$$

## 3. 数值结果及讨论

### 3.1. 一维线性对流方程

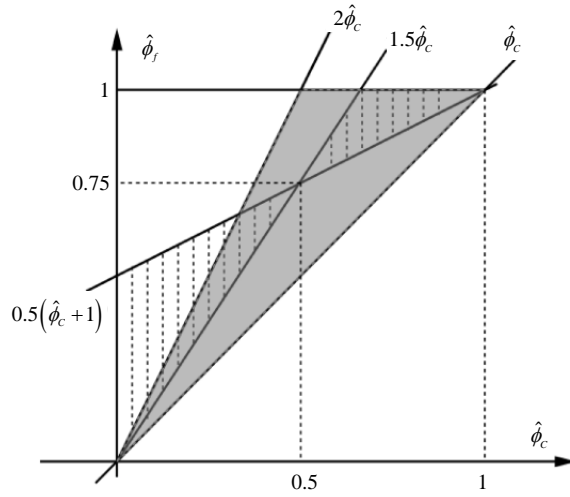
一维线性对流方程

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \alpha \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0, \quad x \in [a, b], \quad t > 0 \quad (3)$$

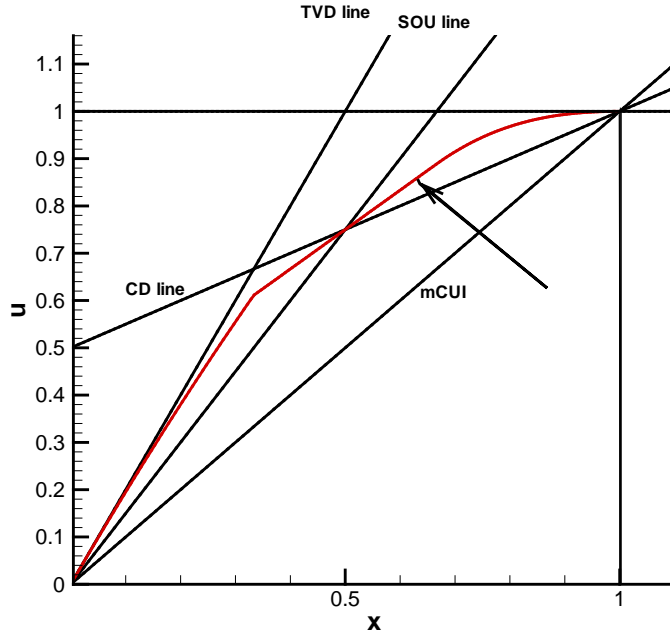
给定初值  $\phi(x, 0) = \phi_0(x)$ ,  $\alpha = 1$ 。

#### 3.1.1. 情形 1

首先给定以下的初值  $\phi(x, 0) = \phi_0(x) = \sin(2\pi x)$ , 在区间  $[0, 1]$  上求解方程(3),  $CFL = 0.1$ , 通过计算



**Figure 2.** The regions of the TVD (shaded) and BAIR (hatched)  
**图 2.** BAIR 区域(虚线部分)和 TVD 区域(阴影部分)



**Figure 3.** The illustration of the NV line of the mCUI scheme in the BAIR region  
**图 3.** mCUI 格式在 BAIR 区域中的 NV 线

mCUI 格式、SMART [7]格式、MUSCL [14]格式在等距剖分  $\Delta x$  下的数值解， $\Delta x$  分别取 20、40、80、160、320。计算格式的  $L_1$  误差、 $L_2$  误差，同时算出数值精度阶(如表 2)，计算公式如下

$$\|E\|_{L_p} = \left( \Delta x \sum_{i=1}^N |\bar{\phi}_i(\text{exact}) - \bar{\phi}_i(\text{computed})| \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p = 1, 2$$

