

# The Godunov Type Scheme for Multi-Component Mie-Grüneisen Mixture Model

Zongduo Wu<sup>1</sup>, Jian Zhang<sup>2</sup>, Jin Yan<sup>1</sup>, Binghong Liu<sup>3</sup>, Zhihui Dong<sup>1</sup>

<sup>1</sup>College of Ocean Engineering, Guangdong Ocean University, Zhanjiang Guangdong

<sup>2</sup>Guangdong Provincial Waterway Bureau, Guangzhou Guangdong

<sup>3</sup>College of Fisheries and Life Science, Shanghai Ocean University, Shanghai

Email: wuzongduo0@aliyun.com

Received: Feb. 4<sup>th</sup>, 2019; accepted: Feb. 20<sup>th</sup>, 2019; published: Feb. 27<sup>th</sup>, 2019

---

## Abstract

The aim of this article is the deduction of Godunov type scheme for Mie-Grüneisen mixture model. For multi-component problem with discontinuous sections, the Godunov schemes always keep the solution non-oscillation. To adapt to Mie-Grüneisen mixture model, the Godunov fluxes are reconstructed under finite volume method in 2D rectangular grids. According to numerical test, the Godunov scheme can couple well with Mie-Grüneisen mixture model.

## Keywords

Godunov Type Scheme, Multi-Component, Mie-Grüneisen Equation

---

# Mie-Grüneisen多介质混合计算模型的Godunov型格式

吴宗铎<sup>1</sup>, 张 建<sup>2</sup>, 严 谨<sup>1</sup>, 刘柄宏<sup>3</sup>, 董智惠<sup>1</sup>

<sup>1</sup>广东海洋大学, 海洋工程学院, 广东 湛江

<sup>2</sup>广东省航道事务中心, 广东 广州

<sup>3</sup>上海海洋大学, 水产与生命学院, 上海

Email: wuzongduo0@aliyun.com

收稿日期: 2019年2月4日; 录用日期: 2019年2月20日; 发布日期: 2019年2月27日

---

## 摘 要

本文的主要目的是为了推导Mie-Grüneisen多介质混合模型下的Godunov类型格式。Godunov格式在求

解多介质问题的间断面时,通常能得到使数值解保持无振荡。为了适应Mie-Grüneisen多介质混合模型,将二维矩形的Godunov类型格式在有限体积算法下进行了重新构造。数值实验表明, Godunov格式在Mie-Grüneisen混合模型下能很好地相结合。

## 关键词

Godunov类型格式, 多介质, Mie-Grüneisen方程

Copyright © 2019 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

可压缩流场中的多介质 Riemann 问题, 多年以来一直是研究者们所关注的一个焦点问题[1]。流体的运动特性可由欧拉方程描述, 而流体的物理性质则由状态方程来描述。相比于其它形式的状态方程, Mie-Grüneisen 方式无论是对流体[2]还是固体[3], 均能很好地描述其力学和热力学特性, 因而得到广泛的应用。而薛克明提出的 Mie-Grüneisen 多介质混合模型[4], 则为 Mie-Grüneisen 方程下的多介质问题提供了很大的便利[5]。但是由于 Mie-Grüneisen 多介质混合模型目前并未得到广泛的重视, 这使得它可供参考的数值离散格式仍然比较少[6]。而 Godunov 型格式则是计算流体力学有限体积方法中比较常见的一种格式, 因为它能给带有强间断面的问题提供稳定的数值解[7]。相比于 GFM 等数值算法, 它省去了其它的数值处理界面的过程[8], 仅自身的数值格式便具备较好的分辨率。对于 Mie-Grüneisen 多介质混合模型来说, 其方程系统同时包括 Euler 守恒方程以及其它热力学参数的非守恒方程, 不仅涉及的方程式较为复杂, 而且具有很强的非守恒性, Godunov 型格式的构造形式将显得非常复杂。

本文在 Mie-Grüneisen 多介质混合模型下, 按照二维有限体积差分方法进行了数值离散化, 离散后确定了守恒变量与通量的计算形式, 并按特定的时间步长和均匀的空间步长进行数值迭代。该过程中, 对 Godunov 格式下的通量做了细致的推导。为了验证该格式的计算稳定性, 利用该模型模拟了一个复杂的二维流场的相互作用问题。

## 2. 计算方法

### 2.1. 控制方程组

这里考虑由多种流场介质共存的二维可压缩流场, 那么整个流场的运动可以由欧拉方程来描述:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0 \\ \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2 + p) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho uv) = 0 \\ \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho uv) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v^2 + p) = 0 \\ \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho Eu + pu) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho Ev + pv) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

