Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2017, 6(5), 659-663
Published Online August 2017 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2017.65077

Hans汉斯

Bifurcations of Heteroclinic Loop for a Class of Cubic Differential Systems

Nana Zhang[1,2], Han Xu[2]

[1]School of Mathematics and Statistics, Shandong Normal University, Jinan Shandong
[2]School of Mathematics and Statistics, Linyi University, Linyi Shandong
Email: zhangnana01@sina.com, xuhan@lyu.edu.cn

Received: Jul. 15th, 2017; accepted: Jul. 28th, 2017; published: Aug. 2nd, 2017

Abstract

In this paper, by using the bifurcation method to analyze the relative distance between the stable manifold and the unstable manifold after the heteroclinic loop of the unperturbed system was perturbed to break, the authors studied the existence problem of limit cycles of a class of cubic differential system and obtained the conditions to ensure the system has at least one limit cycle.

Keywords

Heteroclinic Orbit, Poincare-Bendixson Theorem, Bifurcation, Limit Cycle

一类三次微分系统的异宿环分支

张娜娜[1,2]，徐　涵[2]

[1]山东师范大学数学与统计学院，山东 济南
[2]临沂大学数学与统计学院，山东 临沂
Email: zhangnana01@sina.com, xuhan@lyu.edu.cn

收稿日期：2017年7月15日；录用日期：2017年7月28日；发布日期：2017年8月2日

摘　要

本文运用分支的方法，通过分析未扰系统的异宿环在小扰动下的稳定流形和不稳定流形之间的相对距离，研究了一类三次微分系统的异宿环分支极限环的问题，给出了系统至少产生一个极限环的条件。

文章引用: 张娜娜, 徐涵. 一类三次微分系统的异宿环分支[J]. 应用数学进展, 2017, 6(5): 659-663.
DOI: 10.12677/aam.2017.65077

关键词

异宿轨，环域定理，分支，极限环

1. 引言

近些年来，关于多项式微分系统极限环问题很多学者已有研究，如[1] [2] [3] [4]，但采用的方法通常是选择适当的坐标变换把方程化为一种标准形式，然后再利用定性分析的方法来讨论。文[5]中利用分支的方法，研究了软弹簧型方程在摄动下分支出极限环的问题。文[6] [7] [8]中利用同宿分支的方法，研究了二次微分系统(I)，(II)，(III)类方程的极限环的存在性。文[9]中利用分支的方法，研究了一类 Duffing 方程的分支问题。本文利用类似的方法，适当选取存在异宿环的未扰系统，把其余项看作扰动项，通过对未扰系统的异宿轨经扰动破裂以后的稳定流形和不稳定流形之间的相对距离的分析，研究了一类三次微分系统的异宿环分支极限环的问题。

2. 预备知识

考虑平面自治系统

$$\begin{cases} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y) \end{cases} \tag{2.1}$$

及其扰动系统

$$\begin{cases} x' = f(x,y) + pf_0(x,y,p,q) \\ y' = g(x,y) + pg_0(x,y,p,q) \end{cases} \tag{2.2}$$

其中，$f, g, f_0, g_0 \in C^1$，$x, y \in R^1$，$p \in R^1$，$q \in R^k$，$k \ge 0$。

引理 1 (环域定理) ([1])：设 D 是由两条不相交的单闭曲线 L_1 和 L_2 所围成的环域，并且系统在 D 内无奇点。如果当时间 t 增加时从 L_1 和 L_2 上出发的轨线都进入(离开) D，那么在 D 内至少存在一个稳定(不稳定)的极限环。