$$\text{order} = \frac{\ln E_N / E_{2N}}{\ln 2}$$

由表 2 可知，对于光滑解问题，mCUI 格式可以达到理论上高阶精度。

**Table 2.** Errors and orders for several selected schemes**表 2.** 格式误差与数值精度阶对比

Scheme	Mesh	$L_1$ error	$L_1$ order	$L_2$ error	$L_2$ order
mCUI	20	8.31e-3	-	1.89e-2	-
	40	1.97e-3	2.08	3.61e-3	2.34
	80	4.37e-4	2.17	1.03e-3	1.81
	160	9.15e-5	2.26	2.87e-4	1.84
	320	2.42e-5	1.92	7.86e-5	1.87
SMART	20	1.47e-2	-	2.44e-2	-
	40	3.35e-3	2.15	6.17e-3	1.99
	80	8.37e-4	2.01	1.67e-3	1.90
	160	2.16e-4	1.96	4.75e-4	1.82
	320	5.26e-5	2.05	1.35e-4	1.82
MUSCL	20	2.45e-2	-	3.02e-2	-
	40	7.81e-3	1.65	9.53e-3	1.66
	80	2.13e-3	1.88	2.87e-3	1.73
	160	5.39e-4	1.98	8.71e-4	1.72
	320	1.35e-4	2.01	2.65e-4	1.72

### 3.1.2. 情形 2

对于上述的方程，再选取以下的间断初值

$$\phi(x, 0) = \begin{cases} 1, & x \leq 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases},$$

计算区间为 $[-1, 1]$ ，等分为 800 等份，计算时间  $T$  为 0.1，图 4 表明，mCUI 格式对间断解的计算有很好的逼近效果。

### 3.1.3. 情形 3

对于上述的方程，选取初值为如下的非光滑初值

$$\phi(x, 0) = \begin{cases} -x \sin\left(\frac{3\pi x^2}{2}\right), & -1 \leq x \leq -\frac{1}{3} \\ |\sin(2\pi x)|, & |x| < \frac{1}{3} \\ 2x - 1 - \frac{1}{6} \sin(3\pi x), & \frac{1}{3} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

计算区间选为 $[-2, 2]$ ， $\Delta x = 800$ ，计算时间为 $T = 0.1$ ， $CFL$ 分别取为 0.1 和 0.5 得到图 5(a)和图 5(b)，且把 mCUI 格式的结果和经典格式 MUSCL 的结果在同样条件下进行对比。通过对比，我们发现 mCUI 格式与经典 CBC 格式具有相同的逼近效果。

## 3.2. 一维非线性 Burgers 方程

一维的非线性 Burgers 方程的表达形式为

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\phi^2}{2} \right) = \nu \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \quad 0 < \phi < 1, \quad 0 < t < T \quad (4)$$

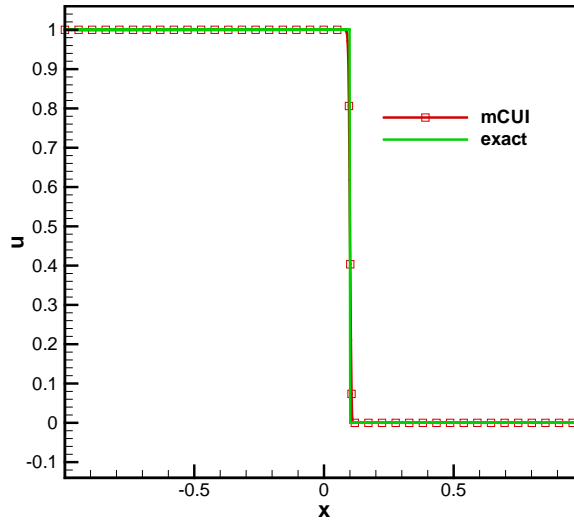


Figure 4. Comparison of numerical and exact results for the discontinuous initial condition