式中,  $\rho$  为密度,  $u$ 、 $v$  分别为横向和纵向速度,  $E$  为能量,  $p$  为压力。欧拉方程(1)需要结合状态方程才能完成求解。这里使用 Mie-Grüneisen 状态方程:

$$p - p_{ref}(\rho) = \rho\Gamma(\rho)(e - e_{ref}(\rho)) \tag{2}$$

这里,  $\Gamma$ 、 $p_{ref}$ 、 $e_{ref}$  分别是由流体物理特性决定的热力学参数[4]。由于  $\Gamma$ 、 $p_{ref}$ 、 $e_{ref}$  通常都具有复杂的函数表达式, 可以考虑利用非守恒型方程来对它们进行分别求解[5]:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\Gamma}\right) + u\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\Gamma}\right) + v\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\Gamma}\right) + \rho\phi\frac{\partial u}{\partial x} + \rho\phi\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{p_{ref}}{\Gamma}\right) + u\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p_{ref}}{\Gamma}\right) + v\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{p_{ref}}{\Gamma}\right) + \rho\varphi\frac{\partial u}{\partial x} + \rho\varphi\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho e_{ref}) + u\frac{\partial}{\partial x}(\rho e_{ref}) + v\frac{\partial}{\partial y}(\rho e_{ref}) + \rho\psi\frac{\partial u}{\partial x} + \rho\psi\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases} \tag{3}$$

其中  $\phi$ 、 $\varphi$ 、 $\psi$  代表  $1/\Gamma$ 、 $p_{ref}/\Gamma$ 、 $\rho e_{ref}$  对密度  $\rho$  的导数项。

对于多介质流场, 需要对界面进行捕捉。假设质量分数为  $Y_1$ , 界面的运动可以通过以下方式来求解:

$$\frac{\partial(\rho Y_1)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho Y_1 u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho Y_1 v)}{\partial y} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m-1 \tag{4}$$

将守恒方程(1)、非守恒方程(3)和界面运动方程(4)联立起来, 即可得到整个 Mie-Grüneisen 多介质混合模型的求解方程组。

### 2.2. 有限体积算法

Mie-Grüneisen 多介质混合模型的有限体积格式可以表示成如下所示的形式:

$$\frac{W_j^{n+1} - W_j^n}{\Delta t} + \frac{F_{i+1/2,j} - F_{i-1/2,j}}{\Delta x} + \frac{G_{i,j+1/2} - G_{i,j-1/2}}{\Delta y} = 0 \tag{5}$$

这里  $\Delta t$  为时间步长,  $\Delta x$ 、 $\Delta y$  为空间步长。 $W$  代表变量, 分别用  $F$ 、 $G$  表示  $x$ 、 $y$  方向的通量。角标  $i$  和  $j$  分别代表  $x$ 、 $y$  方向的节点序号,  $n$  为时间步长的序号。变量和通量各自的表达式分别为:

$$W = \begin{Bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho E \\ 1/\Gamma \\ p_{ref}/\Gamma \\ \rho p_{ref} \\ \rho Y_1 \end{Bmatrix}, \quad F = \begin{Bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ (\rho E + p)u \\ \rho\phi u \\ \rho\varphi u \\ \rho\psi u \\ \rho Y_1 u \end{Bmatrix} + u \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/\Gamma \\ p_{ref}/\Gamma \\ \rho p_{ref} \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad G = \begin{Bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ (\rho E + p)v \\ \rho\phi v \\ \rho\varphi v \\ \rho\psi v \\ \rho Y_1 v \end{Bmatrix} + v \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/\Gamma \\ p_{ref}/\Gamma \\ \rho p_{ref} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Godunov 型的通量  $F$  和  $G$ , 其表达形式如下[7]:

$$\begin{cases} F_{i+1/2,j} = \frac{1}{2} [F_{L\ i+1/2,j} + F_{R\ i+1/2,j} - \hat{R}|\hat{\Lambda}|\hat{L}(W_{L\ i+1/2,j} - W_{R\ i+1/2,j})] \\ G_{i,j+1/2} = \frac{1}{2} [G_{L\ i,j+1/2} + G_{R\ i,j+1/2} - \hat{R}|\hat{\Lambda}|\hat{L}(W_{L\ i,j+1/2} - W_{R\ i,j+1/2})] \end{cases} \tag{6}$$

