Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2019, 8(10), 1625-1631**
Published Online October 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2019.810191

Hans汉斯

Classification and Stability Analysis of Equilibrium Points in a Leslie Predator-Prey System with Generalized Holling Type III Functional Response

Chenrong Pan, Songlin Chen

School of Mathematical Science and Engineering, Anhui University of Technology, Ma'anshan Anhui
Email: 1750315536@qq.com

Received: Oct. 1st, 2019; accepted: Oct. 17th, 2019; published: Oct. 24th, 2019

Abstract

In this paper, we consider a Leslie predator-prey system with Holling type III functional response. We construct a suitable variable transformation for the original system, and then obtain an equivalent system. By investigating the classification and stability of the equilibrium points of the equivalent system, we derive the results on the classification and stability of the equilibrium points of the original system.

Keywords

Leslie Predator-Prey System, Variable Transformation, Equilibrium Point, Stability

具有广义Holling III型功能反应的Leslie捕食–食饵系统的平衡点分类和稳定性分析

潘陈蓉，陈松林

安徽工业大学，数理科学与工程学院，安徽 马鞍山
Email: 1750315536@qq.com

收稿日期：2019年10月1日；录用日期：2019年10月17日；发布日期：2019年10月24日

文章引用: 潘陈蓉, 陈松林. 具有广义 Holling III 型功能反应的 Leslie 捕食–食饵系统的平衡点分类和稳定性分析[J]. 应用数学进展, 2019, 8(10): 1625-1631. DOI: 10.12677/aam.2019.810191

摘　要

在本文中，我们考虑一个具有Holling III型功能反应的Leslie型捕食－食饵系统。我们通过对原系统构造合适的变量变换，将其化为一个等价的系统。通过对等价系统的平衡点分类和稳定性进行分析，我们得出了原系统的平衡点分类和稳定性结果。

关键词

Leslie型捕食者－食饵系统，变量变换，平衡点，稳定性

1. 引言

考虑如下具有功能反应的 Leslie 捕食－食饵系统[1]：

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = rx\left(1-\dfrac{x}{K}\right) - yp(x), \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = sy\left(1-\dfrac{y}{hx}\right). \end{cases} \tag{1}$$

其中，x, y 分别表示食饵种群和捕食者种群的密度；$r, s > 0$，分别表示食饵和捕食者的内在增长率；$K > 0$，表示食饵的环境承载力；$h > 0$，$\dfrac{1}{h}$ 是支撑一个捕食者所需的食饵数量。根据生态系统的意义，我们在区域 $G = \{(x, y) \mid x > 0, y \geq 0\}$ 上讨论[2]。

近几年来，Ali Atabaigi 等研究了由 Holling IV 型或 Monod-Haldane 功能反应产生的 Leslie 型捕食者－食饵系统的平衡点的类型和稳定性[3]。黄秀琴研究了一般形式的捕食－食饵模型的平衡点的类型和稳定性[4]。本文受其启发，研究由广义 Holling III 型功能性反应 $p(x) = \dfrac{mx^2}{ax^2 + bx + 1}$ 产生的 Leslie 型捕食者－食饵系统：

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = rx\left(1-\dfrac{x}{K}\right) - \dfrac{mx^2 y}{ax^2 + bx + 1}, \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = sy\left(1-\dfrac{y}{hx}\right). \end{cases} \tag{2}$$

$p(x)$ 是捕食者的摄取率作为食饵密度的函数[5]。其中，$b > -2\sqrt{a}, a > 0, m > 0$，对所有的 $x \geq 0$，使得 $ax^2 + bx + 1 > 0$，因此，对所有的 $x > 0$，$p(x) > 0$。

对系统(2)作变换：

$$\bar{t} = rt, \bar{x} = \frac{x}{K}, \bar{y} = \frac{mKy}{r}, \bar{a} = aK^2, \bar{b} = bK, \delta = \frac{s}{r}, \beta = \frac{s}{hmK^2}. \tag{3}$$

将 $\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}, \bar{a}, \bar{b}$ 仍记为 x, y, t, a, b，则系统(1)可以化为其等价系统：

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x(1-x) - \dfrac{x^2 y}{ax^2+bx+1}, \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = y\left(\delta - \dfrac{\beta y}{x}\right). \end{cases} \tag{4}$$