图 4. mCUI 格式的数值解和精确解

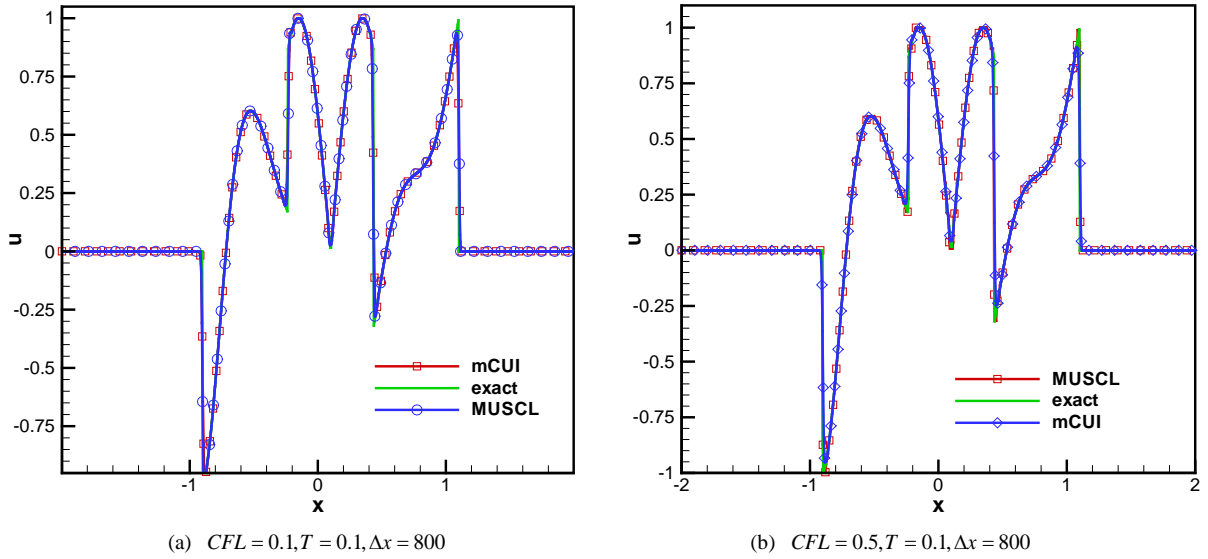


Figure 5. Comparison of MUSCL and mCUI scheme for the linear equation with nonsmooth initial distribution

图 5. 非光滑初值下, MUSCL 与 mCUI 的对比

其中  $\nu$  为粘性系数。当  $\nu \gg 0$  时, 方程有光滑解, 当  $\nu \rightarrow 0$  时, 方程的解会随着时间出现间断。

### 3.2.1. 情形 1

选取区间  $[-1,1]$ , 给定初值

$$\phi(x, 0) = \phi_0(x) = \sin(2\pi x)$$

和边界条件

$$\phi(0, t) = \phi(1, t) = 0$$

在给定的粘性系数下, 上述的初始条件会随着时间的变化形成间断。

给定  $\Delta x = 400$ ，图 6 给出在不同的粘性系数下，随着时间的增加，最初的正弦波的变化，我们选取  $\nu = 0.1, 0.01, 0.001$  和  $0.0001$ ，时间  $t = 0.0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$  和  $0.5$ 。

### 3.2.2. 情形 2

令  $\nu = 0$ ，即对于无粘 Burgers 方程，选取以下的初值

$$\phi(x, 0) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ \frac{1}{2}, & -1 \leq x < 0 \\ 0, & x \geq 0 \end{cases}$$

这个问题的精确解是

$$\phi(x, t) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ \frac{x+1}{t}, & -1 \leq x < \frac{t}{2} - 1 \\ \frac{1}{2}, & \frac{t}{2} - 1 \leq x < \frac{t}{4} \\ 0, & x \geq \frac{t}{4} \end{cases}$$

这个例子中要求  $t \leq 4$ ，在区间  $[-2, 2]$  上，选取  $\Delta x = 400$ ， $t$  选取 1.0 和 2.0，数值结果在图 7 中给出。图 7 表明，该问题的数值解能够很好的近似精确解，mCUI 格式能够很好的处理这一类问题。

### 3.3. 二维线性对流方程

本节我们利用 mCUI 格式对二维对流方程进行求解，选取 Doswell [15] 模型，

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial(a\phi)}{\partial x} + \frac{\partial(b\phi)}{\partial y} = 0$$