这里,  $W_L$ 、 $W_R$  代表通量所在的网格左右两侧变量,  $F_L$ 、 $F_R$  和  $G_L$ 、 $G_R$  代表两侧变量形成的  $x$ 、 $y$  方向通量。 $\hat{L}$ 、 $\hat{R}$ 、 $\hat{\Lambda}$  则代表了 Jacobi 矩阵的左右特征向量和特征值对角矩阵的平均值。Jacobi 矩阵为通量对变量的偏导数, 即  $\partial F/\partial W$ 、 $\partial G/\partial W$ 。

### 2.3. 通量相关矩阵

对于左右两侧变量及通量，表达形式如下：

$$W_K = \begin{Bmatrix} \rho_K \\ \rho_K u_K \\ \rho_K v_K \\ \rho_K E_K \\ (1/\Gamma)_K \\ (p_{ref}/\Gamma)_K \\ (\rho p_{ref})_K \\ (\rho Y_1)_K \end{Bmatrix}, F_K \text{ 或 } G_K = \begin{Bmatrix} (\rho\theta)_K \\ (\rho\theta)_K u_K + p_K \zeta_x \\ (\rho\theta)_K v_K + p_K \zeta_y \\ (\rho_K E_K + p_K)\theta_K \\ \theta(1/\Gamma)_K + \rho\phi\theta_K \\ \theta(p_{ref}/\Gamma)_K + \rho\phi\theta_K \\ \theta(\rho p_{ref})_K + \rho\psi\theta_K \\ (\rho Y_1)_K \theta_K \end{Bmatrix} \quad (K=L,R) \quad (7)$$

这里， $\zeta_x$  和  $\zeta_y$  的数值分别定义为：

$$\zeta_x = \begin{cases} 1 & \text{通量} F \\ 0 & \text{通量} G \end{cases}, \quad \zeta_y = \begin{cases} 0 & \text{通量} F \\ 1 & \text{通量} G \end{cases}$$

其中  $\theta = u\zeta_x + v\zeta_y$ 。(7)中，未注明角标的参数  $\theta$ 、 $\rho$ 、 $\phi$ 、 $\psi$  则代表节点  $i, j$  处的数值。这样 Jacobi 矩阵  $A$  可以通过(7)式求偏导数得到：

$$A = \begin{bmatrix} & \zeta_x & \zeta_y & & & & & & & \\ K\zeta_x - u\theta & (1-\Gamma)u\zeta_x + \theta & u\zeta_y - \Gamma v\zeta_x & \Gamma\zeta_x & -p\Gamma\zeta_x & \Gamma\zeta_x & -\Gamma\zeta_x & & & \\ K\zeta_y - v\theta & v\zeta_x - \Gamma u\zeta_y & (1-\Gamma)u\zeta_y + \theta & \Gamma\zeta_y & -p\Gamma\zeta_y & \Gamma\zeta_y & -\Gamma\zeta_y & & & \\ (K-H)\theta & H\zeta_x - \Gamma u\theta & H\zeta_y - \Gamma v\theta & (\Gamma+1)\theta & -p\Gamma\theta & \Gamma\theta & -\Gamma\theta & & & \\ -\phi\theta & \phi & & & \theta & & & & & \\ -\phi\theta & \phi & & & & \theta & & & & \\ -\psi\theta & \psi & & & & & \theta & & & \\ -Y_1\theta & Y_1 & & & & & & \theta & & \end{bmatrix} \quad (8)$$

这里， $H$  为焓： $H = E + p/\rho$ 。且有  $K = \Gamma(u^2 + v^2)/2$ 。由矩阵  $A$  可以用偏微分关系求得特征值对角阵和左右特征向量矩阵：

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \theta - c & & & & & & & & & \\ & \theta & & & & & & & & \\ & & \theta & & & & & & & \\ & & & \theta + c & & & & & & \\ & & & & \theta & & & & & \\ & & & & & \theta & & & & \\ & & & & & & \theta & & & \\ & & & & & & & \theta & & \\ & & & & & & & & \theta & \\ & & & & & & & & & \theta \end{bmatrix}$$

