Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2017, 6(7), 905-916
Published Online October 2017 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2017.67109

Hans汉斯

On the Number of *D*-Points on a Line in the Tiling (3.6.3.6)

Lin Peng, Liping Yuan

College of Mathematics and Information Science, Hebei Normal University, Shijiazhuang Hebei
Email: 2286734913@qq.com

Received: Oct. 8th, 2017; accepted: Oct. 24th, 2017; published: Oct. 31st, 2017

Abstract

A vertex of the Archimedean tiling (3.6.3.6) is called a *D*-point. In this paper, we first investigate the number of *D*-points lying on any given line in the plane, and prove that all the lines can be classified into three categories according to the numbers of *D*-points lying on them, namely, no *D*-point, one and only one *D*-point and an infinitely many *D*-points. We also give the whole characterizations of those three types of lines by some necessary and sufficient conditions. Furthermore, we consider the broadest paths that contain no *D*-points in their interiors in any given direction $\theta \in [0, \pi)$.

Keywords

Archimedean Tiling, Lattice, Line, *D*-Point, Broadest Path

铺砌(3.6.3.6)中直线上的*D*-点数

彭　琳，苑立平

河北师范大学数学与信息科学学院，河北　石家庄
Email: 2286734913@qq.com

收稿日期：2017年10月8日；录用日期：2017年10月24日；发布日期：2017年10月31日

摘　要

阿基米德铺砌(3.6.3.6)的顶点称为*D*-点。论文首先研究了平面内任意给定直线上的*D*-点数，证明了所有直线按其所含*D*-点数可分为三类，即不含*D*-点、含且仅含一个*D*-点与含无穷多个*D*-点，同时给出了刻画这三类直线的充要条件，进而探讨了$\theta \in [0, \pi)$方向上内部不含*D*-点的最宽路径问题。

文章引用: 彭琳, 苑立平. 铺砌(3.6.3.6)中直线上的 *D*-点数[J]. 应用数学进展, 2017, 6(7): 905-916.
DOI: 10.12677/aam.2017.67109

关键词

阿基米德铺砌，格，直线，*D*-点，最宽路径

1. 引言

平面铺砌$\mathcal{T}$是指由可数个闭集构成的集族$\mathcal{T}=\{T_1,T_2,\cdots\}$，满足$\mathbb{R}^2=\bigcup_{i=1}^{\infty}T_i$与$\operatorname{int}T_i\cap\operatorname{int}T_j=\phi\ (i\neq j)$。每个闭集$T_i\ (i=1,2,\cdots)$称为铺砌$\mathcal{T}$的铺砌元。一个平面铺砌$\mathcal{T}$中有限个(至少两个)铺砌元的交或为空集，或为孤立点，或为一段弧，称孤立点为铺砌顶点，弧为铺砌边。

若铺砌$\mathcal{T}$的每个铺砌元均为多边形且每个铺砌元的顶点和边恰好是整个铺砌的顶点和边，则称$\mathcal{T}$为边对边铺砌[1]。平面铺砌中与某一个铺砌顶点关联的所有铺砌元的个数、类型及彼此的邻接顺序，统称为该铺砌顶点的顶点特征。若平面铺砌$\mathcal{T}$是以正多边形为铺砌元、各顶点的顶点特征均相同的边对边铺砌，则称$\mathcal{T}$为阿基米德铺砌[1]。阿基米德铺砌有且仅有 11 种，如图 1 所示。

设$\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$为二维平面内两个线性无关的向量，称点集$\Lambda=\{x\boldsymbol{u}+y\boldsymbol{v}:x,y\in\mathbb{Z}\}$为由向量$\boldsymbol{u}$与向量$\boldsymbol{v}$生成的一般格$\Lambda$，一般格$\Lambda$中的点称为格点。特别地，若$\boldsymbol{u}$与$\boldsymbol{v}$是两个单位正交向量，则称$\Lambda$为整数格。显然，铺砌元的边长为 1 的阿基米德铺砌(4^4)的顶点集即为整数格。因此，将数的几何中关于格点的研究方法和相关理论推广到阿基米德铺砌中是一个有意义的研究课题。

在文献[2]中，Olds 等人首先讨论了平面内任意给定直线上所含整数格点的个数问题，指出所有直线按其所含整数格点的个数可以分为三类，即不含任何整数格点、含且仅含一个整数格点与含无穷多个整数格点。文献[3]中创造性地将此结果推广到了一般格与铺砌(3^6)中，文献[4]中将相应的结果推广到了铺砌$(3^3.4^2)$中。

阿基米德铺砌(3.6.3.6)与一般格的联系十分紧密，本文将一般格中直线上的顶点计数的相关理论和方法推广到铺砌(3.6.3.6)中，按照所含D-点数对直线进行分类，同时给出刻画各类直线的充要条件；并进一步利用此结果讨论了内部无D-点的最宽路径问题。

2. 预备知识

阿基米德铺砌(3.6.3.6) (下记为$\mathcal{F}$)由正六边形与正三角形铺砌元构成，为讨论方便，设其铺砌边的长为 1。设D为铺砌$\mathcal{F}$的顶点集，C为由铺砌$\mathcal{F}$的所有正六边形铺砌元的中心构成的集合，并称D中的点为D-点，C中的点为C-点。D不具有一般格结构，但其可划分为 3 个一般格的不交并。不失一般性，以任一铺砌顶点为原点O，以过O及与O关联的正六边形的中心的直线为x-轴，建立如图 2 所示的坐标系。

设D_0为由向量$\boldsymbol{u}=(2,0)$与向量$\boldsymbol{v}=(1,\sqrt{3})$生成的一般格，则有

$$D_0=\{p\boldsymbol{u}+q\boldsymbol{v}:p,q\in\mathbb{Z}\}=\left\{\left(\frac{4p+2q}{2},\frac{2q\sqrt{3}}{2}\right):p,q\in\mathbb{Z}\right\}.$$

由D_0分别沿向量$\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$和$\left(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$平移得到

