Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2017, 6(2), 165-173**
Published Online March 2017 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2017.62019

Dynamic Analysis of a Time Delayed Nutrient-Phytoplankton System

Rongzhong Shang

Wenzhou University, Wenzhou Zhejiang
Email: shangrongzhong@163.com

Received: Mar. 7th, 2017; accepted: Mar. 25th, 2017; published: Mar. 28th, 2017

Abstract

The paper mainly considered the time lag problem caused by the susceptible phytoplankton absorbing nutrient and translating into energy and susceptible phytoplankton turning into infected phytoplankton, and then, a time delayed nutrient-phytoplankton system will be established. On this basis, the stability of the equilibrium point and the Hopf bifurcation of the system have been analyzed by using the Routh-Hurwitz criterion and the Lyapunov-Krasovskii function, and then the critical conditions of these particular dynamical behaviors have been obtained. Finally, these results have some guiding significance for the prevention and control of large area outbreaks of phytoplankton.

Keywords

Time Delays, Equilibrium, Stability, Hopf Bifurcation

一类具有时滞效应的营养盐－浮游植物系统的动力学研究

尚荣忠

温州大学，浙江 温州
Email: shangrongzhong@163.com

收稿日期：2017年3月7日；录用日期：2017年3月25日；发布日期：2017年3月28日

摘 要

本文主要在动态建模过程中考虑易感染浮游植物吸收营养盐转化为自身能量所造成的时间滞后和易感浮

文章引用：尚荣忠．一类具有时滞效应的营养盐－浮游植物系统的动力学研究[J]．应用数学进展, 2017, 6(2): 165-173.
https://doi.org/10.12677/aam.2017.62019

游植物变为感染浮游植物所造成的时间滞后，进而建立了一类具有时滞效应的营养盐－浮游植物动态系统。在此基础上，主要采用Routh-Hurwitz判据和Lyapunov-Krasovskii函数对该系统内平衡点的稳定性和Hopf分支进行了理论分析，获得了系统具有这些特定动力学行为的临界条件，这些研究结果对预防和控制浮游植物大面积爆发具有一定的指导意义。

关键词

时滞，平衡点，稳定性，Hopf分支

1. 引言

浮游生物在调节海洋和气候的变化中扮演着重要的角色，因为它们是食物链中最基础的生物部分，是全球碳循环不可缺少的一部分[1]。然而，随着人类社会经济的发展，化学物质已经被应用到日常生活的工业生产中，随着这些化学物质进入河流进入大海，从而造成浮游植物持续增长并导致水体富营养化，最终形成蓝藻水华和海洋赤潮，使得生态系统失稳，进而对人类造成极大损害[2] [3]。

为预防与控制有害藻类水华现象，并维持浮游动植物种群的长久共存，保护水生生态环境，使开发生态环境与人类生存相和谐[4]，有很多科学家都对浮游生物的生长繁殖进行了研究。数学生态学家对这一现象进行了研究，并建立了多种不同的数学模型来表述它们之间的关系。Chatterjee Anal. [5]建立 *N-P-Z* 模型并且将 Holling II 模型作为功能反应项，文章中讨论了系统的边界性和 Hopf 分支，且采用数值模拟对结果进行了拟合。Mukhopadhyay B. [6]研究的也是 *N-P-Z* 模型，他们将一种 IV 功能反应函数应用于系统当中，对 ODE 系统的平衡点稳定性及分支行为进行了研究，之后将模型空间扩展分析扩散对稳定性的影响。Chafferjee Anal and Yu Hengguo [7] [8]分析这一系统由于妊辰引起的时间滞对系统稳定性和 Hopf 分支的影响。除了对 *N-P-Z* 模型研究，*N-P* 模型和 *P-Z* 模型也吸引了很多的科学家。Chakraborty Sabhendu [9]研究了关于营养盐和有毒浮游植物的空间动力学系统，考虑了系统的线性稳定性和图灵失稳的状态。Wang Yapei [10]基于数值分析，发现浮游植物密度随着营养盐密度的增长而增长，并且由于扩散和浮游植物的下沉会影响系统的稳定。*N-P* 系统中考虑了时滞的影响[11] [12]，对平衡点的存在性和稳定性、Hopf 分支和方向以及分支周期解都进行了分析。Dai Chuanjun [1]对影响 *N-P* 系统的反应扩散和时滞进行了系统的分析研究。总而言之，许多数学生态学家对 *P-Z* 模型做了大量的研究工作[13] [14] [15] [16]，他们考虑不同的影响因素包括扩散、脉冲、时滞等和不同的功能反应函数结合进行研究以达到更接近实际环境的目的。

