Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2018, 7(6), 661-666
Published Online June 2018 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2018.76078

Hans汉斯

Strong Edge Coloring of Planar Graphs without Short Cycles

Heng Zhang

College of Mathematics, Physics and Information Engineering, Zhejiang Normal University, Jinhua Zhejiang
Email: 312731473@qq.com

Received: May 22nd, 2018; accepted: Jun. 7th, 2018; published: Jun. 14th, 2018

Abstract

A strong edge coloring of graph *G* is on the basis of the proper edge coloring and requiring any two edges at distance at most 2 receive distinct colors, the smallest integer of strong edge coloring called a figure of colors used strong edge chromatic number of *G*. In this paper, the configuration of the minimal counter example is given, and then the power transfer method is used to prove that the strong edge chromatic number of the plane graph is at most $3\Delta(G)+1$ if G has no *k*-cycle ($5 \le k \le 10$) and the 3-cycle and 4-cycle are non-intersect each other.

Keywords

Planar Graphs, Strong Edge Coloring, Strong Edge Chromatic Number, Cycle

不含短圈平面图的强边染色

张　恒

浙江师范大学数理与信息工程学院，浙江　金华
Email: 312731473@qq.com

收稿日期：2018年5月22日；录用日期：2018年6月7日；发布日期：2018年6月14日

摘　要

图*G*的强边染色是在正常边染色的基础上，要求距离不超过2的任意两条边染不同的颜色。强边染色所用颜色的最小整数称为图*G*的强边色数。文章首先给出极小反例的构型，然后通过权转移方法，证明了3-圈、4-圈互不相交且没有*k*-圈($5 \le k \le 10$)的平面图的强边色数至多是$3\Delta(G)+1$。

文章引用：张恒. 不含短圈平面图的强边染色[J]. 应用数学进展, 2018, 7(6): 661-666.
DOI: 10.12677/aam.2018.76078

关键词

平面图，强边染色，强边色数，圈

1. 引言

本文考虑的图都是简单无向图。对于一个平面图 G，把它顶点集、边集、面集、最大度分别记为 $V(G)$，$E(G)$，$F(G)$ 和 $\Delta(G)$，用 $d(v)$、$d(f)$ 分别表示顶点、面的度，如果顶点 v 的度等于 k (至少是 k 或至多是 k)，则称 v 是 k-点(k^+-点或 k^--点)。1-点又称悬挂点，k_l-点是指与 l 个 2-点相邻的 k-点，顶点 v 的一个 k-邻点指的是 $N(v)$ 中度为 k 的顶点。k-圈指的是长为 k 的圈，如果两个圈至少有一个公共顶点(或一条公共边)，则称它们是相交(或相邻的)。好 3-面指的是不关联 2-点的 3-面，坏 3-面指的是关联一个 2-点的 3-面。好 4-面指的是不关联 2-点的 4-面，弱 4-面是关联一个 2-点的 4-面，把一个关联两个不相邻 2-点的 4-面称为坏 4-面。$N_2(uv)$ 表示与边 uv 的距离不超过 2 的边构成的集合，给定图 G 的一个边染色 c，记 $SC(N_2(uv))=c(e)\,|\,e\in N_2(uv)$。

图 G 的强边染色(也称为 2-距离边染色)，是指对图 G 的边进行正常染色，使得长为 3 的路上的任意两条边染不同的颜色。强边染色所用颜色的最小整数称为图 G 的强边色数，记为 $\chi_s'(G)$。1985 年 Erdős [1] 等提出了强边染色猜想：