这里  $c$  代表声速，计算式为：

$$c = \sqrt{\Gamma\left(H - \frac{1}{2}(u^2 + v^2) - p\phi + \phi - \psi\right)} \quad (9)$$

$$L = \frac{\Gamma}{2c^2} \begin{bmatrix} \theta\xi + \frac{u^2 + v^2}{2} & -u - \zeta_x \xi & -v - \zeta_y \xi & 1 & -p & 1 & -1 \\ -u^2 - v^2 + \kappa & 2u & 2v & -2 & 2p & -2 & 2 \\ (\zeta_y u - \zeta_x v)\kappa & -\zeta_y \kappa & \zeta_x \kappa & & & & \\ -\theta\xi + \frac{u^2 + v^2}{2} & -u + \zeta_x \xi & -v + \zeta_y \xi & 1 & -p & 1 & -1 \\ -\phi(u^2 + v^2) & 2\phi u & 2\phi v & -2\phi & 2\phi p + \kappa & -2\phi & 2\phi \\ -\varphi(u^2 + v^2) & 2\varphi u & 2\varphi v & -2\varphi & 2\varphi & -2\varphi + \frac{\kappa}{\varphi} & 2\varphi \\ -\psi(u^2 + v^2) & 2\psi u & 2\psi v & -2\psi & 2\psi & -2\psi & 2\psi + \frac{\kappa}{\psi} \\ -Y(u^2 + v^2) & 2Yu & 2Yv & -2Y & 2Y & -2Y & 2Y \quad \kappa \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ u - \zeta_x c & u & -\zeta_y & u + \zeta_x c \\ v - \zeta_y c & v & \zeta_x & v + \zeta_y c \\ H - \theta c & \frac{1}{2}(u^2 + v^2) & -\zeta_y u + \zeta_x v & H + \theta c & p & -1 & 1 \\ \phi & & & \phi & 1 \\ \varphi & & & \varphi & 1 \\ \psi & & & \psi & 1 \\ Y & & & Y & 1 \end{bmatrix}$$

这里  $k = 2c^2/\Gamma$ ， $\xi = c/\Gamma$ 。

### 2.4. Roe 平均值计算

在方程组(6)中， $\hat{L}$ 、 $\hat{R}$ 、 $\hat{\Lambda}$  中的参数，需要根据左右两侧的状态取平均值。这里采用最为常用的一种 Roe 平均值，计算方式如下：

$$\hat{u} = \frac{\sqrt{\rho_L} u_L + \sqrt{\rho_R} u_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}}, \quad \hat{v} = \frac{\sqrt{\rho_L} v_L + \sqrt{\rho_R} v_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}}, \quad \hat{H} = \frac{\sqrt{\rho_L} H_L + \sqrt{\rho_R} H_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}}$$

原始的 Roe 格式未提供  $p$  和  $\Gamma$  的处理方法，这里采用如下计算方式：

$$\frac{1}{\hat{\Gamma}} = \frac{\sqrt{\rho_L} (1/\Gamma_L) + \sqrt{\rho_R} (1/\Gamma_R)}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}}, \quad \hat{p} = \frac{\sqrt{\rho_L} (p_L/\Gamma_L) + \sqrt{\rho_R} (p_R/\Gamma_R)}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}}$$

参数  $\phi$ 、 $\varphi$ 、 $\psi$  为节点处的数值，因此不需要对网格左右侧取平均值。声速  $c$  可根据(9)式完成求解。

### 3. 数值算例

这里再考虑一个钼和液态 MORB(Mid-Ocean Ridge Basalt)相互作用的问题。初始时刻，整个流场计算域长宽都为 1 m。MORB 分布在  $[0.4, 0.6] \times [0, 0.5]$  的一块方形区域，其余区域均为钼。左侧  $[0, 0.3 \text{ m}]$  区域内的钼为高压态，除此以外都为正常态的钼。钼和液态 MORB 的物理特性均由 Mie-Grüneisen 状态方程(2)来表示，其中的参数为：

$$\Gamma = \Gamma_0 \left( \frac{V}{V_0} \right)^q, \quad p_{ref} = p_0 + \frac{c_0^2 (V_0 - V)}{[V_0 - s(V_0 - V)]^2}, \quad e_{ref} = e_0 + \frac{1}{2} (p_{ref} + p_0) (V_0 - V)$$

这里  $V$  为相对体积,  $V = 1/\rho$ 。流场中各介质的物理状态为:

$$\begin{cases} \text{液态MORB: } \rho = 2.26 \times 10^3 \text{ kg/m}^3, p = 1 \times 10^5 \text{ pa}, u = 0, \\ \text{正常态钼: } \rho = 9.961 \times 10^3 \text{ kg/m}^3, p = 1 \times 10^5 \text{ pa}, u = 0 \\ \text{压缩态钼: } \rho = 11.042 \times 10^3 \text{ kg/m}^3, p = 3 \times 10^{10} \text{ pa}, u = 543 \text{ m/s} \end{cases}$$