2. 系统的平衡点分析

对于任意的参数，系统(4)总是存在一个边界平衡点 $E_0=(1,0)$，并且 E_0 是一个双曲鞍点。这个边界平衡点的生态学解释是：当缺乏捕食者时，食饵种群达到它的环境承载能力[6]。平衡点 E_0 将 x 轴正轴分成两个部分，这两个部分是 E_0 的两个稳定流形，并且在 G 的内部，存在 E_0 的唯一不稳定流形。

不失一般性，假设点 $E_1=(\bar{x},\bar{y})$ 是系统(4)的任意正平衡点，则 $\bar{x}$ 是方程

$$a\bar{x}^3 + \left(\frac{\delta}{\beta}+b-a\right)\bar{x}^2 + (1-b)\bar{x} - 1 = 0 \tag{5}$$

在区间 $(0,1)$ 上的根。由于系统(4)的正平衡点个数由方程(5)在区间 $(0,1)$ 上的根的个数决定，并且我们注意到，方程(5)在区间 $(0,1)$ 上可能有一个、两个或三个正根，则系统(4)在区间 $(0,1)$ 上可能有一个、两个或三个正平衡点。系统(4)在正平衡点 $E_1=(\bar{x},\bar{y})$ 处的雅可比矩阵为

$$J(E_1) = \begin{bmatrix} 1-2\bar{x} - \dfrac{(b\bar{x}^2+2\bar{x})\bar{y}}{(a\bar{x}^2+b\bar{x}+1)^2} & \dfrac{-\bar{x}^2}{a\bar{x}^2+b\bar{x}+1} \\ \dfrac{\beta\bar{y}^2}{\bar{x}^2} & \delta - \dfrac{2\beta\bar{y}}{\bar{x}} \end{bmatrix}, \tag{6}$$

并且雅可比矩阵的行列式和迹分别为

$$Det(J(E_1)) = \left(\delta - \frac{2\beta\bar{y}}{\bar{x}}\right)\left(1-2\bar{x} - \frac{\delta(b\bar{x}^3+2\bar{x}^2)}{\beta(a\bar{x}^2+b\bar{x}+1)^2}\right) + \frac{\beta\bar{y}^2}{a\bar{x}^2+b\bar{x}+1}, \tag{7}$$

$$Tr(J(E_1)) = 1-2\bar{x} - \frac{(b\bar{x}^2+2x)\bar{y}}{(a\bar{x}^2+b\bar{x}+1)^2} + \delta - \frac{2\beta\bar{y}}{\bar{x}}. \tag{8}$$

当 $Det(J(E_1))=0$ 时， $E_1(\bar{x},\bar{y})$ 是一个退化平衡点；当 $Det(J(E_1))\neq 0$ 时， $E_1(\bar{x},\bar{y})$ 是一个基本的平衡点；当 $Det(J(E_1))<0$ 时， $E_1(\bar{x},\bar{y})$ 是一个双曲鞍点。

3. 主要结论及证明

类似于参考文献[7]，考虑系统(4)的平衡点个数，我们能够得到下面的结论。

引理 1：令 $\Delta_0=\left(\dfrac{\delta}{\beta}+b-a\right)^2+3a(b-1)$， $\Delta_1=-4\Delta_0^3+\left(27a^2+9a(1-b)\left(\dfrac{\delta}{\beta}+b-a\right)-2\left(\dfrac{\delta}{\beta}+b-a\right)^3\right)^2$。

1) 如果 $\Delta_1>0$，则系统(4)有一个唯一的正平衡点 $E^*=(x^*,y^*)$，它是一个基本的平衡点，并且是一个反鞍点；

2) 如果 $\Delta_1=0$，并且

2.1) $\Delta_0>0$，系统(4)有两个正平衡点：一个是基本的反鞍平衡点

$E_2^*(x_2^*,y_2^*)=\left(\dfrac{\beta\delta}{\beta\delta+(1-\delta)^2},\dfrac{\delta^2}{\beta\delta+(1-\delta)^2}\right)$，另一个是退化平衡点 $E^*(x^*,y^*)=\left(1-\delta,\dfrac{\delta}{\beta}(1-\delta)\right)$；