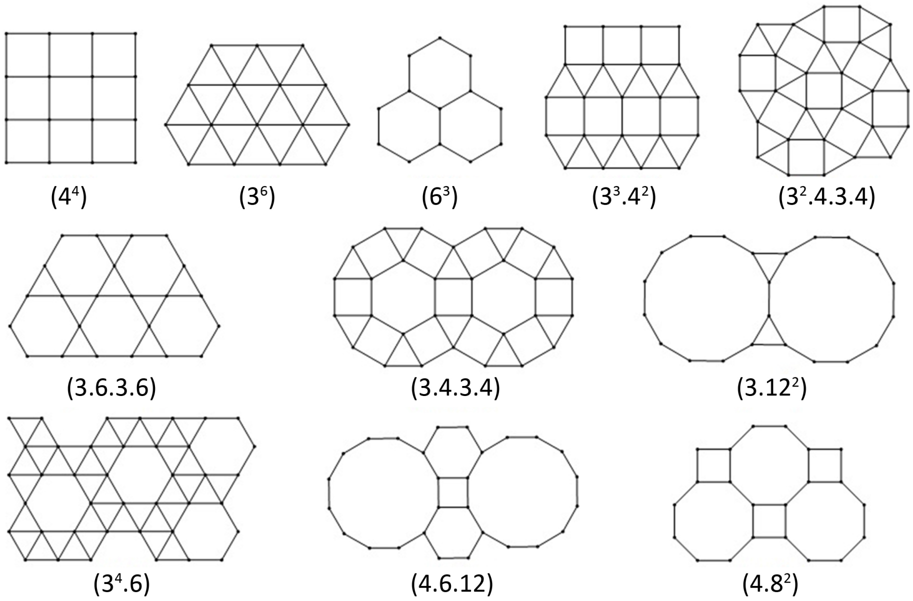

Figure 1. Archimedean tilings
图 1. 阿基米德铺砌

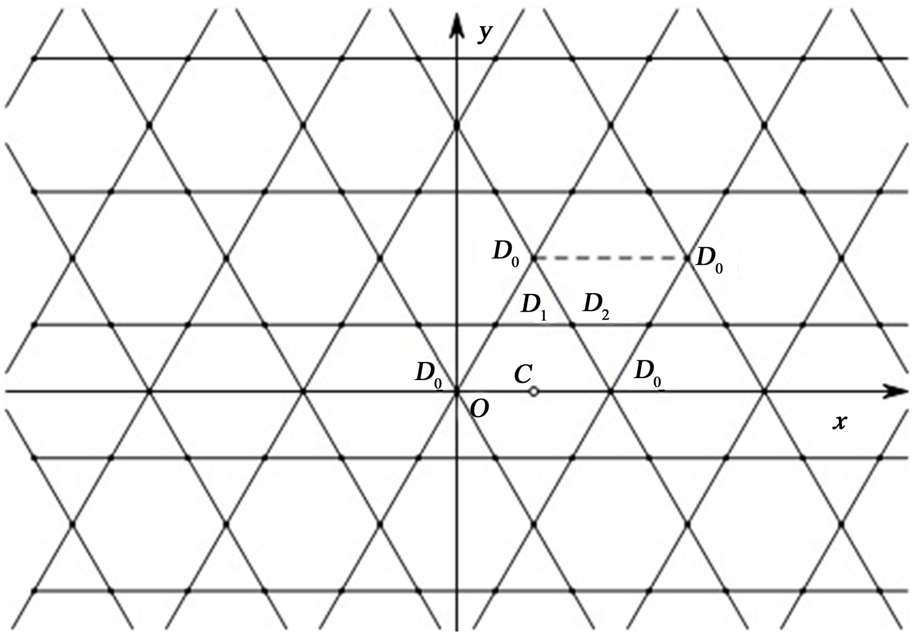

Figure 2. Coordinate system
图 2. 坐标系

$$D_1=\left\{\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+p\boldsymbol{u}+q\boldsymbol{v}:p,q\in\mathbb{Z}\right\}=\left\{\left(\frac{4p+2q+1}{2},\frac{(2q+1)\sqrt{3}}{2}\right):p,q\in\mathbb{Z}\right\},$$

$$D_2=\left\{\left(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+p\boldsymbol{u}+q\boldsymbol{v}:p,q\in\mathbb{Z}\right\}=\left\{\left(\frac{4p+2q+3}{2},\frac{(2q+1)\sqrt{3}}{2}\right):p,q\in\mathbb{Z}\right\}.$$

显然有 $D=D_0\cup D_1\cup D_2$。由 D_0 平移向量 $(1,0)$ 可得到 C，故有

$$C=\left\{(1,0)+p\boldsymbol{u}+q\boldsymbol{v}:p,q\in\mathbb{Z}\right\}=\left\{\left(\frac{4p+2q+2}{2},\frac{2q\sqrt{3}}{2}\right):p,q\in\mathbb{Z}\right\}.$$

进而根据顶点坐标的特征化简整理可得

$$D_0=\left\{\left(\frac{m}{2},\frac{n\sqrt{3}}{2}\right):m,n\in\mathbb{Z},\ m+n\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 4),\ n\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 2)\right\},$$

$$D_1=\left\{\left(\frac{m}{2},\frac{n\sqrt{3}}{2}\right):m,n\in\mathbb{Z},\ m+n\equiv 2\ (\mathrm{mod}\ 4),\ n\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 2)\right\},$$

$$D_2=\left\{\left(\frac{m}{2},\frac{n\sqrt{3}}{2}\right):m,n\in\mathbb{Z},\ m+n\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 4),\ n\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 2)\right\},$$

$$C=\left\{\left(\frac{m}{2},\frac{n\sqrt{3}}{2}\right):m,n\in\mathbb{Z},\ m+n\equiv 2\ (\mathrm{mod}\ 4),\ n\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 2)\right\}.$$

铺砌元的边长为 1 的铺砌(3^6)的顶点集即为特殊的一般格，亦称为三角格 T，称 T 中的点为 T-点。而三角格 T 可由向量(1,0)与向量$\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$生成，即

$$T=\left\{p(1,0)+q\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right):p,q\in\mathbb{Z}\right\}=\left\{\left(\frac{2p+q}{2},\frac{q\sqrt{3}}{2}\right):p,q\in\mathbb{Z}\right\},$$

进一步化简可得

$$T=\left\{\left(\frac{m}{2},\frac{n\sqrt{3}}{2}\right):m,n\in\mathbb{Z},\ m+n\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 2)\right\}.$$

因此$T=D\bigcup C$。我们称集合 $D_i\ (i=0,1,2)$ 中的点为 D_i-点，用符号 $N_l(D_i)(i=0,1,2)$ 与 $N_l(C)$ 分别表示任意给定直线 l 上的 D_i-点数与 C-点数。

引理 2.1： 若点 $P\in D_0$，则 $\gamma P\in D_0$，其中 $\gamma\in\mathbb{Z}$。

证明： 已知点 $P\in D_0$，不妨设 $P=\left(\frac{m}{2},\frac{n\sqrt{3}}{2}\right)$，其中 $m,n\in\mathbb{Z},\ m+n\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 4),\ n\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 2)$，则 $\gamma P=\left(\frac{\gamma m}{2},\frac{\gamma n\sqrt{3}}{2}\right)$，显然有 $\gamma m,\gamma n\in\mathbb{Z},\ \gamma n\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 2)$ 且 $\gamma m+\gamma n\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 4)$，因此 $\gamma P\in D_0$。

引理 2.2： 设 α 为奇数，β 为偶数，则有

(a) 若点 $P\in D_1$，则 $\alpha P\in D_1,\beta P\in D_0$。

(b) 若点 $P\in D_2$，则 $\alpha P\in D_2,\beta P\in D_0$。

(c) 若点 $P\in C$，则 $\alpha P\in C,\beta P\in D_0$。

证明： 设点 $P\in D_1$，则可设 $P=\left(\frac{m}{2},\frac{n\sqrt{3}}{2}\right)$，其中 $m,n\in\mathbb{Z},\ m+n\equiv 2\ (\mathrm{mod}\ 4),\ n\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 2)$。不妨设 $m+n=4s+2,\ s\in\mathbb{Z}$。