在水生生态系统中，浮游植物种群不仅相互竞争，而且产生的毒素会抑制对方生长[17]。本文主要研究了带有时滞因子的 *N-P* 系统，考虑了营养盐、易受感染的浮游植物和已经被感染的浮游植物三者之间的关系并建立数学模型。事实上，已经有很多科学家对这类系统进行了研究，Chattopadhyay J. [18]研究了共存和不共存的一般性条件，例如考虑营养吸收函数和 Holling II 功能反应函数。他们考虑脉冲对系统的影响[19]，得到了系统灭绝的周期解、全局渐近稳定性和持续性存在的条件，揭示了脉冲扩散在系统中扮演的重要角色。Li Jianjun [20]研究了关于 *N-P* 的反应扩散系统，得到了系统不恒稳定和存在分支的临界条件。

在这些模型的基础上，考虑由于消化和感染引起的时间滞后现象，进而建立具有时滞效应的营养盐、易感染浮游植物和被感染浮游植物动力学模型如下：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}=\alpha-eN-\dfrac{a_1NP_1}{k+N}+b_1P_1+b_2P_2,\\ \dfrac{\mathrm{d}P_1}{\mathrm{d}t}=\dfrac{a_2N(t-\tau_1)P_1}{k+N(t-\tau_1)}-\dfrac{\alpha_1P_1P_2}{P_1+P_2}-m_1P_1,\\ \dfrac{\mathrm{d}P_2}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\alpha_2P_1(t-\tau_2)P_2}{P_1(t-\tau_2)+P_2}-m_2P_2.\end{cases} \tag{1.1}$$

这个模型的建立具有以下假设前提：N、P_1、P_2分别代表在时间t时刻营养盐浓度、易感染和被感染的浮游植物的浓度。此外，所有参数取值均为正数，其中α表示外部流入系统的营养盐总量，e代表营养盐从水面到水的深层造成的流失率，a_1和a_2是浮游植物吸收营养盐后的转化率，k是半饱和常数，b_1和b_2是浮游植物死亡后转化为营养盐的转化率，α_1和α_2分别表示浮游植物被感染率和易感染者的转化率，m_1和m_2表示易感染者和感染者的死亡率，$\tau_1>0$代表易感染者吸收营养盐消化的时间，$\tau_2>0$代表易感染的浮游植物从被感染到变成感染者的时间。

同时，系统(1)的初始函数应该满足下面的条件：

$$\begin{cases}N(t)=\phi_1(\theta),\\ P_1(t)=\phi_2(\theta), \quad \theta\in[-\tau_3,0], \quad \tau_3=\max(\tau_1,\tau_2).\\ P_2(t)=\phi_3(\theta).\end{cases}$$

其中：

$$\phi_1,\phi_2,\phi_3\in C\left([-\tau_3,0],R_+^3\right),$$
$$R_+^3=\left\{(N,P_1,P_2)\,\middle|\,N\ge 0,P_1\ge 0,P_2\ge 0\right\}.$$

2. 稳定性和 Hopf 分支

这部分主要讨论系统(1.1)内平衡点的稳定性。内平衡点$E^*\left(N^*,P_1^*,P_2^*\right)$代表三个种群共存，其中：

$$N^*=\frac{m_1k\alpha_2+\alpha_1k(\alpha_2-m_2)}{a_2\alpha_2-m_1\alpha_2-\alpha_1(\alpha_2-m_2)},$$
$$P_1^*=\frac{m_2P_2}{\alpha_2-m_2}$$
$$P_2^*=\frac{(\alpha-eN)(\alpha_2-m_2)(k+N)}{b_1a_1Nm_2-b_1m_2(k+N)-b_2(\alpha_2-m_2)(k+N)}.$$