此数学模型在速度场中有稳定的切向速度

$$v_t(r) = \frac{1}{v_{\max}} \frac{\tanh(r)}{\cosh^2(r)}$$

在计算的过程中，我们令  $v_{\max} = 0.358$ ，并在该场中有

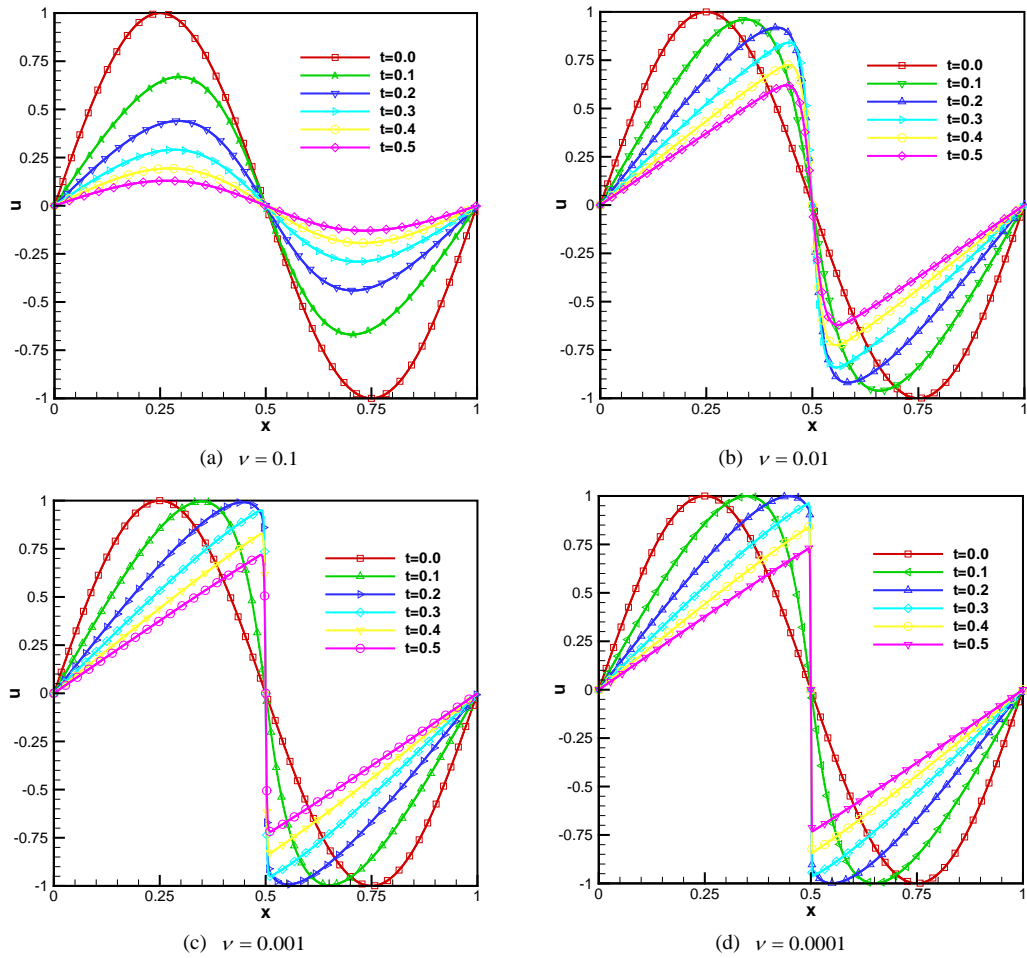
$$a(x, y) = -\frac{y - y_0}{r} v_t(r), \quad b(x, y) = \frac{x - x_0}{r} v_t(r)$$

其中  $(x_0, y_0)$  为旋转中心， $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$  表示区域内任意一点到中心的距离，角速度定义为  $\omega = \frac{v_t(r)}{r}$ 。选取计算区域为  $[0, 8] \times [0, 8]$ ，等距剖分为  $200 \times 200$  的网格，且此模型的精确解为

$$\phi(x, y, t) = \tanh \left[ \frac{y - x_0}{\delta} \cos(\omega t) - \frac{x - y_0}{\delta} \sin(\omega t) \right]$$

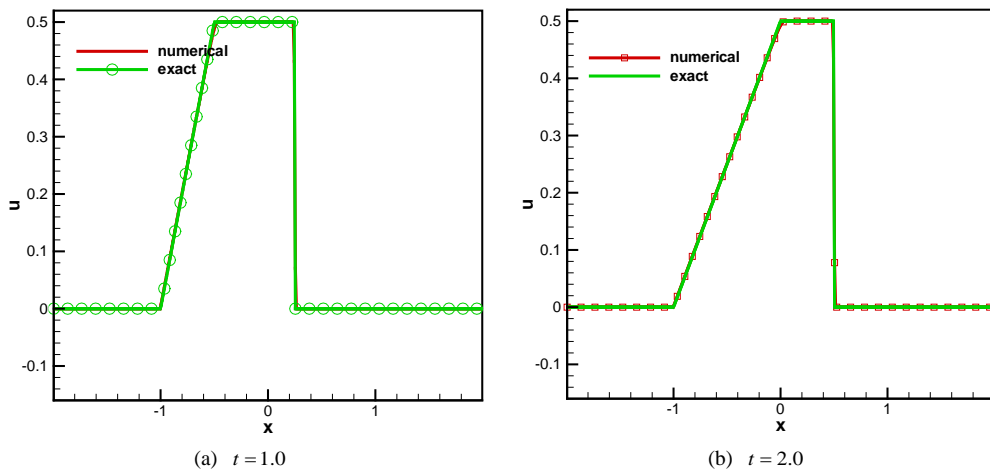
参数  $\delta$  表示的是锋面的梯度，取  $\delta = 10^{-6}$ ，得到的数值结果如图 8。(a) 是数值解关于在竖直中心线的函数图像，图像表明 mCUI 格式能够很好的逼近精确解。(b) 显示了数值解的 2D 图，反应了锋面生成的漩涡形状，(c) 显示了数值解的 3D 图像。