因为 α 为奇数，故可设 $\alpha=2t+1,\ t\in\mathbb{Z}$，则 $\alpha P=\left(\frac{\alpha m}{2},\frac{\alpha n\sqrt{3}}{2}\right)=\left(\frac{(2t+1)m}{2},\frac{(2t+1)n\sqrt{3}}{2}\right)$，从而由

$(2t+1)m+(2t+1)n=4(2ts+t+s)+2$ 可得 $(2t+1)m+(2t+1)n\equiv 2 \pmod 4$，且易得 $(2t+1)n\equiv 1 \pmod 2$，因此 $\alpha P\in D_1$。

因为 β 为偶数，故可设 $\beta=2t,\ t\in\mathbb{Z}$，则 $\beta P=\left(\dfrac{\beta m}{2},\dfrac{\beta n\sqrt{3}}{2}\right)=\left(\dfrac{2tm}{2},\dfrac{2tn\sqrt{3}}{2}\right)$，从而由 $2tm+2tn=4(2ts+t)$ 可得 $2tm+2tn\equiv 0 \pmod 4$，且易得 $2tn\equiv 0 \pmod 2$，因此 $\beta P\in D_0$。

对于 $P\in D_2$ 或 $P\in C$，同理可证结论成立。

引理 2.3： 若点 $P\in D_i\ (i=0,1,2)$，则点 $-P\in D_i$；若点 $P\in C$，则点 $-P\in C$。

证明： 对点 $-P$ 综合应用引理 2.1 与引理 2.2 立即得证。

引理 2.4： 设点 $Q=\left(\dfrac{m}{2},\dfrac{n\sqrt{3}}{2}\right)\in T$，则有

(a) 若 $Q\in D_0$，则 D_i-点 $\xrightarrow{Q}$ D_i-点 $(i=0,1,2)$，C-点 $\xrightarrow{Q}$ C-点。

(b) 若 $Q\in D_1$，则 D_0-点 $\xrightarrow{Q}$ D_1-点，D_1-点 $\xrightarrow{Q}$ D_0-点，D_2-点 $\xrightarrow{Q}$ C-点，C-点 $\xrightarrow{Q}$ D_2-点。

(c) 若 $Q\in D_2$，则 D_0-点 $\xrightarrow{Q}$ D_2-点，D_2-点 $\xrightarrow{Q}$ D_0-点，D_1-点 $\xrightarrow{Q}$ C-点，C-点 $\xrightarrow{Q}$ D_1-点。

(d) 若 $Q\in C$，则 D_0-点 $\xrightarrow{Q}$ C-点，C-点 $\xrightarrow{Q}$ D_0-点，D_1-点 $\xrightarrow{Q}$ D_2-点，D_2-点 $\xrightarrow{Q}$ D_1-点。

(e) 若点 $P\notin T$，则点 $P+Q\notin T$。

其中，$P\xrightarrow{Q}P'$ 表示 P 沿向量 OQ 平移后变为 P'，即 $P'=P+Q$。

证明： 任取三角格 T 中的点 $P_i\in D_i\ (i=0,1,2)$，$P_3\in C$，不妨设其相应坐标为 $\left(\dfrac{m_i}{2},\dfrac{n_i\sqrt{3}}{2}\right)(i=0,1,2,3)$，其中 $m_i,n_i\in\mathbb{Z}$ 且满足 $m_0+n_0\equiv 0 \pmod 4$，$n_0\equiv 0 \pmod 2$；$m_1+n_1\equiv 2 \pmod 4$，$n_1\equiv 1 \pmod 2$；$m_2+n_2\equiv 0 \pmod 4$，$n_1\equiv 1 \pmod 2$；$m_3+n_3\equiv 2 \pmod 4$，$n_3\equiv 0 \pmod 2$。令点

$$P_i'=P_i+Q=\left(\frac{m_i+m}{2},\frac{(n_i+n)\sqrt{3}}{2}\right)\ (i=0,1,2,3)。$$

(a) 若 $Q\in D_0$，则 $m+n\equiv 0 \pmod 4$，$n\equiv 0 \pmod 2$。于是 $n_i+n\equiv n_i \pmod 2$，$m_i+m+n_i+n\equiv m_i+n_i \pmod 4$，故点 P_i' 与点 P_i 属于同一类型。因此，平移 OQ 后，D_i-点变为 D_i-点，C-点变为 C-点。

(b) 若 $Q\in D_1$，则 $m+n\equiv 2 \pmod 4$，$n\equiv 1 \pmod 2$。由于 $n_0+n\equiv 1 \pmod 2$，$m_0+m+n_0+n\equiv 2 \pmod 4$，则点 $P_0'\in D_1$；由于 $n_1+n\equiv 0 \pmod 2$，$m_1+m+n_1+n\equiv 0 \pmod 4$，则点 $P_1'\in D_0$；由于 $n_2+n\equiv 0 \pmod 2$，$m_2+m+n_2+n\equiv 2 \pmod 4$，则点 $P_2'\in C$；由于 $n_3+n\equiv 1 \pmod 2$，$m_3+m+n_3+n\equiv 0 \pmod 4$，则点 $P_3'\in D_2$。故平移 OQ 后，D_0-点变为 D_1-点，D_1-点变为 D_0-点，D_2-点变为 C-点，C-点变为 D_2-点。

情形(c)，(d)类似于(b)可证。

(e) 记点 $P'=P+Q$，则点 $P=P'+(-Q)$。根据引理 2.3，由点 $Q\in T$ 可得点 $-Q\in T$，于是综合(a)~(d)可得，若点 $P'\in T$，则 $P'+(-Q)\in T$，即点 $P\in T$，与条件点 $P\notin T$ 矛盾，故 $P+Q\notin T$。

3. 平面内任意直线上的 *D*-点数及其分布

设 l 为平面内任意一条直线，若直线 l 的斜率 k 不存在，可设其方程为 $x=a\ (a\in\mathbb{R})$，则显然有下述定理：

定理 3.1： 设直线 $l: x=a$，则

(a) $N_l(D)=\infty$ 当且仅当 $a=\dfrac{m}{2}$，其中 $m\in\mathbb{Z}$。

(b) $N_l(D)=0$ 当且仅当 $a\neq\frac{m}{2}$，其中 $m\in\mathbb{Z}$。

注意到，对于直线 $l:x=\frac{m}{2}(m\in\mathbb{Z})$，当 m 为奇数时，l 上含无穷多个 D_1-点与 D_2-点，D_1-点与 D_2-点交替出现且距离为 $\sqrt{3}$；当 m 为偶数时，l 上仅含 D_0-点且相邻两个 D_0-点的距离为 $2\sqrt{3}$。

现在我们考虑斜率存在的直线，不失一般性，可设直线 l 的方程为 $y=kx+b$。下面首先考虑 $b=0$ 即 l 的方程为 $y=kx$ 的情形。

定理 3.2： 设直线 $l:y=kx$，则 $N_l(D)=\infty$ 当且仅当直线 l 上至少含有一个非原点的 T-点。

证明： 必要性显然成立。下证充分性：设直线 l 上含有非原点的 T-点 P，令点 $P_\lambda=\lambda P$，其中 λ 为偶数，显然有点 $P_\lambda\in l$，进而综合引理 2.1 与引理 2.2 可得点 $P_\lambda\in D_0$。因此 $N_l(D_0)=\infty$，即 $N_l(D)=\infty$。