液态MORB:  $\rho_0 = 2.26 \times 10^3 \text{ kg/m}^3, c_0 = 2100 \text{ m/s}, s = 1.68, \Gamma_0 = 1.56, q = 1.0$   
 钼:  $\rho_0 = 9.96 \times 10^3 \text{ kg/m}^3, c_0 = 4770 \text{ m/s}, s = 1.43, \Gamma_0 = 0.18, q = 1.0$

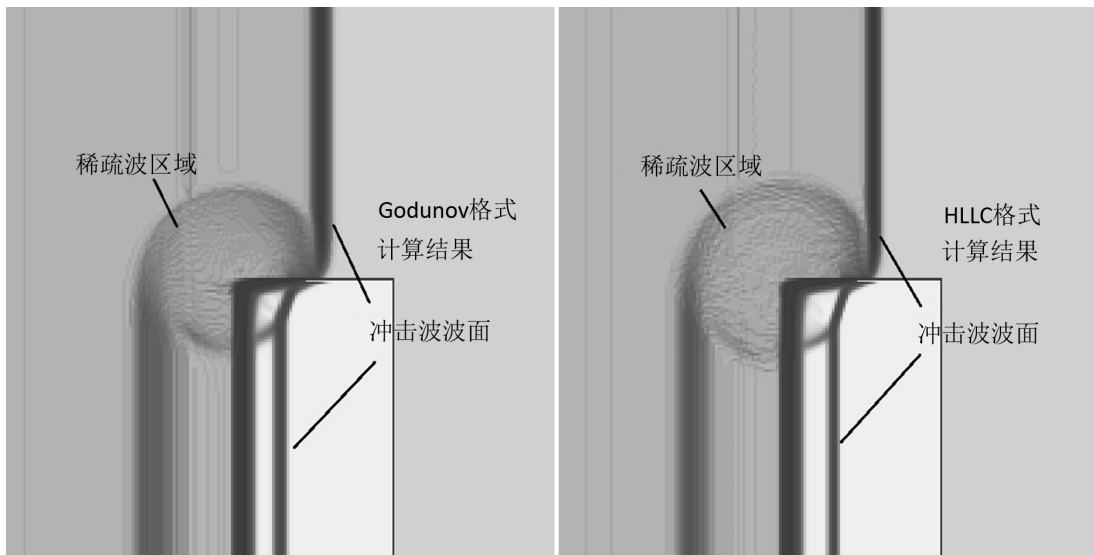


Figure 1. Density contours of Godunov scheme (left) and HLLC scheme (right)

图 1. Godunov 格式(左)和 HLLC 格式(右)的密度云图

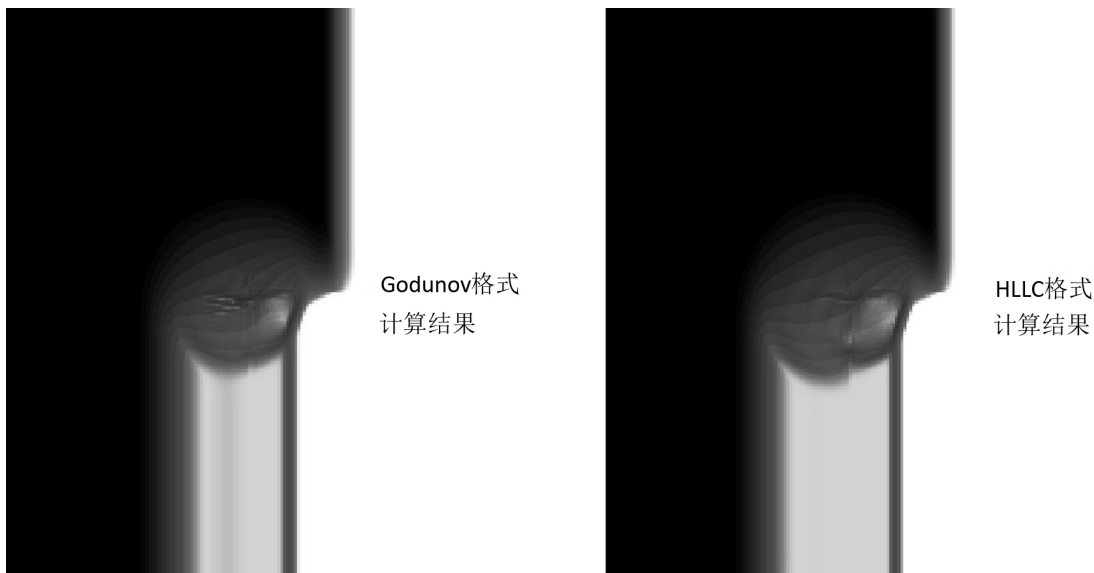


Figure 2. Pressure contours of Godunov scheme (left) and HLLC scheme (right)