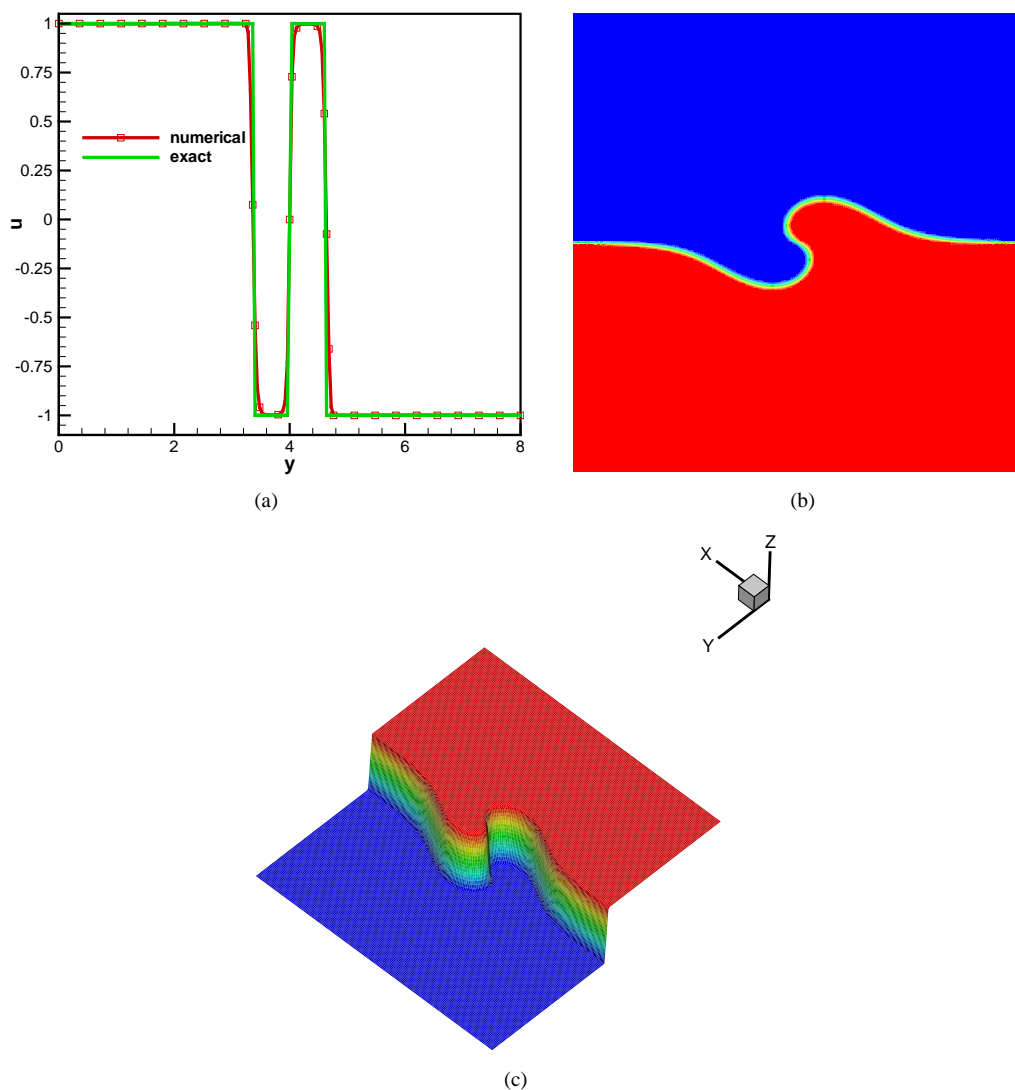
**Figure 6.** Numerical results for Burgers equation with different viscosity coefficients, at six selected time instants, (a)  $\nu = 0.1$ , (b)  $\nu = 0.01$ , (c)  $\nu = 0.001$ , (d)  $\nu = 0.0001$