推论 3.3： 设直线 $l:y=kx$，若 $N_l(D)=\infty$，则 $N_l(D_0)=\infty$。

证明： 由定理 3.2 及其充分性的证明立即可得。

定理 3.4： 设直线 $l:y=kx$，则 $N_l(D)=\infty$ 的充要条件是 $k\in\left\{\lambda\sqrt{3}:\lambda\in\mathbb{Q}\right\}$。

证明： 必要性：已知 $N_l(D)=\infty$，则直线 l 上至少含有一个非原点的 T-点 P，不妨设 $P=\left(\frac{m}{2},\frac{n\sqrt{3}}{2}\right)$，其中 $m,n\in\mathbb{Z}$，$m+n\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 2)$。根据条件可知直线 l 的斜率 k 存在，则 $m\neq 0$，于是 $k=\frac{n\sqrt{3}}{m}$，故 $k\in\left\{\lambda\sqrt{3}:\lambda\in\mathbb{Q}\right\}$。

充分性：已知 $k\in\left\{\lambda\sqrt{3}:\lambda\in\mathbb{Q}\right\}$，则可设 $k=\frac{n\sqrt{3}}{m}$，其中 $m,n\in\mathbb{Z}$，$\gcd(m,n)=1$。于是直线 l 的方程为 $y=\frac{n\sqrt{3}}{m}x$。令点 $P=\left(\frac{2m}{2},\frac{2n\sqrt{3}}{2}\right)$，易知点 $P\in l$ 且 $P\neq O$，又由 $2m,2n\in\mathbb{Z}$ 且 $2m+2n\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 2)$ 可得点 $P\in T$，进而由定理 3.2 可得 $N_l(D)=\infty$。

定理 3.5： 设直线 $l:y=kx$，则 $N_l(D)=1$ 的充要条件是 $k\notin\left\{\lambda\sqrt{3}:\lambda\in\mathbb{Q}\right\}$。

证明： 通过定理 3.2 分析可得，对于直线 $l:y=kx$ 而言，要么含无穷多个 D-点，要么只含一个 D-点即 $O(0,0)$，进而根据定理 3.4 立即可得定理 3.5 成立。

直线 $l:y=kx+b(b\neq 0)$ 可由直线 $l':y=kx$ 平移得到，接下来考虑直线 $l:y=kx+b(b\neq 0)$ 上的 D-点数。

定义 3.6： 称直线 $l:y=kx+b$ 具有性质 D_b，若存在 $m,n\in\mathbb{Z}$ 满足 $n\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 2)$，$m+n\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 2)$ 或 $n\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 2)$，$m+n\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 4)$，使得 $b=\frac{n\sqrt{3}-km}{2}$。

引理 3.7： 设直线 $l:y=kx+b$，则 $N_l(D)>0$ 的充要条件为直线 l 具有性质 D_b。

证明： 必要性：由于 $N_l(D)>0$，可设 l 上含有 D-点 $P=\left(\frac{m}{2},\frac{n\sqrt{3}}{2}\right)$，其中 $m,n\in\mathbb{Z}$，$n\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 2)$，$m+n\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 2)$ 或 $n\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 2)$，$m+n\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 4)$，将其坐标代入直线方程 $y=kx+b$ 可得 $b=y-kx=\frac{n\sqrt{3}-km}{2}$。因此直线 l 具有性质 D_b。

充分性：设直线 l 具有性质 D_b，则可设 $b=\frac{n\sqrt{3}-km}{2}$，其中 $m,n\in\mathbb{Z}$，$n\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 2)$，$m+n\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 2)$ 或 $n\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 2)$，$m+n\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 4)$，从而直线 l 的方程为 $y=kx+\frac{n\sqrt{3}-km}{2}=k\left(x-\frac{m}{2}\right)+\frac{n\sqrt{3}}{2}$。显然，点

$P=\left(\frac{m}{2},\frac{n\sqrt{3}}{2}\right)\in l$，当 $n\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 2)$，$m+n\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 2)$ 时，$P\in D_1$ 或 $P\in D_2$；当 $n\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 2)$，$m+n\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 4)$时，$P\in D_0$，故点 $P\in D$。因此，l 上至少含有一个 D-点，即 $N_l(D)>0$。

由上述引理立即可得下述定理：

定理 3.8： 设直线 $l:y=kx+b$，则 $N_l(D)=0$ 当且仅当直线 l 不具有性质 D_b。

定理 3.9： 设直线 $l:y=kx+b$，若直线 l 上含有 D-点 P，则有

(a) $N_l(D)=\infty$ 当且仅当 $k\in\left\{\lambda\sqrt{3}:\lambda\in\mathbb{Q}\right\}$。

(b) $N_l(D)=1$ 当且仅当 $k\notin\left\{\lambda\sqrt{3}:\lambda\in\mathbb{Q}\right\}$。

证明： 已知直线 $l:y=kx+b$ 上含有点 $P\in D$，令直线 $l':y=kx$，则 $l'=l-P$，于是 $l=l'+P$。

(a) 必要性：由于 $N_l(D)=\infty$，则直线 l 上必含不同于点 P 的 D-点 Q。令点 $Q'=Q-P$，显然有点 $Q'\in l'$，根据引理 2.3 可得点 $-P\in D$，从而由引理 2.4 可得点 $Q'\in T$。因为 $Q\neq P$，所以 $Q'\neq O$。于是由定理 3.2 可得 $N_{l'}(D)=\infty$，进而根据定理 3.4 可得直线 l' 的斜率即直线 l 的斜率 $k\in\left\{\lambda\sqrt{3}:\lambda\in\mathbb{Q}\right\}$。

充分性：设直线 l 的斜率 $k\in\left\{\lambda\sqrt{3}:\lambda\in\mathbb{Q}\right\}$，则由定理 3.4 可知 $N_{l'}(D)=\infty$，于是根据推论 3.3 可得 $N_{l'}(D_0)=\infty$，记直线 l' 上的无穷多个 D_0-点为 Q'_j $(j=1,2,3,\cdots)$，令点 $Q_j=Q'_j+P$ $(j=1,2,3,\cdots)$，则点 $Q_j\in l$，又由引理 2.4 可得，点 Q_j $(j=1,2,3,\cdots)$ 与点 P 为同类 D-点，因此 $N_l(D)=\infty$。

(b) 必要性：假设直线 l 的斜率 $k\in\left\{\lambda\sqrt{3}:\lambda\in\mathbb{Q}\right\}$，由(a)可得此时 $N_l(D)=\infty$，与已知条件 $N_l(D)=1$ 矛盾，因此 $k\notin\left\{\lambda\sqrt{3}:\lambda\in\mathbb{Q}\right\}$。

充分性：假设 $N_l(D)\neq 1$，由于直线 l 上含有 D-点 P，则直线 l 上必含不同于点 P 的 D-点 Q，而由(a)中必要性的证明过程可得，此时直线 l 的斜率 $k\in\left\{\lambda\sqrt{3}:\lambda\in\mathbb{Q}\right\}$，与已知条件 $k\notin\left\{\lambda\sqrt{3}:\lambda\in\mathbb{Q}\right\}$ 矛盾，因此 $N_l(D)=1$。