2.2) $\Delta_0=0$，则系统(4)有唯一的正平衡点 $E^*\left(x^*,y^*\right)=\left(\frac{3}{1-b},\frac{\delta}{\beta}\frac{3}{1-b}\right)$，它是一个退化平衡点；

3) 如果 $\Delta_0<0$，$\frac{\delta}{\beta}\le a-b-\sqrt{3a(1-b)}$ 和 $-2\sqrt{a}<b<1$，则系统(4)有三个正平衡点 $E_1^*\left(x_1^*,y_1^*\right)$，$E_2^*\left(x_2^*,y_2^*\right)$，和 $E_3^*\left(x_3^*,y_3^*\right)$，它们都是基本的平衡点，并且 $E_3^*\left(x_3^*,y_3^*\right)$ 是一个鞍点。

引理 1 的证明： 对于引理中的情形 1)，唯一的正平衡点的稳定性容易证明。本文只证明引理中的情形 2.1)。

首先寻找一些参数，使得系统(4)有一个非双曲平衡点 $E_2^*\left(x_2^*,y_2^*\right)$，且 $Det\left(J\left(E_2^*\right)\right)>0,Tr\left(J\left(E_2^*\right)\right)=0$，和一个退化平衡点 $E^*\left(x^*,y^*\right)$，且 $Det\left(J\left(E^*\right)\right)=0,Tr\left(J\left(E^*\right)\right)=0$。

我们能够验证，如果 $Det\left(J\left(E^*\right)\right)=0,Tr\left(J\left(E^*\right)\right)=0$，则

$$x^*=1-\delta,\ y^*=\frac{\delta}{\beta}(1-\delta),\ a=\frac{(\delta-1)^2+\beta\delta}{\beta\delta(1-\delta)^2},\ b=\frac{(\delta-1)^3-2\beta\delta}{\beta\delta(1-\delta)}. \tag{9}$$

其中，$0<\delta<1$，如果 $a=\frac{(\delta-1)^2+\beta\delta}{\beta\delta(1-\delta)^2}$，$b=\frac{(\delta-1)^3-2\beta\delta}{\beta\delta(1-\delta)}$，$0<\delta<1$，则系统(4)可以简化为其等价系统。

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x(1-x)-\dfrac{x^2y}{\dfrac{(\delta-1)^2+\beta\delta}{\beta\delta(1-\delta)^2}x^2+\dfrac{(\delta-1)^3-2\beta\delta}{\beta\delta(1-\delta)}x+1},\\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=y\left(\delta-\dfrac{\beta y}{x}\right).\end{cases} \tag{10}$$

解得系统(10)有两个正平衡点 $E_2^*\left(x_2^*,y_2^*\right)=\left(\frac{\beta\delta}{\beta\delta+(1-\delta)^2},\frac{\delta^2}{\beta\delta+(1-\delta)^2}\right)$，

$E^*\left(x^*,y^*\right)=\left(1-\delta,\frac{\delta}{\beta}(1-\delta)\right)$。

定理 1： 如果 $(a,b,\beta)=\left(\frac{1+\delta^2}{(1-\delta)^3},-\frac{\delta^2+\delta+2}{1-\delta},\frac{(1-\delta)^3}{\delta^2(1+\delta)}\right)$，且 $0<\delta<1$，则系统(4)有两个正平衡点：

a) $E_2^*\left(x_2^*,y_2^*\right)=\left(\frac{1-\delta}{1+\delta^2},\frac{\delta^3(1+\delta)}{(1-\delta)^2\left(1+\delta^2\right)}\right)$ 是一个多重数为 1 的不稳定多重焦点；

b) $E^*\left(x^*,y^*\right)=\left(1-\delta,\frac{\delta^3(1+\delta)}{(1-\delta)^2}\right)$ 是一个余维为 2 的尖点。

定理 1 的证明： 如果 $(a,b,\beta)=\left(\frac{1+\delta^2}{(1-\delta)^3},-\frac{\delta^2+\delta+2}{1-\delta},\frac{(1-\delta)^3}{\delta^2(1+\delta)}\right)$，且 $0<\delta<1$，则系统(4)化为等价系统。