**图 6.** Burgers 方程在不同的扩散系数下的六个不同时间的数值结果, (a)  $\nu = 0.1$ , (b)  $\nu = 0.01$ , (c)  $\nu = 0.001$ , (d)  $\nu = 0.0001$



**Figure 7.** Comparison between the exact and numerical solutions for the inviscid Burgers equation at selected time instants, (a)  $t = 1.0$ , (b)  $t = 2.0$

**图 7.** Burgers 方程数值解与精确解的对比, 选取时间为(a)  $t = 1.0$ , (b)  $t = 2.0$



**Figure 8.** Exact and numerical solutions of Doswell and 2D, 3D image  
**图 8.** Doswell 的数值解和精确解及 2D、3D 图像

### 3.4. 二维无粘性 Burgers 方程

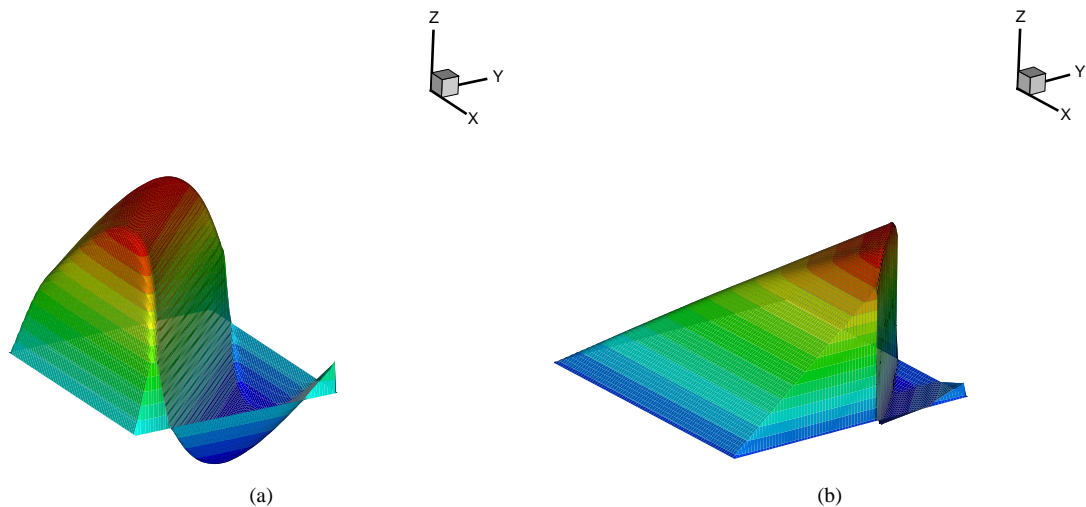
mCUI 格式可以解决二维无粘性的 Burgers 方程

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^2} \left( \frac{\phi^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial y^2} \left( \frac{\phi^2}{2} \right) = 0$$

初始条件为

$$\phi(x, y, 0) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \sin[\pi(x + y)]$$

选取  $CFL = 0.5$ ,  $h = \frac{1}{80}$ , 图 9 给出了在时间  $t = 0.1$  和  $t = 0.6$  时刻下的数值解。图表显示, 在  $t = 0.1$  时结果依然是光滑的, 在  $t = 0.6$  时出现了间断, 此时在间断附近使用 mCUI 格式仍然可以得到很好的逼近效果。



**Figure 9.** The two-dimensional inviscid Burgers equation; computed solutions at two selected time instants. (a)  $t = 0.1$  and (b)  $t = 0.6$

**图 9.** 二维 Burgers 方程在不同的时刻下的数值解, (a)  $t = 0.1$ , (b)  $t = 0.6$

#### 4. 结论

本文基于 BAIR 准则和 TVD 准则, 结合 Hermite 插值, 构造出高分辨率格式 mCUI 格式。此格式简单方便, 易于计算机实现。经典算例表明, 此格式可保证对流稳定性和计算精度。