综上所述，可得下述定理：

定理 3.10： 设直线 $l:y=kx+b$，则 $N_l(D)=\infty$ 当且仅当

(1) 直线 l 具有性质 D_b；

(2) $k\in\left\{\lambda\sqrt{3}:\lambda\in\mathbb{Q}\right\}$。

定理 3.11： 设直线 $l:y=kx+b$，则 $N_l(D)=1$ 当且仅当

(1) 直线 l 具有性质 D_b；

(2) $k\notin\left\{\lambda\sqrt{3}:\lambda\in\mathbb{Q}\right\}$。

注 3.12： 直线 $l:y=kx$ 显然也具有性质 D_b，从而定理 3.4 与定理 3.5 分别为定理 3.10 与定理 3.11 中 $b=0$ 时的特殊情形。

对于含有 D-点的直线 $l:y=kx+b$，其中 $k\in\left\{\lambda\sqrt{3}:\lambda\in\mathbb{Q}\right\}$, $b\in\mathbb{R}$，必含无穷多个 D-点。下面对直线 l 上 D-点类型的分布进行讨论，并依据所含的 D-点类型对此类直线进一步进行划分及刻画。

定理 3.13： 设直线 $l:y=\frac{n\sqrt{3}}{m}x$，其中 $m,n\in\mathbb{Z}$，$\gcd(m,n)=1$，则有

(a) 直线 l 上仅含无穷多个 D_0-点当且仅当 $m+n\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 2)$；特别地，此时 $N_l(C)=\infty$。

(b) $N_l(D_0)=N_l(D_1)=\infty$，$N_l(D_2)=0$ 当且仅当 $m+n\equiv 2\ (\mathrm{mod}\ 4)$；特别地，此时 $N_l(C)=0$。

(c) $N_l(D_0)=N_l(D_2)=\infty$，$N_l(D_1)=0$ 当且仅当 $m+n\equiv 0 \pmod 4$；特别地，此时 $N_l(C)=0$。

证明： 已知直线 $l: y=\frac{n\sqrt{3}}{m}x$，其中 $m,n\in\mathbb{Z}$，$\gcd(m,n)=1$，则由定理 3.4 可得直线 l 上必含无穷多个 D-点。由 $\gcd(m,n)=1$ 可得整数 m 与 n 或为两个奇数，或为一奇一偶，即有 $m\equiv n\equiv 1 \pmod 2$ 或 $m+n\equiv 1 \pmod 2$。

(a) 必要性：令点 $P=\left(\frac{m}{2},\frac{n\sqrt{3}}{2}\right)$，则点 P 在直线 l 上。若 $m+n\equiv 0 \pmod 2$，则 $n\equiv 1 \pmod 2$，于是当 $m+n\equiv 0 \pmod 4$ 时点 $P\in D_2$；当 $m+n\equiv 2 \pmod 4$ 时点 $P\in D_1$。从而直线 l 上必含 D_1-点或 D_2-点，与条件直线 l 上仅含 D_0-点矛盾，因此 $m+n\equiv 1 \pmod 2$。

充分性：设直线 $l: y=\frac{n\sqrt{3}}{m}x$，其中 $m,n\in\mathbb{Z}$，$\gcd(m,n)=1$ 且 $m+n\equiv 1 \pmod 2$，要证直线 l 上仅含无穷多个 D_0-点，只需证直线 l 上不含其它类型的 D-点。假设 $N_l(D_1)\neq 0$，即可设直线 l 上含有 D_1-点 $P_1=\left(\frac{m_1}{2},\frac{n_1\sqrt{3}}{2}\right)$，其中 $m_1,n_1\in\mathbb{Z}$，$m_1+n_1\equiv 2 \pmod 4$，$n_1\equiv 1 \pmod 2$，将其坐标代入直线方程可得 $\frac{n_1\sqrt{3}}{2}=\frac{n\sqrt{3}}{m}\cdot\frac{m_1}{2}$，即 $mn_1=nm_1$。由于 m_1 与 n_1 均为奇数，而 m 与 n 必为一奇一偶，则乘积 mn_1 与 nm_1 必为一奇一偶，二者不可能相等，产生矛盾，因此 $N_l(D_1)=0$。同理可证 $N_l(D_2)=0$。综上可得，直线 l 上仅含无穷多个 D_0-点。

特别地，下证此时 $N_l(C)=\infty$。令点 $P'=\left(\frac{2m}{2},\frac{2n\sqrt{3}}{2}\right)$，则易知点 $P'\in l$ 且 $2m,2n\in\mathbb{Z}$，$2n\equiv 0 \pmod 2$，又由 $m+n\equiv 1 \pmod 2$ 可得 $2m+2n\equiv 2 \pmod 4$，从而点 $P'\in C$。令点 $P_t=tP'$，其中 t 为奇数，则易知点 $P_t\in l$，进而由引理 2.2 可得点 $P_t\in C$，因此 $N_l(C)=\infty$。

(b) 必要性：由于 $N_l(D_0)=N_l(D_1)=\infty$，即直线 l 上不仅含 D_0-点，则由(a)可得 $m+n\not\equiv 1 \pmod 2$。于是有 $m+n\equiv 0 \pmod 2$，此时 $m\equiv n\equiv 1 \pmod 2$，从而有 $m+n\equiv 0 \pmod 4$ 或 $m+n\equiv 2 \pmod 4$。易验证点 $P=\left(\frac{m}{2},\frac{n\sqrt{3}}{2}\right)$ 在直线 l 上，若 $m+n\equiv 0 \pmod 4$，则点 $P\in D_2$，与已知条件 $N_l(D_2)=0$ 矛盾，因此 $m+n\equiv 2 \pmod 4$。

充分性：设直线 $l: y=\frac{n\sqrt{3}}{m}x$，其中 $m,n\in\mathbb{Z}$，$\gcd(m,n)=1$ 且 $m+n\equiv 2 \pmod 4$，易得 $n\equiv 1 \pmod 2$。对于点 $P=\left(\frac{m}{2},\frac{n\sqrt{3}}{2}\right)$ 有 $P\in l$ 且 $P\in D_1$。令点 $P_\lambda=\lambda P$，其中 $\lambda\in\mathbb{Z}$，则点 $P_\lambda\in l$。根据引理 2.2 可知，当 λ 为奇数时，点 $P_\lambda\in D_1$；当 λ 为偶数时，点 $P_\lambda\in D_0$。因此 $N_l(D_0)=N_l(D_1)=\infty$。假设 $N_l(D_2)\neq 0$，即可设直线 l 上含 D_2-点 $P_2=\left(\frac{m_2}{2},\frac{n_2\sqrt{3}}{2}\right)$，其中 $m_2,n_2\in\mathbb{Z}$，$m_2+n_2\equiv 0 \pmod 4$ 且 $n_2\equiv 1 \pmod 2$，将其坐标代入直线方程可得 $\frac{n_2\sqrt{3}}{2}=\frac{n\sqrt{3}}{m}\cdot\frac{m_2}{2}$，即 $mn_2=nm_2$。于是有 $mn_2+nn_2=nm_2+nn_2$，即 $n_2(m+n)=n(m_2+n_2)$。由于 $4\mid(m_2+n_2)$，则 $4\mid n_2(m+n)$，而由 $n_2\equiv 1 \pmod 2$ 可得 $\gcd(4,n_2)=1$，于是 $4\mid(m+n)$，与已知条件 $m+n\equiv 2 \pmod 4$ 矛盾，因此 $N_l(D_2)=0$。综上可得 $N_l(D_0)=N_l(D_1)=\infty$ 且 $N_l(D_2)=0$。