E^*存在需满足下面的条件：

$$\begin{aligned}&\alpha_2-m_2>0,\ (a_2-m_1)\alpha_2-\alpha_1(\alpha_2-m_2)>0,\ \alpha-eN>0,\\ &b_1a_1Nm_2-b_1m_2(k+N)-b_2(\alpha_2-m_2)(k+N)>0.\end{aligned} \tag{H1}$$

第一种情况： $\tau_1=\tau_2=0$

定理 2.1：当$\tau_1=\tau_2=0$时，满足条件(H2)时，平衡点E^*是局部渐近稳定的。

$$\begin{aligned}&D_1 = A_1 > 0,\\ &D_2 = \det\begin{pmatrix} A_1 & 1 \\ A_3 & A_2 \end{pmatrix} = A_1A_2 - A_3 > 0\\ &D_3 = \det\begin{pmatrix} A_1 & 1 & 0 \\ A_3 & A_2 & A_1 \\ 0 & 0 & A_3 \end{pmatrix} = A_3\left(A_1A_2 - A_3\right) > 0\end{aligned} \tag{H2}$$

证明：在假设(H1)条件下，对系统(1.1)进行换元变形：

$$u_1(t) = N(t) - N^*,\ u_2(t) = P_1(t) - P_1^*,\ u_3(t) = P_2(t) - P_2^*$$

将内平衡点 E^* 转化到原点，系统(1.1)可以重新写为：

$$\begin{cases} \dot{u}_1(t) = a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + a_{13}u_3 \\ \dot{u}_2(t) = a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + a_{23}u_3 \\ \dot{u}_3(t) = a_{32}u_2 + a_{33}u_3 \end{cases} \tag{2.1}$$

其中：

$$a_{11} = -e - \frac{a_1P_1^*k}{\left(k+N^*\right)^2},\ a_{12} = -\frac{a_1N^*}{k+N^*} + b_1,\ a_{13} = b_2,$$

$$a_{21} = \frac{a_2P_1^*k}{\left(k+N^*\right)^2},\ a_{22} = \frac{a_2N^*}{k+N^*} - \frac{\alpha_1P_2^{*2}}{\left(P_1^*+P_2^*\right)^2} - m_1,\ a_{23} = -\frac{\alpha_1P_1^{*2}}{\left(P_1^*+P_2^*\right)^2}.$$

$$a_{32} = \frac{\alpha_2P_2^{*2}}{\left(P_1^*+P_2^*\right)^2},\ a_{33} = \frac{\alpha_2P_1^{*2}}{\left(P_1^*+P_2^*\right)^2} - m_2.$$

系统(2.1)对应的特征方程为：

$$\lambda^3 + A_1\lambda^2 + A_2\lambda + A_3 = 0 \tag{2.2}$$

其中：

$$A_1 = -\left(a_{11} + a_{22} + a_{33}\right),$$

$$A_2 = a_{11}a_{33} + a_{22}a_{33} + a_{22}a_{11} - a_{21}a_{12} - a_{23}a_{32},$$

$$A_3 = a_{12}a_{21}a_{33} + a_{23}a_{11}a_{32} - a_{13}a_{21}a_{32} - a_{33}a_{11}a_{22}.$$

根据 Routh-Hurwitz 准则，满足条件(H2)时， E^* 是局部渐近稳定的。

证明完毕。

第二种情况： $\tau_2 = 0,\ \tau_1 > 0$

引理 2.1：当 $\tau_2 = 0,\ \tau_1 > 0$ **，满足条件(H3)，系统内平衡点是局部渐近稳定的。**

$$\begin{vmatrix} 2a_{11} & a_{12}+a_{21} & a_{13} & 0 \\ a_{12}+a_{21} & 2a_{22}+1 & a_{23} & 0 \\ a_{13} & a_{23} & 2a_{33} & a_{32} \\ 0 & 0 & a_{32} & -1 \end{vmatrix} < 0 \tag{H3}$$