猜想 1 (Erdős, Nešet ř il)。设图 G 的最大度为 Δ，则

1) 若 Δ 为偶数，则 $\chi_s'(G)\le\frac{5}{4}\Delta^2$；

2) 若 Δ 为奇数，则 $\chi_s'(G)\le\frac{1}{4}(5\Delta^2-2\Delta+1)$。

当 $\Delta\le 2$ 时，猜想显然成立。Andersen [2]和 Horák [3]证明了当 $\Delta\le 3$ 时猜想成立。当 $\Delta=4$ 时，Cranston [4]等证明了 $\chi_s'(G)\le 22$。Molloy 和 Reed [5]证明了当 Δ 充分大时，强边染色的上界不超过 $1.998\Delta^2$。对于平面图强边染色的研究，始于 Faudree [6]等用四色定理和 Vizing’(s)定理证明了平面图的强边色数 $\chi_s'(G)\le 4\Delta+4$。当围长足够大时，文献[7] [8]证明了平面图的强边色数可以达到下界 $2\Delta-1$。2014 年，Hudák [9]等证明了 $g(G)\ge 6$ 的平面图 G 有 $\chi_s'(G)\le 3\Delta+5$，后来 Bensmail [10]等把该结果改进为当平面图 $g(G)\ge 6$ 时，$\chi_s'(G)\le 3\Delta+1$；当 $g(G)\ge 4$ 且 $\Delta\ge 5$ 时，$\chi_s'(G)\le 4\Delta$。孟献青在文献[11]证明了没有 k-圈($4\le k\le 10$)且 3-圈不相交的平面图有 $\chi_s'(G)\le 3\Delta+1$，本文推广了该结果，证明了没有 k-圈($5\le k\le 10$)且 3-圈、4-圈互不相交的平面图其强边色数 $\chi_s'(G)\le 3\Delta+1$。

2. 定理及其证明

定理 1　设最大度为 $\Delta(G)$ 的平面图 G 不包含 k-圈($5\le k\le 10$)且 3-圈、4-圈互不相交，则 G 的强边色数 $\chi_s'(G)\le 3\Delta+1$。

证明：当 $\Delta(G)\le 3$ 时，由文献[2] [3]，定理成立。下面只需证明 $\Delta(G)\ge 4$ 的情形。假设定理 1 结论不成立，则存在一个不包含 k-圈($5\le k\le 10$)且 3-圈、4-圈互不相交，但 $\chi_s'(G)>3\Delta+1$，使 $|V(G)|+|E(G)|$ 最小的平面图，由极小性知，G 为连通平面图，而对 G 的任何一个真子图 G' 是 $(3\Delta(G')+1)$-强边可染的，

同时 G 还具有以下性质。

2.1. 极小反例的性质

引理 1 [10] 设 v 是图 G 的一个顶点且 $d(v)=k$。

1) 若 $k=1$，则 1-点的邻点是 5^{+}-点；

2) 若 $k=2$，则 2-点的两个邻点不能同时是两个 3^{-}-点，或一个 3^{-}-点和一个 4_3-点，或一个 3^{-}-点和一个 4_3-点，或一个 4_2-点和一个 4_3-点；

3) 若 $k\ge 4$，则 v 至多与 $k-1$ 个 2^{-}-点相邻；

4) 若 $k\ge 5$，则 v 至多与 $k-3$ 个 1-点相邻；若 v 恰好与 $k-3$ 个 1-点相邻。则 v 不与其他的 2^{-}-点相邻；

5) 若 $k\ge 5$，且 v 相邻 α 个 1-点和 $k-2-\alpha$ 个 2-点，则 $0\le\alpha\le k-4$，且至多有 $k-4-\alpha$ 个 2-点的邻点是 3^{-}-点或 4_3-点；

6) 若 $k\ge 5$，且 v 相邻 $k-1$ 个 2^{-}-点，则这 $k-1$ 个 2^{-}-点都是 2-点，且这些 2-点的另一个邻点是不同于 4_3-点的 4^{+}-点。

引理 2 [11] 若 2-点 v 与 3-圈关联，则 v 的另两个邻点是 5^{+}-点。

引理 3 [11] 设 G 有一个 3-圈 $uvwu$，满足 $d(u)=2$，$d(w)\ge 5$，$d(v)=k\ge 5$，则

1) v 至多与 $k-2$ 个 2^{-}-点相邻；

2) 若 v 与 $k-4$ 个 1-点相邻，则 v 至多只有一个 2-邻点；

3) 若 v 与 α 个 1-点和 $k-2-\alpha$ 个 2-点相邻，则 $0\le\alpha\le k-5$，且至多有 $k-5-\alpha$ 个 2-点的邻点是 3^{-}-点或 4_3-点。