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x(1-x)-\dfrac{x^2y}{\dfrac{1+\delta^2}{(1-\delta)^3}x^2-\dfrac{\delta^2+\delta+2}{1-\delta}x+1},\\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=y\left(\delta-\dfrac{(1-\delta)^3}{\delta^2(1+\delta)}\dfrac{y}{x}\right).\end{cases} \tag{11}$$

系统(10)有两个正平衡点 $E_2^*\left(x_2^*,y_2^*\right)=\left(\frac{1-\delta}{1+\delta^2},\frac{\delta^3\left(1+\delta\right)}{\left(1-\delta\right)^2\left(1+\delta^2\right)}\right)$ 和 $E^*\left(x^*,y^*\right)=\left(1-\delta,\frac{\delta^3\left(1+\delta\right)}{\left(1-\delta\right)^2}\right)$。

a) 令 $u=x-\frac{1-\delta}{1+\delta^2},v=y-\frac{\delta^3\left(1+\delta\right)}{\left(1-\delta\right)^2\left(1+\delta^2\right)}$，将点 $E_2^*\left(x_2^*,y_2^*\right)$ 转化为原点，系统(11)围绕原点的泰勒展开形式为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=&\delta u-\frac{\left(1-\delta\right)^3}{\delta^2\left(1+\delta^2\right)}v+\left(1+\delta+\delta^3\right)u^2+\frac{\left(1-\delta\right)^4}{\delta^3}uv+\frac{\left(1+\delta\right)\left(1+\delta^2\right)\left(1+\delta-\delta^2+3\delta^3-\delta^4+\delta^5\right)}{\left(-1+\delta\right)\delta^2}u^3\\&+\frac{\left(1-\delta\right)^2\left(2-\delta+3\delta^2-\delta^3+\delta^4\right)}{\delta^3}u^2v+\mathrm{O}\left(\left|u,v\right|^4\right)\end{aligned}\tag{12}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=&\frac{\delta^4\left(1+\delta\right)}{\left(1-\delta\right)^3}u-\delta v-\frac{\delta^4\left(1+\delta\right)\left(1+\delta^2\right)}{\left(1-\delta\right)^4}u^2+\frac{2\delta\left(1+\delta^2\right)}{1-\delta}uv-\frac{\left(1-\delta\right)^2\left(1+\delta^2\right)}{\delta^2\left(1+\delta\right)}v^2+\frac{\delta^4\left(1+\delta\right)\left(1+\delta^2\right)^2}{\left(1-\delta\right)^5}u^3\\&-\frac{2\delta\left(1+\delta^2\right)^2}{\left(1-\delta\right)^2}u^2v+\frac{\left(1-\delta\right)\left(1+\delta^2\right)^2}{\delta^2\left(1+\delta\right)}uv^2+\mathrm{O}\left(\left|u,v\right|^4\right)\end{aligned}\tag{13}$$

对(12)和(13)作变换：

$$u=\sqrt{\frac{\left(1-\delta\right)^7}{\delta^5\left(1+\delta^2\right)^2\left(1+\delta^2\right)}}x+\frac{\left(1-\delta\right)^3}{\delta^3\left(1+\delta\right)}y,\ v=y.\tag{14}$$

则系统(12)和(13)可以化为其等价系统

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-\sqrt{\frac{\delta^3\left(1-\delta\right)}{1+\delta^2}}y+f\left(x,y\right),\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\sqrt{\frac{\delta^3\left(1-\delta\right)}{1+\delta^2}}x+g\left(x,y\right).\end{cases}\tag{15}$$