证明：当 $\tau_2 = 0,\ \tau_1 > 0$ 时，系统(1.1)可以写成：

$$\begin{cases} \dot{u}_1(t) = a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + a_{13}u_3 \\ \dot{u}_2(t) = a_{21}u_1(t-\tau_1) + a_{22}u_2 + a_{23}u_3 \\ \dot{u}_3(t) = a_{32}u_2 + a_{33}u_3 \end{cases} \tag{2.3}$$

我们选择 Lyapunov-Krasovskii 函数做变换得到如下：

$$V(t) = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + \int_{t-\tau}^{t} u_2^2(s)\,\mathrm{d}s$$

对 $V(t)$ 进行求导并且等于系统(2.3)的迹，得到：

$$\frac{\mathrm{d}V(t)}{\mathrm{d}t} = 2u_1(t)\frac{\mathrm{d}u_1(t)}{\mathrm{d}t} + 2u_2(t)\frac{\mathrm{d}u_2(t)}{\mathrm{d}t} + 2u_3(t)\frac{\mathrm{d}u_3(t)}{\mathrm{d}t} + u_1^2(t) - u_1^2(t-\tau_1)$$

因此，得到：

$$\frac{\mathrm{d}V(t)}{\mathrm{d}t} \le \xi(t)R\xi(t)^{\mathrm{T}},$$

其中：

$$\xi(t) = \left(u_1(t), u_2(t), u_3(t), u_1(t-\tau_1)\right)$$

$$R = \begin{vmatrix} 2a_{11}+1 & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{12} & 2a_{22} & a_{23}+a_{32} & a_{21} \\ a_{13} & a_{23}+a_{32} & 2a_{33} & 0 \\ 0 & a_{21} & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

所以我们得到结果：如果 $R<0$，系统(2.3)是局部渐近稳定的，所以系统内平衡点 $E^*\left(N^*, P_1^*, P_2^*\right)$ 是局部渐近稳定的。证毕

系统(2.3)的特征方程可以写成如下：

$$\lambda^3 + B_1\lambda^2 + B_2\lambda + B_3 + q(\lambda)e^{-\lambda\tau_1} = 0 \tag{2.4}$$

其中：

$$q(\lambda) = B_4 + B_5\lambda$$

$$B_1 = -(a_{11} + a_{22} + a_{33}) = A_1$$

$$B_2 = a_{11}a_{33} + a_{22}a_{33} + a_{22}a_{11} - a_{23}a_{32}$$

$$B_3 = a_{11}a_{23}a_{32} - a_{33}a_{11}a_{22}$$

$$B_4 = a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{32}a_{21},$$
$$B_5 = -a_{12}a_{21}$$

假设方程(2.4)的根 $\lambda = i\omega(\omega > 0)$ 是纯虚根，将其带入方程(2.4)并且分离实部和虚部，得到下面的方程组(2.5)：

$$\begin{cases} -B_1\omega^2 + B_3 + B_4\cos(\omega\tau_1) + B_5\omega\sin(\omega\tau_1) = 0 \\ -\omega^3 + B_2\omega - B_4\sin(\omega\tau_1) + B_5\omega\cos(\omega\tau_1) = 0 \end{cases} \tag{2.5}$$

平方并且相加两个方程得到方程(2.6)：

$$\chi^3 + M_1\chi^2 + M_2\chi + M_3 = 0 \tag{2.6}$$

其中：$M_1=B_1^2-2B_2$，$M_2=B_2^2-2B_1B_3-B_5^2$，$M_3=B_3^2-B_4^2$，$\chi=\omega^2$。定义函数 $f(\chi)=\chi^3+M_1\chi^2+M_2\chi+M_3$。很明显如果 $\Delta_1=M_1^2-3M_2\le 0$, 那么 $f'(\chi)=3\chi^2+2M_1\chi+M_2\ge 0$。当 $\Delta_1>0$,方程 $f'(\chi)=0$ 有两个实根：

$$\chi_1^*=\frac{-M_1+\sqrt{\Delta_1}}{3},\quad \chi_2^*=\frac{-M_1-\sqrt{\Delta_1}}{3}$$