特别地，下证此时 $N_l(C)=0$。假设 l 上含有 C-点 $P_3=\left(\frac{m_3}{2},\frac{n_3\sqrt{3}}{2}\right)$，其中 $m_3,n_3\in\mathbb{Z}$，$m_3+n_3\equiv 2\ (\mathrm{mod}\ 4)$，$n_3\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 2)$，将其坐标代入直线方程可得 $\frac{n_3\sqrt{3}}{2}=\frac{n\sqrt{3}}{m}\cdot\frac{m_3}{2}$，即 $mn_3=nm_3$。于是有 $mn_3+nn_3=nm_3+nn_3$，即 $n_3(m+n)=n(m_3+n_3)$。由 $m+n\equiv 2\ (\mathrm{mod}\ 4)$ 可得 $2\mid(m+n)$，又由 $2\mid n_3$ 可得 $4\mid n_3(m+n)$，于是 $4\mid n(m_3+n_3)$，进而由 $n\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 2)$ 可得 $\gcd(4,n)=1$，从而有 $4\mid(m_3+n_3)$，与已知条件 $m_3+n_3\equiv 2\ (\mathrm{mod}\ 4)$ 矛盾，因此 $N_l(C)=0$。

情形(c)类似于情形(b)可证。

定理 3.14： 设直线 $l: y=\frac{n\sqrt{3}}{m}x+b\ (b\neq 0)$，其中 $m,n\in\mathbb{Z}$，$\gcd(m,n)=1$。若 l 上含有 D_0-点 P_0，则有

(a) 直线 l 上仅含无穷多个 D_0-点当且仅当 $m+n\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 2)$。

(b) $N_l(D_0)=N_l(D_1)=\infty$，$N_l(D_2)=0$ 当且仅当 $m+n\equiv 2\ (\mathrm{mod}\ 4)$。

(c) $N_l(D_0)=N_l(D_2)=\infty$，$N_l(D_1)=0$ 当且仅当 $m+n\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 4)$。

证明： 已知直线 $l: y=\frac{n\sqrt{3}}{m}x+b$ 上含有点 $P_0\in D_0$，令直线 $l': y=\frac{n\sqrt{3}}{m}x$，则 $l'=l-P_0$，于是 $l=l'+P_0$，即直线 l 可由直线 l' 平移向量 OP_0 得到。由引理 2.4 可知，直线 l 与 l' 上 D-点的类型及分布情况一致，进而根据定理 3.13 立即得证。

定理 3.15： 设直线 $l: y=\frac{n\sqrt{3}}{m}x+b\ (b\neq 0)$，其中 $m,n\in\mathbb{Z}$, $\gcd(m,n)=1$。若 l 上含有 D_1-点 P_1，则有

(a) 直线 l 上仅含无穷多个 D_1-点当且仅当 $m+n\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 4)$。

(b) $N_l(D_1)=N_l(D_0)=\infty$，$N_l(D_2)=0$ 当且仅当 $m+n\equiv 2\ (\mathrm{mod}\ 4)$。

(c) $N_l(D_1)=N_l(D_2)=\infty$，$N_l(D_0)=0$ 当且仅当 $m+n\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 2)$。

证明： 已知直线 $l: y=\frac{n\sqrt{3}}{m}x+b$ 上含有点 $P_1\in D_1$，令直线 $l': y=\frac{n\sqrt{3}}{m}x$，则 $l'=l-P_1$，于是 $l=l'+P_1$，即直线 l 可由直线 l' 平移向量 OP_1 得到。因此，可根据 l' 上 D-点的类型及分布情况，利用引理 2.4 讨论 l 上 D-点的类型及分布情况。

(a) 由定理 3.13 可知 $N_{l'}(D_0)=N_{l'}(D_2)=\infty$，$N_{l'}(D_1)=0$ 当且仅当 $m+n\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 4)$，且此时 $N_{l'}(C)=0$，即 l' 上除了 D_0-点及 D_2-点以外，其它点均为非 T-点。由引理 2.4 可得，将直线 l' 平移至直线 l 后，l' 上的 D_0-点与 D_2-点分别变为 l 上的 D_1-点与 C-点，而 l' 上的其它点均变为 l 上的非 T-点，亦为非 D-点，于是直线 l 上仅含无穷多个 D_1-点。因此，直线 l 上仅含无穷多个 D_1-点当且仅当 $m+n\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 4)$。

(b) 由定理 3.13 可知 $N_{l'}(D_0)=N_{l'}(D_1)=\infty$，$N_{l'}(D_2)=0$ 当且仅当 $m+n\equiv 2\ (\mathrm{mod}\ 4)$，且此时 $N_{l'}(C)=0$，即 l' 上除了 D_0-点及 D_1-点以外，其它点均为非 T-点。由引理 2.4 可得，将 l' 平移至 l 后，l' 上的 D_0-点与 D_1-点分别变为 l 上的 D_1-点与 D_0-点，而 l' 上的其它点均变为 l 上的非 T-点，亦为非 D-点，于是 $N_l(D_1)=N_l(D_0)=\infty$ 且 $N_l(D_2)=0$。因此 $N_l(D_1)=N_l(D_0)=\infty$，$N_l(D_2)=0$ 当且仅当 $m+n\equiv 2\ (\mathrm{mod}\ 4)$。

(c) 由定理 3.13 可知直线 l' 上仅含无穷多个 D_0-点当且仅当 $m+n\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 2)$，且此时 $N_{l'}(C)=\infty$，即 l' 上除了 D_0-点及 C-点以外，其它点均为非 T-点。由引理 2.4 可得，将 l' 平移至 l 后，l' 上的 D_0-点与 C-点分别变为 l 上的 D_1-点与 D_2-点，而 l' 上的其它点均变为 l 上的非 T-点，亦为非 D-点，于是

$N_l(D_1)=N_l(D_2)=\infty$ 且 $N_l(D_0)=0$。因此 $N_l(D_1)=N_l(D_2)=\infty$，$N_l(D_0)=0$ 当且仅当 $m+n\equiv 1 \pmod 2$。

类似地可得下述定理：

定理 3.16： 设直线 $l: y=\frac{n\sqrt{3}}{m}x+b\ (b\neq 0)$，其中 $m,n\in\mathbb{Z}$，$\gcd(m,n)=1$。若 l 上含有 D_2-点，则有