其中，

$$\begin{aligned}f\left(x,y\right)=&\frac{\sqrt{\left(1-\delta\right)^7}\sqrt{\delta^5\left(1+\delta\right)^2\left(1+\delta^2\right)}\left(-1-\delta+\delta^2-2\delta^3+\delta^4\right)}{\delta^5\left(-1-\delta+\delta^4+\delta^5\right)}x^2+\frac{\left(1-\delta\right)^3\left(3+2\delta-\delta^2+2\delta^3\right)}{\delta^3\left(1+\delta\right)}xy\\&+\frac{\sqrt{\delta^5\left(1+\delta\right)^2\left(1+\delta^2\right)}\left(1-\delta\right)^6\left(2+\delta-\delta^2+\delta^3\right)}{\sqrt{\left(1-\delta\right)^7}\delta^6\left(1+\delta\right)^2}y^2+\frac{\left(1-\delta\right)^5\left(-1-\delta+2\delta^2-3\delta^3+\delta^5-\delta^6+\delta^7\right)}{\delta^7\left(1+\delta\right)^2}x^3\\&+\frac{\sqrt{\delta^5\left(1+\delta\right)^2\left(1+\delta^2\right)}\left(1-\delta\right)\left(-3-3\delta+8\delta^2-8\delta^3-\delta^4+6\delta^5-4\delta^6+3\delta^7\right)}{\delta^{10}\left(1+\delta\right)^3}\\&-\frac{\left(1-\delta\right)^5\left(3+3\delta-4\delta^2+14\delta^3-12\delta^4+14\delta^5-5\delta^6+3\delta^7\right)}{\delta^8\left(1+\delta\right)}xy^2\\&-\frac{\sqrt{\left(1-\delta\right)^7}\left(1-\delta\right)\left(1+\delta^2\right)^2\left(1+\delta-3\delta^2+4\delta^3-2\delta^4+\delta^5\right)}{\delta^6\sqrt{\delta^5\left(1+\delta\right)^2\left(1+\delta^2\right)}}y^3+\mathrm{O}\left(\left|x,y\right|^4\right)\end{aligned}\tag{16}$$

$$g(x,y)=-\frac{(1-\delta)^3}{\delta(1+\delta)}x^2+\frac{(-1+\delta)^2\sqrt{(1-\delta)^7}\sqrt{\delta^5(1+\delta)^2(1+\delta^2)}}{\delta^6(1+\delta)^3}x^3+\frac{(1-\delta)^5(1+\delta^2)}{\delta^4(1+\delta)^2}x^2y+\mathrm{O}\left(\left|x,y\right|^4\right) \tag{17}$$

Liapunov 常数[8] [9]为

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}c_1&=\frac{1}{16}\Big\{\left(f_{xxx}+f_{xyy}+g_{xxy}+g_{yyy}\right)\\&+\frac{1}{\omega}\left[f_{xy}\left(f_{xx}+f_{yy}\right)-g_{xy}\left(g_{xx}+g_{yy}\right)-f_{xx}g_{xx}+f_{yy}g_{yy}\right]\Big\}\Big|_{x=y=0}\\&=\frac{(-1+\delta)^2\left(-3+2\delta-8\delta^2+\delta^3-\delta^5+\delta^6\right)}{8\delta^8(1+\delta)}>0\end{aligned} \tag{18}$$

其中，$\omega=\frac{\delta^3(1-\delta)}{14\pi(1+\delta^2)}$，由于 $0<\delta<1$，则 $E_2^*\left(x_2^*,y_2^*\right)=\left(\frac{1-\delta}{1+\delta^2},\frac{\delta^3(1+\delta)}{(1-\delta)^2(1+\delta^2)}\right)$ 是一个多重数为 1 的不稳定多重焦点。

b) 作变换：

$$x_1=x-(1-\delta),\ x_2=y-\frac{\delta^3(1+\delta)}{(1-\delta)^2}. \tag{19}$$

则系统(15)简化为其等价系统

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=\delta x_1+\dfrac{(-1+\delta)^3}{\delta^2(1+\delta)}x_2-\dfrac{2+\delta}{1+\delta}x_1^2+\dfrac{(1-\delta)^3}{\delta^3(1+\delta)}x_1x_2+\mathrm{O}\left(\left|x_1,x_2\right|^3\right),\\[2ex]\dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\delta^4(1+\delta)}{(1-\delta)^3}x_1-\delta x_2-\dfrac{\delta^4(1+\delta)}{(1-\delta)^4}x_1^2+\dfrac{2\delta}{1-\delta}x_1x_2-\dfrac{(1-\delta)^2}{\delta^2(1+\delta)}x_2^2+\mathrm{O}\left(\left|x_1,x_2\right|^3\right).\end{cases} \tag{20}$$

作变换：

$$y_1=x_1,\ y_2=\delta x_1+\frac{(-1+\delta)^3}{\delta^2(1+\delta)}x_2. \tag{21}$$