注 1：L_1 和 L_2 可以部分地由轨线构成，甚至上面可以出现有限个奇点，只要保证轨线一旦进入(离开) D 后不再离开(进入)即可。

注 2：D 的内边界可以缩为一个不稳定(稳定)的奇点。

引理 2 ([4])：假设系统(2.1)存在异宿于鞍点 O_1，O_2 的异宿环 $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$，$P_0$ 为 Γ 上任意一点，过 P_0 作(2.1)的横截线 l 与 Γ 在 P_0 点的外法线方向 $\boldsymbol{n}$ 共线。扰动系统(2.2)在 O_1，O_2 点附近的鞍点分别为 $\bar{O}_1$(由 O_1 扰动而来)和 $\bar{O}_2$ (由 O_2 扰动而来)，$\bar{O}_1$ 的稳定流形 $W^s_{\bar{O}_1}$ 和 $\bar{O}_2$ 的不稳定流形 $W^u_{\bar{O}_2}$ 与 l 的交点分别为 P_s 和 P_u。则在小扰动下，从 P_s 到 P_u 的有向距离 $d(P_s, P_u)$ ($\boldsymbol{P_s P_u}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 同向时为正)为：

$$d(p_s, p_u) = \frac{pM}{\sqrt{f^2(P_0) + g^2(P_0)}} + o(p) \tag{2.3}$$

其中，$M=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\int_0^t\left(f_x+g_y\right)\mathrm{d}\tau}\left(fg_0-gf_0\right)_{p=0}\mathrm{d}t$ 为 Melnikov 函数。

3. 主要结果

考虑系统

$$\begin{cases} x'=-y+\delta x+mxy+ny^3 \\ y'=x \end{cases} \tag{3.1}$$

设 $n>0$，$m>0$，令 $p=(\mathrm{sign}\delta)\sqrt{m^2+\delta^2}$，$\delta=pq$，$m=|p|\sqrt{1-q^2}$，从而系统(3.1)化为：

$$\begin{cases} x'=-y+ny^3+p\left[qx+(\mathrm{sign}p)\sqrt{1-q^2}xy\right] \\ y'=x \end{cases} \tag{3.2}$$

通过简单的定性分析可知系统(3.2)有鞍点 $O_1\left(0,\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ 和 $O_2\left(0,-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$，焦点或结点 $A(0,0)$。令 $x=u$，$y=v+\frac{1}{\sqrt{n}}$，则系统(3.2)化为：

$$\begin{cases} u'=2v+3\sqrt{n}v^2+nv^3+p\left[q+(\mathrm{sign}p)\sqrt{1-q^2}\left(v+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right]u \\ v'=u \end{cases} \tag{3.3}$$

易知(3.3)有鞍点 $\bar{O}_1(0,0)$ 和 $\bar{O}_2\left(0,-\frac{2}{\sqrt{n}}\right)$，焦点或结点 $\bar{A}\left(0,-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$。考虑(3.3)的未扰系统：

$$\begin{cases} u'=2v+3\sqrt{n}v^2+nv^3 \\ v'=u \end{cases} \tag{3.4}$$

易知(3.4)有鞍点 $\bar{O}_1(0,0)$ 和 $\bar{O}_2\left(0,-\frac{2}{\sqrt{n}}\right)$，中心 $\bar{A}\left(0,-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$，经计算得到系统(3.4)的首次积分：

$$H(u,v)=u^2-2v^2-2\sqrt{n}v^3-\frac{n}{2}v^4=h \tag{3.5}$$

当 $h=0$ 时，(3.5)为(3.4)的过鞍点 $\bar{O}_1(0,0)$ 和 $\bar{O}_2\left(0,-\frac{2}{\sqrt{n}}\right)$ 的异宿环，记为 $\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2$，即，$\Gamma=\{u=u(t),v=v(t),t\in(-\infty,+\infty)\}=\{(u,v):H(u,v)=0\}$，其中 Γ_1 为沿 $t\to+\infty$ 方向从 $\bar{O}_1(0,0)$ 到 $\bar{O}_2\left(0,-\frac{2}{\sqrt{n}}\right)$ 的异宿轨，Γ_2 为沿 $t\to+\infty$ 方向从 $\bar{O}_2\left(0,-\frac{2}{\sqrt{n}}\right)$ 到 $\bar{O}_1(0,0)$ 的异宿轨。不失一般性，假设 Γ_1 为 Γ 在 v 轴的左边部分，Γ_2 为 Γ 在 v 轴的右边部分，Γ 为逆时针走向。将 $\bar{A}\left(0,-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ 带入(3.5)式可以得到：当 $-\frac{1}{2n}<h<0$ 时，(3.5)为(3.4)的在异宿环 Γ 内的一簇包围中心 $\bar{A}\left(0,-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ 的闭轨。于是我们得到：