引理 4 [12] 4-面不能关联两个相邻的 2-点。

引理 5 [12] 设 v 与弱 4-面 f 关联，且 f 边界上的顶点按顺时针方向记为 u，w，z，v，满足 $d(u)=2$，$d(w)\ge 5$，$d(v)=k\ge 5$。若 v 与 α 个 1-点和 β 个 2-点相邻，则

1) $\alpha\le k-4$，且若 $\alpha=k-4$，则 $\beta=1$。

2) 若 $\alpha+\beta=k-2$，则 $0\le\alpha\le k-5$，且至多有 $\beta-2$ 个 2-点的邻点是 3^{-}-点或 4_3-点。

引理 6 [12] 设 v 与坏 4-面 f 关联，且 f 边界上的顶点按顺时针方向记为 u，w，z，v，满足 $d(u)=d(z)=2$，$d(w)\ge 3$，$d(v)=k\ge 5$。若 v 与 α 个 1-点和 β 个 2-点相邻，则

1) $\alpha+\beta\le k-1$，且 $\alpha\le k-5$；若 $\alpha=k-5$，则 $\beta=2$。

2) 若 $k\ge 6$，$\alpha+\beta=k-2$，则 $0\le\alpha\le k-6$，且至多有 $\beta-2$ 个 2-点的邻点是 3^{-}-点或 4_3-点。

2.2. 权转移规则

对连通平面图 G，由欧拉公式，有 $|V(G)|-|E(G)|+|F(G)|=2$ 及 $\sum_{v\in V(G)} d(v)=\sum_{f\in F(G)} d(f)=2|E(G)|$，可得：

$$\sum_{v\in V(G)}(2d(v)-6)+\sum_{f\in F(G)}(d(f)-6)=-12$$

对每一个 $x\in V(G)\cup F(G)$，定义其初始权值为 $ch(x)$。对任意 $v\in V(G)$，定义 $ch(v)=2d(v)-6$，而对于 $f\in F(G)$，$ch(f)=d(f)-6$，则 $\sum_{x\in V(G)\cup F(G)} ch(x)=-12<0$。下面定义权转移规则，重新分配顶点和面的权，使得对每个 $x\in V(G)\cup F(G)$，都有 $ch'(x)\ge 0$。由于只在顶点和面之间进行权转移，故权总和不变，从而 $0\le\sum_{x\in V(G)\cup F(G)} ch'(x)=\sum_{x\in V(G)\cup F(G)} ch(x)=-12<0$，矛盾。说明极小反例不存在，从而定理成立。

权转移规则如下：

R1 设 v 为 1-点，则

R1.1 每个与 v 相关联的面 f 给 v 转 2；

R1.2 每个与 v 相邻的 5^{+}-点给 v 转 2；

R2 设 v 为 2-点，$N(v)=u,w$，且 $d(u)\le d(w)$，则

R2.1 若 u 是 3^{-}-点，则 w 给 v 转 2；

R2.2 若 u 是 4_3-点，则 u 给 v 转 $\frac{2}{3}$，w 给 v 转 $\frac{3}{4}$；

R2.3 否则，u 和 w 分别给 v 转 1。

R3 若 f 为 3-面，则

R3.1 每个与 f 相邻的面 g 给 f 转权 1；

R3.2 每个 5^{+}-点给相关联的坏 3-面转 $\frac{1}{2}$。

R4 若 f 是 4-面，面 g 与 f 有 k 条公共边，则 g 给 f 转权 $\frac{k}{2}$。

下面验证新权 $ch'(x)\ge 0, x\in V(G)\cup F(G)$：

由 R1.1 知，每个面给相关联的 1-点转 2，而每增加一个悬挂点，面的度增加 2，故悬挂点不影响面的转权。所以在验证面的权时，不考虑面 f 上的悬挂点。

首先检验 $ch'(f)\ge 0, \forall f\in F(G)$。

设 f 为 3-面，$ch(f)=-3$。若 f 是好 3-面，由 R3.1，$ch'(f)=-3+3\times 1=0$；若 f 是坏 3-面，由引理 2，f 关联两个 5^{+}-点，由 R3.2，这两个 5^{+}-点给 f 转权 $2\times\frac{1}{2}$；再由 R3.1，与 f 相邻的面给 f 转权 1×2，因此 $ch'(f)=-3+2\times 1+2\times\frac{1}{2}=0$。