#### 致 谢

作者感谢审稿专家给予本文宝贵的修改意见和建议以及期刊编辑对本文的付出。

#### 基金项目

本文由内蒙古自治区人才开发基金项目(12000-1300020240)和内蒙古自然科学基金项目(2015MS0101)支持。

#### 参考文献 (References)

- [1] Spalding, D.B. (1972) A Novel Finite Difference Formulation for Differential Expressions Involving Both First and Second Derivatives. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **4**, 551-559. <https://doi.org/10.1002/nme.1620040409>
- [2] Leonard, B.P. (1979) A Stable and Accurate Modeling Procedure Based on Quadratic Interpolation. *Computer Method in Applied Mechanics and Engineering*, **19**, 59-98. [https://doi.org/10.1016/0045-7825\(79\)90034-3](https://doi.org/10.1016/0045-7825(79)90034-3)
- [3] Agarwal, R.K. (1981) A Third-Order-Accurate Upwind Scheme for Navier-Stokes Solutions at high Reynolds Numbers. *19th Aerospace Sciences Meeting*, American Institute of Aeronautics and Astronautics, St. Louis, 12-15 January 1981. <https://doi.org/10.2514/6.1981-112>
- [4] Harten, A.(1983) High Resolution Scheme for Hyperbolic Conservation Law. *Journal of computational Physics*, **49**, 357-393. [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(83\)90136-5](https://doi.org/10.1016/0021-9991(83)90136-5)
- [5] Sweby, P.K. (1984) High Resolution Scheme Using Flux Limiters for Hyperbolic Conservation Laws. *SLAM Journal on Numerical Analysis*, **21**, 995-1011. <https://doi.org/10.1137/0721062>
- [6] Lenard, B.P. (1988) Simple High-Accuracy Resolution Program for Convective Modeling of Discontinuities. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, **8**, 1291-1318. <https://doi.org/10.1002/flid.1650081013>
- [7] Gaskell, P.H. and Lau, A.K.C. (1988) Curvature-Compensated Convective Transport: SMART, A New Boundedness-preserving trans-port algorithm. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, **8**, 617-641. <https://doi.org/10.1002/flid.1650080602>

- 
- [8] Zhu, J. (1991) A Low-Diffusive and Oscillation-Free Convective Scheme. *International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering*, **7**, 225-232.
- [9] Wei, J.J., Yu, B., Tao, W.Q., Kawaguchi, Y. and Wang, H.S. (2003) A New High-Order-Accurate and Bounded Scheme for Incompressible Flow. *Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals*, **43**, 19-41. <https://doi.org/10.1080/713836153>
- [10] Alves, M.A., Oliveira, P.J. and Pinho, F.T. (2003) A Convergent and Universally Bounded Interpolation Scheme for the Treatment of Advection. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, **41**, 47-75.
- [11] Lax, P.D. and Wendroff, B. (1960) Systems of Conservation Laws. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **13**, 217-237. <https://doi.org/10.1002/cpa.3160130205>
- [12] Hou, P.L., Tao, W.Q. and Yu, M.Z. (2003) Refinement of the Convective Boundedness Criterion of Gaskell and Lau. *Engineering Computations*, **20**, 1023-1043. <https://doi.org/10.1108/02644400310503008>
- [13] Gottlieb, S. and Shu, C.-W. (1998) Total Variational Diminishing Runge-Kutta Schemes. *Mathematics of Computation*, **67**, 73-85. <https://doi.org/10.1090/S0025-5718-98-00913-2>
- [14] Van Leer, B. (1974) Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme: II. Monotonicity and Conservation Combined in a Second-Order Scheme. *Journal of Computational Physics*, **14**, 361-370. [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(74\)90019-9](https://doi.org/10.1016/0021-9991(74)90019-9)
- [15] Doswell, C.A. (1998) A Kinematic Analysis of Frontogenesis Associated with a Nondivergent Vortex. *Journal of the Atmospheric Sciences*, **41**, 1242-1248.

**期刊投稿者将享受如下服务:**

1. 投稿前咨询服务 (QQ、微信、邮箱皆可)
2. 为您匹配最合适的期刊
3. 24 小时以内解答您的所有疑问
4. 友好的在线投稿界面
5. 专业的同行评审
6. 知网检索
7. 全网络覆盖式推广您的研究

投稿请点击: <http://www.hanspub.org/Submission.aspx>期刊邮箱: [aam@hanspub.org](mailto:aam@hanspub.org)