注意到 $\lim\limits_{\chi\to+\infty} f(\chi)=+\infty$ 和 $f(0)=B_3^2-B_4^2>0$

$$\cos(\omega\tau_2)=-\frac{B_5\omega^4+(B_2B_5-B_1B_4)\omega^2+B_3B_4}{B_5^2\omega^2+B_4^2},\quad \sin(\omega\tau_2)=-\frac{(B_4-B_1B_5)\omega^3+(B_3B_5-B_2B_4)\omega}{B_5^2\omega^2+B_4^2}$$

通过方程(2.6)讨论 E^* 的稳定性。

引理 2.2

i) 如果(2.6)没有正根，满足条件(H1)、(H2)，$\tau_1\in(0,+\infty)$，E^* 是局部渐近稳定的。

ii) 如果(2.6)存在几个正根 $\{\omega_i\}, i=1,2$，可以从(2.5)得到 $\left\{\tau_{1_i}^j \middle| j=1,2,\cdots\right\}$，令 $\tau_{1_0}=\min\left\{\tau_{1_i}^j \middle| i=1,2,\ j=1,2,\cdots\right\}$。当 $\tau_1=\tau_{1_0}$ 时，特征方程存在一对纯虚根 $\pm i\omega$；

当 $\tau_1<\tau_{1_0}$ 时，特征方程没有纯虚根。

在第二种情况下讨论 Hopf 分支。

分别对方程(2.4)两边关于 τ_1 进行微分求导，令 $\lambda(\tau_1)=\alpha(\tau_1)+i\omega(\tau_1)$ 为方程(2.4)的根，并且 $\alpha(\tau_1^j)=0, \omega(\tau_1^j)=\omega^*$，将 $\lambda(\tau_1)$ 代入(2.4)求导，可得：

$$\left(\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\tau_1}\right)^{-1}=\frac{(3\lambda^2+2B_1\lambda+B_2)e^{\lambda\tau_1}+B_5}{\lambda(B_5\lambda+B_4)}-\frac{\tau_1}{\lambda}$$

所以

$$\left(\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{Re}(\lambda)}{\mathrm{d}\tau_1}\right)^{-1}=\mathrm{Re}\left\{\frac{(3\lambda^2+2B_1\lambda+B_2)e^{\lambda\tau_1}+B_5}{\lambda(B_5\lambda+B_4)}-\frac{\tau_1}{\lambda}\right\}\Bigg|_{\lambda=i\omega^*}=\frac{C_1+C_2}{D}$$

其中

$$C_1=-B_5\omega^2\left(-3\omega^2\cos(\omega\tau_1)-2B_1\omega\sin(\omega\tau_1)+B_2\cos(\omega\tau_1)+B_5\right)$$
$$C_2=B_4\omega\left(-3\omega^2\sin(\omega\tau_1)+2B_1\omega\cos(\omega\tau_1)+B_2\sin(\omega\tau_1)\right)$$
$$D=\omega^2\left(B_5^2\omega^2+B_4^2\right)$$

定理 2.2 当 $\tau_2=0$ 并且满足条件(H1)和(H2)

i) 如果(2.6)没有正根，当 $\tau_1\in[0,+\infty]$，系统(1.1)的内平衡点 E^* 是局部渐近稳定的。

ii) 如果(2.6)有个不同的正根 $\{\omega_i\}(i=1,2,)$，$\tau_1\in[0,\tau_{1_0})$，系统是局部渐近稳定的；当 $\tau_1\in[\tau_{1_0},+\infty)$ 且 $\frac{C_1+C_2}{D}\neq 0$，系统(1.1)在 $\tau_1=\tau_{1_0}$ 产生 Hopf 分支。