定理(1) 当 $\delta>0$，$m>0$ 时，系统(3.3)在 Γ 的邻域内至少存在一条围绕 $\bar{A}\left(0,-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ 的稳定极限环。

(2) 当 $\delta<0$，$m>0$ 时，系统(3.3)在 Γ 的邻域内至少存在一条围绕 $\bar{A}\left(0,-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ 的不稳定极限环。

证明: (1)当 $\delta>0$， $m>0$ 时，此时(3.3)可转化为

$$\begin{cases} u' = 2v + 3\sqrt{n}v^2 + nv^3 + p\left[q + \sqrt{1-q^2}\left(v + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right]u \\ v' = u \end{cases} \tag{3.6}$$

下面我们讨论系统(3.6)在奇点 $\bar{O}_1(0,0)$，$\bar{O}_2\left(0,-\frac{2}{\sqrt{n}}\right)$ 和 $\bar{A}\left(0,-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ 附近的轨线结构。由(3.5)知 Γ_1 与 Γ_2 的表达式分别为

$$\Gamma_1 : u = v\sqrt{2+2\sqrt{n}v+\frac{n}{2}v^2}，\ \Gamma_2 : u = -v\sqrt{2+2\sqrt{n}v+\frac{n}{2}v^2}.$$

记 $f = 2v + 3\sqrt{n}v^2 + nv^3$， $g = u$， $f_0 = \left[\left(q + \frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{1-q^2}\right) + \sqrt{1-q^2}v\right]u$， $g_0 = 0$。任取 Γ_1 上一点 $P_0\left(-\frac{\sqrt{2n}}{2},-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$，不妨设此时 $t=0$，即 $u(0) = -\frac{\sqrt{2n}}{2}$， $v(0) = -\frac{1}{\sqrt{n}}$。过 $P_0\left(-\frac{\sqrt{2n}}{2},-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ 作(3.4)的截线 l 与 Γ_1 在 P_0 点的外法线方向 $\boldsymbol{n}$ 同向，设 $W_{\bar{O}_1}^u$ 为系统(3.3)过 $\bar{O}_1(0,0)$ 的不稳定流形， $W_{\bar{O}_2}^s$ 为系统(3.3)过 $\bar{O}_2\left(0,-\frac{2}{\sqrt{n}}\right)$ 的稳定流形，且 $W_{\bar{O}_2}^s$， $W_{\bar{O}_1}^u$ 与 l 的交点分别为 P_s， P_u。由引理 2 知，在扰动充分小的情况下，从 P_s 点到 P_u 点的有向距离为 $d(P_s,P_u) = \frac{1}{\sqrt{f^2(P_0)+g^2(P_0)}}pM + o(p)$。

考虑 Γ_1 的 Melnikov 函数：

$$\begin{aligned} M(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\left\{-\left[\left(q+\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{1-q^2}\right)+\sqrt{1-q^2}v\right]u\right\}u\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{-\frac{2}{\sqrt{n}}}\left\{-\left[\left(q+\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{1-q^2}\right)+\sqrt{1-q^2}v\right]v\sqrt{2+2\sqrt{n}v+\frac{n}{2}v^2}\right\}\mathrm{d}v \\ &= -\frac{2\sqrt{2}}{3n}q. \end{aligned}$$