(a) 直线 l 上仅含无穷多个 D_2-点当且仅当 $m+n\equiv 2 \pmod 4$。

(b) $N_l(D_2)=N_l(D_0)=\infty$，$N_l(D_1)=0$ 当且仅当 $m+n\equiv 0 \pmod 4$。

(c) $N_l(D_2)=N_l(D_1)=\infty$，$N_l(D_0)=0$ 当且仅当 $m+n\equiv 1 \pmod 2$。

4. $\theta\in[0,\pi)$ 方向上内部无 *D*-点的最宽路径

通过对于任意直线上所含 *D*-点数的讨论可知，存在不含 *D*-点的直线。因而，可进一步探究是否存在由两条平行线所界定的带形区域满足其内部不含 *D*-点，若存在那么进一步刻画其最大宽度。

定义 4.1： 设直线 l 与 l' 是平面内倾斜角为 $\theta(0\le\theta<\pi)$ 的两条平行直线，则称直线 l 与 l' 所夹的带形区域为 θ 方向上的路径，称直线 l 与 l' 间的垂直距离为该路径的宽度。

注 4.2： 在三角格 T 中，$\theta\in[0,\pi)$ 方向上内部不含 *T*-点的路径的最大宽度记为 $\mathcal{D}_\theta$。在铺砌 $\mathcal{F}$ 中，$\theta\in[0,\pi)$ 方向上内部不含 *D*-点的路径的最大宽度记为 d_θ。

根据铺砌 $\mathcal{F}$ 的特征，显然有：

定理 4.3： 当 $\theta=0$ 时，$d_\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$；当 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时，$d_\theta=\frac{1}{2}$。

当 $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 时，按 $\tan\theta$ 是否具有形式 $\lambda\sqrt{3}(\lambda\in\mathbb{Q})$ 可以分为两种情形讨论。首先考虑 $\tan\theta\neq\lambda\sqrt{3}(\lambda\in\mathbb{Q})$ 的情形，对于直线 $l: y=kx+b$，其中 $k\notin\left\{\lambda\sqrt{3}:\lambda\in\mathbb{Q}\right\}$，其至多含一个 *D*-点，下面考虑 l 附近的 *D*-点分布情况。

引理 4.4 [2]： 设 α 为任意的无理数，$r,\varepsilon\in\mathbb{R},\varepsilon>0$，则存在一对整数 (p_1,q_1) 满足不等式

$$r<p_1\alpha-q_1<r+\varepsilon. \tag{1}$$

类似地，存在另一对整数 (p_2,q_2) 满足不等式

$$r-\varepsilon<p_2\alpha-q_2<r. \tag{2}$$

定理 4.5： 设直线 $l: y=kx+b$，其中 $k\notin\left\{\lambda\sqrt{3}:\lambda\in\mathbb{Q}\right\}, b\in\mathbb{R}$，则对任意给定的 $\varepsilon\in\mathbb{R}$ 且 $\varepsilon>0$，在直线 l 的两侧均存在无穷多个 *D*-点到直线 l 的距离小于 ε。

证明： 令 $\alpha=\frac{\sqrt{3}}{k}$，$r=\frac{b}{2k}$。因为 $k\notin\left\{\lambda\sqrt{3}:\lambda\in\mathbb{Q}\right\}$，所以 α 为无理数，显然 $r\in\mathbb{R}$。下面根据 k 的取值分为两种情形。

情形 1： $k>0$

因为 $\varepsilon>0$，故存在 $\varepsilon_1\in\mathbb{R}$ 且满足 $0<\varepsilon_1<\varepsilon$。令 $\varepsilon_0=\frac{\varepsilon_1}{2k}>0$，由引理 4.4 可得，存在一对整数 (m_0,n_0) 满足 $r<m_0\alpha-n_0<r+\varepsilon_0$，即

$$0<m_0\frac{\sqrt{3}}{k}-n_0-\frac{b}{2k}<\frac{\varepsilon_1}{2k},$$

于是有

$$0<2m_0\sqrt{3}-(k\cdot 2n_0+b)<\varepsilon_1.$$

令点 $P_1=\left(2n_0,2m_0\sqrt{3}\right)$，易知点 $P_1\in D_0$。设 P_1 到 l 的垂直距离与竖直距离分别为 d_1 和 δ_1 (如图 3)，从而 $0<\delta_1=2m_0\sqrt{3}-\left(k\cdot 2n_0+b\right)<\varepsilon_1$，又由于 $0<d_1<\delta_1$，所以点 P_1 在 l 的上方且满足 $0<d_1<\varepsilon_1<\varepsilon$。

根据引理 4.4 可得，对于任意给定的实数 $\varepsilon>0$，均存在一对整数 (p,q) 满足不等式(1)。因此，对于任意给定的无穷递减序列 $\varepsilon>\varepsilon_1>\varepsilon_2>\cdots>0$，可以运用上述的构造方法，给出无穷多个 D-点 $P_1,P_2,P_3,\cdots$，满足每个 P_i 均在 l 的上方且到 l 的垂直距离 $d_i<\varepsilon_i<\varepsilon$。因此证得在 l 的上方存在无穷多个 D-点到 l 的距离小于 ε。

另一方面，若在上述证明过程中用引理 4.4 中的不等式(2)替换不等式(1)，则同理可得在 l 的下方存在无穷多个 D-点到 l 的距离小于 ε。

情形 2： $k<0$

由于 $0<\varepsilon_1<\varepsilon$，不妨令 $\varepsilon_0=-\dfrac{\varepsilon_1}{2k}>0$，根据情形 1 同理可证。

由上述定理分析可得，当 $\tan\theta\neq\lambda\sqrt{3}\ (\lambda\in\mathbb{Q})$ 时，对于 θ 方向上的直线 l 而言，在其两侧均存在无穷多个 D-点无限逼近 l，故此时 θ 方向上不存在内部不含 D-点的路径。

接下来考虑当 $\tan\theta=\lambda\sqrt{3}\left(\lambda\in\mathbb{Q}\backslash\{0\}\right)$ 时，θ 方向上内部不含 D-点的最宽路径。

引理 4.6： 设直线 $l:y=kx+b$，其中 $k\in\left\{\lambda\sqrt{3}:\lambda\in\mathbb{Q}\right\}$，若 l 上含有 C-点，则 $N_l(C)=\infty$ 且 $N_l(D)=\infty$。

证明： 不妨设直线 $l:y=kx+b$ 上含有 C-点 P，令直线 $l':y=kx$，则 $l'=l-P$，于是 $l=l'+P$，即直线 l 可由直线 l' 平移向量 OP 得到。由于 $k\in\left\{\lambda\sqrt{3}:\lambda\in\mathbb{Q}\right\}$，则根据定理 3.13 可得，$l'$ 含无穷多个 D_0-点，且含有无穷多个点 $Q_j\left(j=1,2,3,\cdots\right)$ 满足 $Q_j\in T\setminus D_0$。进而根据引理 2.4 可得，将直线 l' 平移至直线 l 后，l' 上的 D_0-点变为 l 上的 C-点且 l' 上的点 $Q_j\left(j=1,2,3,\cdots\right)$ 均变为 l 上的 D-点，由此可得 $N_l(C)=\infty$ 且 $N_l(D)=\infty$。