设 f 为 4-面，$ch(f)=-2$。当 f 为好 4-面，由 R4，$ch'(f)=-2+4\times\frac{1}{2}=0$。

设 f 为 k-面($k\ge 11$)，则 $ch(f)=k-6$。由于 3-圈、4-圈之间互不相交，再由引理 4，与 4-面关联的 2 个 2-点不相邻，故 f 至多与 $\left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor$ 个 3-面、4-面关联，由 R3，R4 易知 $ch'(f)\ge k-6-\left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor\times 1\ge 0$。

下面再验证 $ch'(v)\ge 0, \forall v\in V(G)$。

情况 1：v 为 1-点，则 $ch(v)=-4$。由引理 1(1)知，1-点的邻点是 5^{+}-点，故由 R1，$ch'(v)=-4+2+2=0$。

情况 2：v 为 2-点，则 $ch(v)=-2$。由 R2，$ch'(v)=-2+\min\left\{2,\frac{2}{3}+\frac{4}{3},1+1\right\}=0$

情况 3：v 为 3-点，根据转权规则，3-点权值没有改变，所以 $ch'(v)=ch(v)=0$。

情况 4：v 为 4-点，则 $ch(v)=2$。由引理 1(1)，引理 1(3)，v 无 1-邻点且至多有 3 个 2-邻点。

若 v 是 4_0-点或 4_1-点，由 R2，$ch'(v)\ge 2-1\times\max\left\{1,2,\frac{3}{4}\right\}=0$；

若 v 是 4_2-点，设 v 的 2 个 2-邻点是 x，y，由引理 1(2)可知 x 和 y 除 v 点外的邻点是不同于 4_3-点的 4^{+}-点，故由 R2.3，$ch'(v)\ge 2-2\times 1=0$；

若 v 是 4_3-点，设 v 的 3 个 2-邻点是 x，y，z，由引理 1(2)可知 x，y 和 z 除 v 点外的邻点是 4_1-点或 5^{+}-点，故由 R2.2，$ch'(v)=2-3\times\frac{2}{3}=0$。

情况 5：v 为 k-点($k \ge 5$)，则 $ch(v) = 2k - 6$。分两种情况讨论：

1) v 不与坏 3-面关联。

由引理 1(3)，v 至多与 $k-1$ 个 2^--点相邻。

① 若 v 恰与 $k-1$ 个 2^--点相邻，由引理 1(6)，v 的 $k-1$ 个 2^--点都是 2-点，且 2-点的邻点是不同于 4_3-点的 4^+-点，由 R2.3，$ch'(f) \ge 2k - 6 - (k-1) \times 1 = k - 5 \ge 0$。

② 若 v 恰与 $k-2$ 个 2^--点邻，设有 α 个 1-邻点，由引理 1(5)，引理 5(2)，引理 6(2)知，v 的 $k-2-\alpha$ 个 2-邻点中至多有 $k-4-\alpha$ 个 2-点与 3^--点或 4_3-点相邻，即 v 至少有 2 个 2-邻点除 v 点外的另一个邻点不是 3^--点、4_3-点，此时由 R1.2，R2.1，R2.3，有 $ch'(f) \ge 2k - 6 - \alpha \times 2 - (k - 4 - \alpha) \times 2 - 2 \times 1 = 0$。

③ 若 v 至多与 $k-3$ 个 2^--点相邻，设有 α 个 1-邻点，β 个 2-邻点，则由引理 1(4)，引理 5(1)，引理 6(1)知，仅当 $\alpha = k-3$，$\beta = 0$；或 $\alpha = k-4$，$\beta = 1$；或 $\alpha = k-5$，$\beta = 2$ 且 v 的 2-邻点除 v 外的另一个邻点是 3^--点时，顶点 v 转出的权最大，由 R1.2，R2.1，$ch'(f) \ge 2k - 6 - (k-3) \times 2 = 0$。