则系统(20)可以化为等价系统

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t}=y_2-\dfrac{1}{1+\delta}y_1^2-\dfrac{1}{\delta}y_1y_2+\mathrm{O}\left(\left|y_1,y_2\right|^3\right),\\[2ex]\dfrac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{\delta}{1+\delta}y_1^2-y_1y_2+\dfrac{1}{1-\delta}y_2^2+\mathrm{O}\left(\left|y_1,y_2\right|^3\right).\end{cases} \tag{22}$$

在原点 $(0,0)$ 的一个小邻域内作变换：

$$z_1=y_1-\frac{2\delta-1}{2\delta(1-\delta)}y_1^2,\ z_2=y_2-\frac{1}{1+\delta}y_1^2-\frac{1}{1-\delta}y_1y_2. \tag{23}$$

则系统(22)可以化为等价系统

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}z_1}{\mathrm{d}t}=z_2+\mathrm{O}\left(\left|z_1,z_2\right|^3\right),\\[2ex]\dfrac{\mathrm{d}z_2}{\mathrm{d}t}=\mu_1z_1^2+\mu_2z_1z_2+\mathrm{O}\left(\left|z_1,z_2\right|^3\right).\end{cases} \tag{24}$$

其中，$\mu_1=\dfrac{-\delta}{1+\delta},\mu_2=-\dfrac{\delta+3}{1+\delta}$，因为 $\mu_1\mu_2=\dfrac{\delta(\delta+3)}{(1+\delta)^2}\neq 0$，所以平衡点 $E^*(x^*,y^*)$ 是一个余维为 2 的尖点。定理得证，从而引理中的 2.1)得证，即 $\Delta_0>0$ 时，系统(4)有两个不同的正平衡点：一个是基本的反鞍平衡点 $E_2^*(x_2^*,y_2^*)=\left(\dfrac{\beta\delta}{\beta\delta+(1-\delta)^2},\dfrac{\delta^2}{\beta\delta+(1-\delta)^2}\right)$，另一个是退化平衡点 $E^*(x^*,y^*)=\left(1-\delta,\dfrac{\delta}{\beta}(1-\delta)\right)$。

致　谢

感谢审稿老师及编辑老师提出的宝贵意见。

参考文献

[1] Huang, J.C., Ruan, S.G. and Song, J. (2014) Bifurcations in a Predator-Prey System of Leslie Type with Generalized Holling Type III Functional Response. *Journal of Differential Equations*, **257**, 1721-1752. https://doi.org/10.1016/j.jde.2014.04.024

[2] 卜令杰, 窦霁虹, 刘萌萌, 邢伟. 一类三次系统极限环的存在唯一性[J]. 延安大学学报(自然科学版), 2014, 33(2): 1-5.

[3] Atabaigi, A. and Barati, A. (2017) Relaxation Oscillations and Canard Explosion in a Predator-Prey System of Holling and Leslie Types. *Nonlinear Analysis*: *Real World Applications*, **36**, 139-153. https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2017.01.006

[4] 黄秀琴. 一类 Kolmogorov 系统的极限环存在性与唯一性[J]. 南京晓庄学院学报, 2003(4): 63-66.

[5] Dai, Y.F., Zhao, Y.L. and Sang, B. (2019) Four Limit Cycles in a Predator-Prey System of Leslie Type with Generalized Holling Type III Functional Response. *Nonlinear Analysis*: *Real World Applications*, **50**, 218-239. https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2019.04.003

[6] 林园, 高瑾. Lotka-Volterra 竞争扩散系统连接边界平衡点和正平衡点行波解的存在性[J]. 教育教学论坛, 2019(27): 95-98.

[7] Li, Y.L. and Xiao, D.M. (2007) Bifurcations of a Predator-Prey System of Holling and Leslie Types. *Chaos*, *Solitons and Fractals*: *Applications in Science and Engineering*: *An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, **34**, 606-620. https://doi.org/10.1016/j.chaos.2006.03.068

[8] Perko, L. (1996) Differential Equations and Dynamical Systems. Springer, New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4684-0249-0

[9] Guckenheimer, J. and Holmes, P.J. (1983) Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields. Springer, New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-1140-2