定理 4.7： 设直线 $l:y=kx+b$，其中 $k\in\left\{\lambda\sqrt{3}:\lambda\in\mathbb{Q}\right\}$，若直线 l 上含 T-点，则 l 上必含 D-点。

证明： 不妨设直线 l 上含点 $P\in T$，则点 $P\in D\cup C$。若点 $P\in D$，则结论显然成立；否则，点 $P\in C$，由引理 4.6 可得，此时直线 l 上含 D-点。因此直线 l 上必含 D-点。

引理 4.8 [5]： 在三角格 T 中，设 $\tan\theta=\dfrac{n\sqrt{3}}{m}$，其中 $m,n\in\mathbb{Z}$，$\gcd(m,n)=1$，$mn\neq 0$。若 m 和 n 均

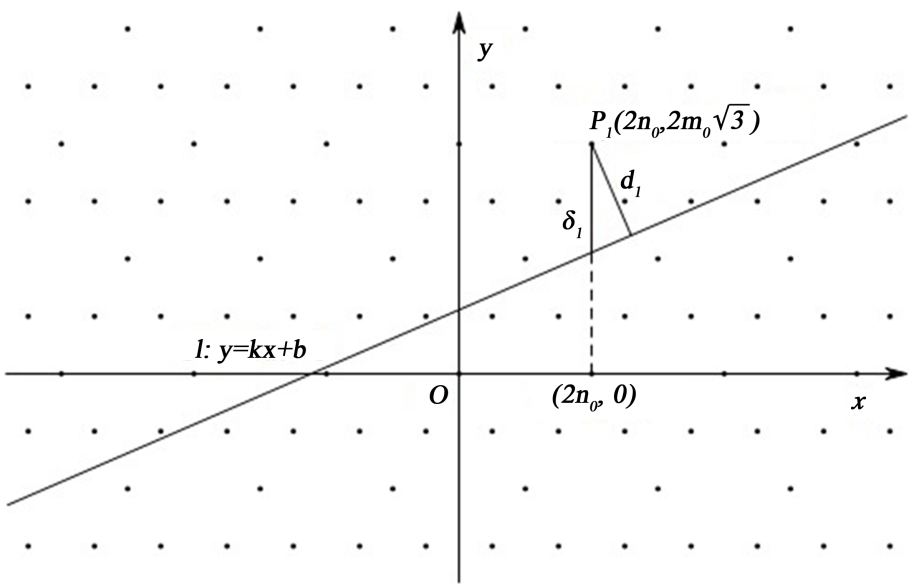

Figure 3. Constructing *D*-point
图 3. 构造 *D*-点

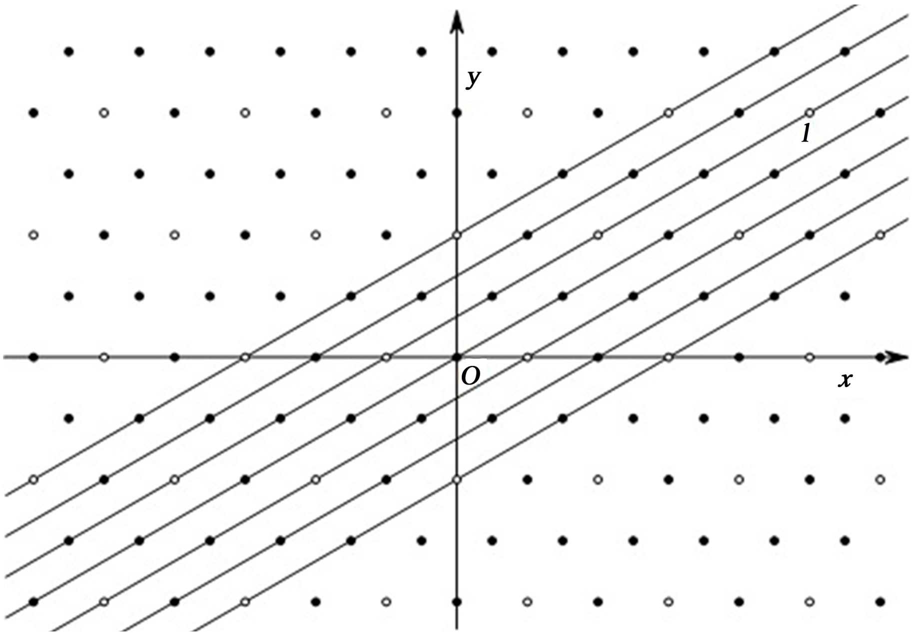

Figure 4. The broadest paths containing no *D*-points in their interiors
图 4. 内部无 *D*-点的最宽路径

为奇数，则 $\mathcal{D}_\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3n^2+m^2}}$；否则，$\mathcal{D}_\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3n^2+m^2}}$。

定理 4.9：在铺砌 $\mathcal{F}$ 中，设 $\tan\theta = \dfrac{n\sqrt{3}}{m}$，其中 $m,n \in \mathbb{Z}$，$\gcd(m,n)=1$，$mn \neq 0$，则 $d_\theta = \mathcal{D}_\theta$，即

$$d_\theta = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3n^2+m^2}}, & \text{若 } m,n \text{ 均为奇数} \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3n^2+m^2}}, & \text{若 } m,n \text{ 有一个为偶数} \end{cases}.$$

证明：在铺砌 $\mathcal{F}$ 中，对于任意斜率为 $\dfrac{n\sqrt{3}}{m}$ 的直线 l，由定理 4.7 可知，若直线 l 上含 T-点，则直线 l 上必含 D-点。因此，在铺砌 $\mathcal{F}$ 中，θ 方向上内部无 D-点的路径的最大宽度即为 θ 方向上内部无 T-点的路径的最大宽度(如图 4)，故 $d_\theta = \mathcal{D}_\theta$。由引理 4.8 可得，当 m 和 n 均为奇数时，$d_\theta = \mathcal{D}_\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3n^2+m^2}}$；当 m 和 n 有一个为偶数时，$d_\theta = \mathcal{D}_\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3n^2+m^2}}$。

参考文献 (References)

[1] Grünbaum, B. and Shephard, G.C. (1987) Tilings and Patterns. W. H. Freeman and Company, New York.

[2] Olds, C.D., Lax, A. and Davidoff, G.P. (2001) The Geometry of Numbers. The Mathematical Association of America, Washington.

[3] Cao, P. and Yuan, L. (2014) The Number of Lattice Points and *T*-Points on a Line in $\mathbb{R}^2$. *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, **38**, 21-25.

[4] 常之魁, 李英姿. 铺砌($3^3.4^2$)中直线上的 *D*-点数[J]. 数学杂志, 2013, 33(2): 359-362.

[5] 曹鹏浩. 关于 *H*-点相关问题的研究[D]: [硕士学位论文]. 石家庄: 河北师范大学, 2010.

知网检索的两种方式：

1. 打开知网页面 http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD
   下拉列表框选择：[ISSN]，输入期刊 ISSN：2324-7991，即可查询
2. 打开知网首页 http://cnki.net/
   左侧“国际文献总库”进入，输入文章标题，即可查询

投稿请点击：http://www.hanspub.org/Submission.aspx
期刊邮箱：aam@hanspub.org