由 $f(P_0)=0$， $g(P_0) = -\frac{\sqrt{2n}}{2}$，得 $d(P_s,P_u) = -\frac{4}{3n\sqrt{n}}pq + o(p)$。由于 $p>0$， $q>0$，故 $d(P_s,P_u)<0$，此时异宿轨 Γ_1 破裂以后关于鞍点 $\bar{O}_2\left(0,-\frac{2}{\sqrt{n}}\right)$ 的稳定流形 $W_{\bar{O}_2}^s$ 在 $\bar{O}_1(0,0)$ 的不稳定流形 $W_{\bar{O}_1}^u$ 的外部。

同理可证异宿轨 Γ_2 破裂以后关于鞍点 $\bar{O}_1(0,0)$ 的稳定流形 $W_{\bar{O}_1}^s$ 在 $\bar{O}_2\left(0,-\frac{2}{\sqrt{n}}\right)$ 的不稳定流形 $W_{\bar{O}_2}^u$ 的外部。

以下我们利用 Poincare-Bendixson 环域定理来证明极限环的存在性，我们只需构造所需的内外境界即可。

首先，当 $\delta>0$， $m>0$ 时， $\bar{A}\left(0,-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ 为系统(3.3)的一阶不稳定细焦点或不稳定结点，故可取 $\bar{A}\left(0,-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ 作为环域定理所要求的环域 D 的内境界。

其次，由前面分析知道，当$q>0$时，$W_{\bar{O}_2}^s$在$W_{\bar{O}_1}^u$的外部，并且当系统(3.3)的轨线穿过线段$\overline{P_sP_u}$时，$v'=u<0$，从而由$\overline{P_sP_u}$上任意点出发的轨线沿自上向下的方向穿过，同样当$q>0$时，$W_{\bar{O}_1}^s$在$W_{\bar{O}_2}^u$的外部，并且当系统(3.3)的轨线穿过线段$\overline{Q_uQ_s}$时，$v'=u>0$，从而由$\overline{Q_uQ_s}$上任意点出发的轨线沿自下向上的方向穿过。同时(3.3)满足解的存在唯一性条件，所以，我们选取$\bar{O}_1P_u\cup\overline{P_uP_s}\cup P_s\bar{O}_2\cup\bar{O}_2Q_u\cup\overline{Q_uQ_s}\cup Q_s\bar{O}_1$作为环域$D$的外境界。易知，由$\overline{P_sP_u}$和$\overline{Q_uQ_s}$上任意点出发的轨线都进入$D$。

由 Poincare-Bendixson 环域定理得，此时系统(3.3)在环域D中至少存在一个稳定的极限环。

同理可证明(2)，当$\delta<0$，$m>0$时，系统(3.3)在Γ的邻域内至少存在一个不稳定的极限环。

基金项目

国家自然科学基金(11601212)，山东省自然科学基金(ZR2015AL005)和山东省高等学校科技计划项目(J16LI03)资助。

参考文献 (References)

[1] 张芷芬, 丁同仁, 黄文灶, 董镇喜. 微分方程定性理论[M]. 北京: 科学出版社, 1985.
[2] 张锦炎, 冯贝叶. 常微分方程几何理论与分支问题[M]. 北京: 北京大学出版社, 2000.
[3] 叶彦谦等. 极限环论[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1984.
[4] 叶彦谦. 多项式微分系统定性理论[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1995.
[5] 程福德. 软弹簧型方程在摄动下分支出极限环[J]. 应用数学和力学, 1998, 19(2): 121-125.
[6] 金银来. 二次微分系统(I)类方程的分支问题[J]. 聊城师范学院学报, 2001, 14(1): 15-20.
[7] 郑庆玉. 二次微分系统(II)类方程的分支问题[J]. 曲阜师范大学学报, 2002, 28(3): 27-30.
[8] 金银来, 庄维欣. 二次微分系统(III)类方程的分支问题[J]. 常德师范学院学报, 2002, 14(4): 3-5.
[9] 金银来. 一类 Duffing 方程的分支问题[J]. 吉首大学学报, 2001, 22(2): 50-53.