第三种情况： $\tau_1>0, \tau_2>0$

当 $\tau_1>0, \tau_2>0$ 时，系统(1.1)可以写成如下形式：

$$\begin{cases} \dot{u}_1(t) = a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + a_{13}u_3 \\ \dot{u}_2(t) = a_{21}u_1(t-\tau_1) + a_{22}u_2 + a_{23}u_3 \\ \dot{u}_3(t) = a_{32}u_2(t-\tau_2) + a_{33}u_3 \end{cases}$$

我们将 τ_1 放在其在第二种情况的稳定区间，将 τ_2 看作变量进行研究

$$\tau_{1_0} = \begin{cases} +\infty \\ \min\left\{ \tau_{1_i}^j \middle| i = 1,2,\ j = 1,2,\cdots \right\} \end{cases} \quad \tau_{1_0} \in (0,\tau_1)$$

系统(1.1)的特征方程变为

$$f_0(\lambda) + f_1(\lambda)e^{-\lambda\tau_2} = 0 \tag{2.7}$$

其中

$$f_0(\lambda) = \lambda^3 + e_1\lambda^2 + e_2\lambda + e_3 + e_4(\lambda - a_{33})e^{-\lambda\tau_1},$$
$$f_1(\lambda) = \left(e_5 e^{-\lambda\tau_1} + e_6(\lambda - a_{11})\right)$$

并且

$$\begin{aligned} e_1 &= -(a_{11} + a_{22} + a_{33}), \\ e_2 &= a_{11}a_{22} + a_{22}a_{33} + a_{33}a_{11}, \\ e_3 &= -a_{11}a_{22}a_{33}, \\ e_4 &= -a_{12}a_{21}, \\ e_5 &= -a_{13}a_{21}a_{32}, \\ e_6 &= -a_{23}a_{32} \end{aligned}$$

假设 $\lambda = i\omega$ 是方程(2.7)的纯虚根且将 $\lambda = i\omega$ 代入方程(2.7)，两边同时乘以 $e^{\lambda\tau_1}$，可以得到：

$$(C_0 + iC_1) + (D_0 + iD_1)e^{-i\omega\tau_2} = 0$$

其中

$$C_0 = \operatorname{Re}\{f_0(i\omega)\},\ C_1 = \operatorname{Im}\{f_0(i\omega)\},$$
$$D_0 = \operatorname{Re}\{f_1(i\omega)\},\ D_1 = \operatorname{Im}\{f_1(i\omega)\}$$

分离实部和虚部得到

$$\begin{cases} C_0 + D_0\cos(\omega\tau_2) + D_1\sin(\omega\tau_2) = 0 \\ C_1 - D_0\sin(\omega\tau_2) + D_1\cos(\omega\tau_2) = 0 \end{cases} \tag{2.8}$$

对(2.8)进行处理得到

$$C_0^2 + C_1^2 = D_0^2 + D_1^2 \tag{2.9}$$

且

$$\begin{aligned} C_0 &= -e_1\omega^2 + e_3 + e_4\left(\omega\sin(\omega\tau_1) - a_{33}\cos(\omega\tau_1)\right) \\ C_1 &= -\omega^3 + e_2\omega + e_4\left(\omega\cos(\omega\tau_1) + a_{33}\sin(\omega\tau_1)\right) \\ D_0 &= e_5\cos(\omega\tau_1) - e_6 a_{11} \\ D_1 &= e_6\omega - e_5\sin(\omega\tau_1) \end{aligned}$$

所以代入(2.9)并进行简化，得到关于 ω 的函数

$$\begin{aligned}&\omega^6+\left(e_1^2-2e_2-2e_4\cos\left(\omega\tau_1\right)\right)\omega^4+\left[-2e_1e_4\sin\left(\omega\tau_1\right)-2e_4a_{33}\sin\left(\omega\tau_1\right)\right]\omega^3\\&+\left[e_4^2+e_2^2+2e_2e_4\cos\left(\omega\tau_1\right)+2e_1a_{33}e_4\cos\left(\omega\tau_1\right)-2e_1e_3-e_6^2\right]\omega^2\\&+\left[2e_3e_4\sin\left(\omega\tau_1\right)+2e_2e_4a_{33}\sin\left(\omega\tau_1\right)+2e_5e_6\sin\left(\omega\tau_1\right)\right]\omega\\&+\left[e_3^2-2e_3a_{33}e_4\cos\left(\omega\tau_1\right)+e_4^2a_{33}^2-e_6^2a_{11}^2+2e_5e_6a_{11}\cos\left(\omega\tau_1\right)-e_5^2\right]=0\end{aligned}\tag{2.10}$$