2) v 与坏 3-面 $vuwv$ 关联 $(d(u) = 2)$。

由引理 2，v 与 w 均为 5^+-点。由引理 3(1)，v 至多与 $k-2$ 个 2^--点相邻。

① 若 v 至多与 $k-3$ 个 2^--点相邻。由 R2.3，v 给 u 转权 1，再由 R1.2，R3.2 知

$$ch'(v) \ge 2k - 6 - (k-4) \times 2 - 1 \times 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} > 0。$$

② 若 v 恰与 $k-2$ 个 2^--点相邻，且 v 有 α 个 1-邻点，由引理 3(3)，$\alpha \le k-5$ 且 v 的 $k-2-\alpha$ 个 2-邻点中至多有 $k-5-\alpha$ 个 2-点与 3^--点或 4_3-点相邻，根据 R1.2，

R2，R3.2 知，$ch'(f) \ge 2k - 6 - \alpha \times 2 - (k - 5 - \alpha) \times 2 - 3 \times 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} > 0$。

综合以上各种情况，我们验证了对任意的 $x \in V(G) \cup F(G)$，都有 $ch'(x) \ge 0$，从而得到如下矛盾的式子：

$$0 \le \sum_{x \in V(G) \cup F(G)} ch'(x) = \sum_{x \in V(G) \cup F(G)} ch(x) = -12.$$

上面的这个矛盾说明 G 不存在，从而完成了定理 1 的证明。

参考文献

[1] Erdős, P. (1988) Problems and Results in Combinatorial Analysis and Graph Theory. *Annals of Discrete Mathematics*, **38**, 81-92. https://doi.org/10.1016/S0167-5060(08)70773-8

[2] Andersen, I.D. (1992) The Strong Chromatic Index of a Cubic Graph Is at Most 10. *Discrete Mathematics*, **108**, 231-252. https://doi.org/10.1016/0012-365X(92)90678-9

[3] Horák, P., Qing, H. and Trotter, W.T. (1993) Induced Matchings in Cubic Graphs. *Journal of Graph Theory*, **17**, 151-160. https://doi.org/10.1002/jgt.3190170204

[4] Cranston, D. (2006) Strong Edge-Coloring Graphs with Maximum Degree 4 Using 22 Colors. *Discrete Mathematics*, **306**, 2772-2778. https://doi.org/10.1016/j.disc.2006.03.053

[5] Molloy, M. and Reed, B. (1997) A Bound on the Strong Chromatic Index of a Graph. *Journal of Combinatorial Theory B*, **69**, 103-109. https://doi.org/10.1006/jctb.1997.1724

[6] Faudree, R.J., Gyárfas, A., Schelp, R.H., *et al.* (1990) The Strong Chromatic Index of Graph. *Ars Combinatoria*, **29B**, 205-211.

[7] Borodin, O.V. and Ivanova, A.O. (2013) Precise Upper Bound for the Strong Edge Chromatic Number of Sparse Planar Graphs. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, **33**, 759-770. https://doi.org/10.7151/dmgt.1708

[8] Montassier, M., Pêcher, A. and Raspaud, A. (2013) Strong Chromatic Index of Planar Graphs with Large Girth. *The Seventh European Conference on Combinatorics*, *Graph Theory and Application*, *CRM Series*, **16**, 265-270.

[9] Hudák, D., Lužar, B., Soták, R., *et al.* (2014) Strong Edge-Coloring of Planar Graph. *Discrete Mathematics*, **324**, 41-49. https://doi.org/10.1016/j.disc.2014.02.002

[10] Bensmail, J., Harutyunyan, A., Hocquard, H. and Valicov, P. (2014) Strong Edge-Coloring of Sparse Planar Graphs. *Discrete Applied Mathematics*, **179**, 229-234. https://doi.org/10.1016/j.dam.2014.07.006

[11] 孟献青. 一类平面图的强边染色[J]. 山东大学学报(理学版), 2015, 8(50): 10-13.

[12] 孟献青. 没有短圈的平面图的强边染色[J]. 南开大学学报(自然科学版), 2015, 6(48): 1-5.