图 2. Godunov 格式(左)和 HLLC 格式(右)的压力云图

当高压态的钼以冲击波的形式向右推进时, 上半部分没有受到其它介质的影响, 一直沿直线传播; 而下半部分冲击波冲击到 MORB 块上, 与 MORB 块产生相互作用。图 1 和图 2 为  $50 \mu\text{s}$  时刻的密度与压力的分布状态。此时, 一部分冲击波进入 MORB 块中继续传播, 一部分返回钼中形成稀疏波。冲击波为强间断面, 在图中可以观察到明显的波面。而稀疏波属于弱间断面, 在图中则显示为大范围的密度变化。冲击波的波面与稀疏波的边界组合到一起, 形成一个近似的圆形。

为了验证计算结果的准确性, 本文将 Godunov 型格式的计算结果, 与文献[6]中 HLLC 的计算结果进行了比较。比较的结果可以发现, 无论是密度和压力, 两者的计算结果均吻合的比较好。但是由于 HLLC 格式中, 为了保证守恒方程与非守恒方程的波面运动速度一致, 对差分格式上的进行了改动, 这使得两种格式的计算结果中, 冲击波波面的位置与稀疏波区域边界的位置出现了小幅度的差异。

#### 4. 结论

本文针对 Mie-Grüneisen 多介质混合模型结构复杂、非线性强的特点, 提供了 Godunov 型的计算格式。经过推导后的 Godunov 型格式, 可以同时考虑到模型中的守恒与非守恒关系式, 且求解过程不需要借助其它的数值手段。通过和其它格式的数值结果对比, 证明 Godunov 型格式可以得到稳定无振荡的数值解。

#### 基金项目

国家自然科学基金资助项目(11702066); 广东省自然科学基金(2017A030313275); 广东海洋大学“创新强校工程”省财政资金支持项目(GDOU2016050258, GDOU2017052623)。

#### 参考文献

- [1] Toro, E.F. (2009) Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.
- [2] 王东红, 赵宁, 徐爽. 适用于 Mie-Grüneisen 状态方程的一种通用激波限制器[J]. 南京航空航天大学学报, 2014, 46(2): 232-238.
- [3] 李晓杰, 闫鸿浩, 王小红, 等. Mie-Grüneisen 状态方程的物理力学释义[J]. 高压物理学报, 2014, 28(2): 227-231.
- [4] Shyue, K.-M. (2001) A Fluid-Mixture Type Algorithm for Compressible Multicomponent Flow with Mie-Grüneisen Equation of States. *Journal of Computational Physics*, 171, 678-707. <https://doi.org/10.1006/jcph.2001.6801>
- [5] 吴宗铎, 宗智. Mie-Grüneisen 状态方程下多介质守恒型欧拉方程组的数值计算[J]. 计算物理, 2011, 28(6): 803-809.
- [6] 吴宗铎, 严谨, 宗智, 等. 一种基于 HLLC 算法的 Mie-Grüneisen 多介质混合模型[EB/OL]. 计算物理. <http://kns.cnki.net/kcms/detail/11.2011.o4.20181219.1145.004.html>, 2018-12-24.
- [7] 任玉新, 陈海昕. 计算流体力学基础[M]. 北京: 清华大学出版社, 2006.
- [8] 刘晓慧, 李肖. ALE 框架下虚拟流体方法模拟移动边界的一维可压缩多介质流动问题[J]. 应用数学进展, 2018, 7(12): 1638-1644.

**知网检索的两种方式：**

1. 打开知网页面 <http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD>  
下拉列表框选择：[ISSN]，输入期刊 ISSN：2324-7991，即可查询
2. 打开知网首页 <http://cnki.net/>  
左侧“国际文献总库”进入，输入文章标题，即可查询

投稿请点击：<http://www.hanspub.org/Submission.aspx>

期刊邮箱：[aam@hanspub.org](mailto:aam@hanspub.org)