1) 如果(2.10)不存在正根，(2.8)没有关于 τ_2 的正根。

2) 如果(2.10)存在几个不同的正根 $\{\omega_i\}, i=1,2$，我们就可以从(2.5)得到 $\left\{\tau_{2_i}^j \middle| j=1,2,\cdots\right\}$，取 $\tau_{2_0}=\min\left\{\tau_{2_i}^j \middle| i=1,2,\ j=1,2,\cdots\right\}$，当 $\tau_2=\tau_{2_0}$，特征方程存在一对纯虚根 $\pm i\omega$；当 $\tau_2<\tau_{2_0}$，特征方程没有纯虚根。

通过(2.8)，可以得到：

$$\begin{aligned}\cos\left(\omega\tau_2\right)&=-\frac{C_0D_0+C_1D_1}{D_0^2+D_1^2},\\ \sin\left(\omega\tau_1\right)&=-\frac{C_0D_1-D_0C_1}{D_0^2+D_1^2}\end{aligned},$$

$$\tau_{2_1}^{(k)}=\frac{1}{\omega}\left[\arccos\left(\frac{C_0D_0+C_1D_1}{D_1^2+D_0^2}\right)+2k\pi\right]$$

令 $\tau_{2_0}=\min\left\{\tau_{2_2}^{(k)},\tau_{2_1}^{(k)}\right\}$，

定理 2.3　i) 当 $\tau_1<\tau_{1_0}$ 且 $\tau_2<\tau_{2_0}$ 时，E^* 是局部渐近稳定的。

ii) 当 $\tau_2=\tau_{2_0}$ 且 $\tau_1<\tau_{1_0}$ 时，方程有一对纯虚根 $\pm i\omega^*$。$\left.\frac{\mathrm{d}\operatorname{Re}(\lambda)}{\mathrm{d}\tau_2}\right|_{\lambda=i\omega^*}\neq 0$，

系统(1.1)在 $\tau_2=\tau_{2_0}$ 处出现 Hopf 分支。

3. 结论

本文建立一类具有时滞效应的营养盐-浮游植物动态系统，基础 Routh-Hurwitz 判据和 Lyapunov-Krasovskii 函数，详细讨论了系统正平衡点的局部渐近稳定性和 Hopf 分岔动力学行为，获得了系统在正平衡点发生 Hopf 分岔行为的临界条件，这些研究结果对预防和控制浮游植物大面积爆发具有一定的指导意义。

致　谢

首先，我向我的导师赵敏教授表达我最诚挚的谢意！感谢老师对我的论文细致而又严谨的指导，感谢老师对我生活及学习上无微不至的关怀。

其次，感谢我们实验室的于恒国师兄和戴传军师兄，感谢你们一直以来在实验室对我问题的细致引导、鼓励和解答，使我对我们专业有了更深更细致的理解。

最后，感谢温州大学数学与信息科学院的各位老师和领导，感谢他们的教导和帮助。同时感谢赵敏导师国家自然科学基金面上项目(KZ1111021)的资助。

基金项目

国家自然科学基金面上项目(KZ1111021)。

参考文献 (References)

[1] Dai, C., Zhao, M. and Yu, H. (2016) Dynamics Induced by Delay in a Nutrient-Phytoplankton Model with Diffusion. *Ecological Complexity*, **26**, 29-36.

[2] Dai, C. and Zhao, M. (2013) Bifurcation and Periodic Solutions for an Algae-Fish Semicontinuous System. *Abstract and Applied Analysis*, **2013**, Article ID: 619721.

[3] Dai, C. and Zhao, M. (2014) Nonlinear Analysis in a Nutrient-Algae-Zooplankton System with Sinking of Algae. *Abstract and Applied Analysis*, **2014**, Article ID: 278457.

[4] 刘华祥, 曾广洪. 一类具季节性时变参数和周期时滞的浮游植物-浮游动物模型的正周期解[J]. 江西师范大学学报, 2012, 36(5): 506-511.

[5] Chatterjee, A. and Pal, S. (2016) Plankton Nutrient Interaction Model with Effect of Toxin in Presence of Modified Traditional Holling Type II Functional Response. *Systems Science & Control Engineering*, **4**, 20-30. https://doi.org/10.1080/21642583.2015.1136801

[6] Mukhopadhyay, B. and Bhattacharyya, R. (2006) Modelling Phytoplankton Allelopathy in a Nutrient-Plankton Model with Spatial Heterogeneity. *Ecological Modelling*, **198**, 163-173.

[7] Chatterjee, A. and Pal, S. (2015) Effect of Delay on Growth Function of Zooplankton in Plankton Ecosystem Model and Its Consequence on the Formation of Plankton Bloom. *Nonlinear Studies*, **3**, 503-523.

[8] Yu, H., Zhao, M. and Agarwal, R.P. (2014) Article Stability and Dynamics Analysis of Time Delayed Entrophication Ecological Model Based upon the Zeya Reservoir. *Mathematics and Computers in Simulation*, **97**, 53-67.

[9] Chakraborty, S., Tiwari, P.K. and Misra, A.K. (2015) Spatial Dynamics of a Nutrient-Phytoplankton System with Toxic Effect on Phytoplankton. *Mathematical Biosciences*, **264**, 94-100.

[10] Wang, Y., Zhao, M. and Dai, C. (2014) Nonlinear Dynamics of a Nutrient-Plankton Model. *Abstract and Applied Analysis*, **2014**, Article ID: 451757.

[11] Mei, D., Zhao, M. and Yu, H. (2015) Nonlinear Dynamics of a Nutrient-Phytoplankton Model with Time Delay. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, **2015**, Article ID: 939187.

[12] Pan, X., Wang, Y. and Zhao, M. (2014) Stability and Hopf Bifurcation Analysis of a Nutrient-Phytoplankton Model with Delay Effect. *Abstract and Applied Analysis*, **2014**, Article ID: 471507.

[13] Chattopadhyay, J., Sarkar, R.R. and Pal, S. (2004) Mathematical Modelling of Harmful Algal Blooms Supported by Experimental Findings. *Ecological Complexity*, **1**, 225-235.

[14] Rhodes, C.J. and Martin, A.P. (2016) The Influence of Viral Infection on a Plankton Ecosystem Undergoing Nutrient Enrichment. *Journal of Theoretical Biology*, **265**, 225-237.

[15] Sarkar, R.R., Mukhopadhyay, B. and Bhattacharyya, R. (2007) Time Lags Can Control Algal Bloom in Two Harmful Phytoplankton-Zooplankton System. *Applied Mathematics and Computation*, **186**, 445-459.

[16] Sarkar, R.R., Pal, S. and Chattopadhyay, J. (2005) Role of Two Toxin-Producing Plankton and Their Effect on Phytoplankton-Zooplankton System—A Mathematical Study Supported by Experimental Findings. *BioSystems*, **80**, 11-23.

[17] 田灿荣. 一类带有时滞竞争模型的周期解[J]. 生物数学学报, 2007, 22(3): 431-440.

[18] Chattopadhyay, J., Sarkar, R.R. and Pal, S. (2003) Dynamics of Nutrient/Phytoplankton Interaction in the Presence of Viral Infection. *BioSystems*, **68**, 5-17.

[19] Jiao, J., Cai, S. and Chen, L. (2016) Dynamics of a Plankton-Nutrient Chemostat Model with Hibernation and It Described by Impulsive Switched Systems. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, **53**, 1-16.

[20] Li, J. and Gao, W. (2016) Analysis of a Nutrient-Phytoplankton Model in the Presence of Viral Infection. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, *English Series*, **1**, 113-128. https://doi.org/10.1007/s10255-016-0540-6