Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2019, 8(4), 638-649
Published Online April 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2019.84071

A Line Search Exact Penalty Method for Nonlinear Semidefinite Programming

Jiaqi Wu, Jianling Li

College of Mathematics and Information Science, Guangxi University, Nanning Guangxi
Email: jianlingli@126.com

Received: Mar. 31st, 2019; accepted: Apr. 15th, 2019; published: Apr. 22nd, 2019

Abstract

This paper presents a line search exact penalty method for nonlinear semidefinite programming. At each iteration, the search direction is determined by solving a quadratic semidefinite programming subproblem. Certain exact penalty function is used as merit function for line search and a step size is obtained. The penalty parameter is updated by the optimal solution of the trust region subproblem. Under some appropriate conditions, the global convergence of the proposed algorithm is proved.

Keywords

Nonlinear Semidefinite Programming, Line Search, Penalty Function, Global Convergence

非线性半定规划的一个线搜索精确罚方法

吴加其，黎健玲

广西大学数学与信息科学学院，广西 南宁
Email: jianlingli@126.com

收稿日期：2019年3月31日；录用日期：2019年4月15日；发布日期：2019年4月22日

摘 要

本文提出了一个求解非线性半定规划的线搜索精确罚函数方法。在每次迭代中通过求解一个二次半定规划产生搜索方向，某个精确罚函数作为效益函数用于线搜索确定步长。且借助信赖域子问题的最优解更新罚参数。在较温和的条件下本文证明了算法具有全局收敛性。

文章引用: 吴加其, 黎健玲. 非线性半定规划的一个线搜索精确罚方法[J]. 应用数学进展, 2019, 8(4): 638-649.
DOI: 10.12677/aam.2019.84071

关键词

非线性半定规划，线搜索，罚函数，全局收敛性

1. 引言

本文考虑如下非线性半定规划问题(NLSDP)：

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{s.t.} \quad & h(x)=0, \\ & G(x)\preceq 0, \end{aligned} \tag{0.1}$$

其中函数 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$，$G:\mathbb{R}^n\to\mathbb{S}^m$，$h:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$ 是连续可微函数。$\mathbb{S}^m$ 表示所有 m 阶实对称矩阵构成的矩阵空间。$A\preceq 0$ 表示 A 为半负定矩阵，$A\prec 0$ 表示 A 为负定矩阵。

非线性半定规划在工程设计，最优控制，经济，金融等领域有着广泛的应用(见文[1] [2] [3])。基于非线性规划的罚函数法思想，一些学者提出了求解非线性半定规划的罚函数型算法。文[4]引进了非线性半定规划罚函数，结合线搜索策略提出了一个罚函数型的序列半定规划算法；文[5]基于罚函数技术和二阶校正方向，提出了一个超线性收敛的序列半定规划算法；文[6]通过由两个具有相同系数矩阵的线性方程组产生主搜索方向，罚函数作为效益函数用于线搜索确定步长，提出非线性半定规划的一个序列线性方程组算法；文[7]的第 3 章通过引进罚函数作为效益函数建立了一个超线性收敛的序列半定规划算法。

本文是将文[8]中产生搜索方向的子问题的构造策略和罚参数的更新策略推广到非线性半定规划，建立一个求解非线性半定规划的线搜索精确罚函数方法。在每次迭代中通过求解一个二次半定规划产生搜索方向的某个精确罚函数作为效益函数，用于线搜索确定步长。而且构造了一个信赖域子问题，并且借助信赖域子问题的最优解更新罚参数。在较温和的条件下算法具有全局收敛性。

2. 算法

为方便起见，下面引进矩阵函数的微分算子和伴随算子的记号。

对于连续可微矩阵函数 $G(x):\mathbb{R}^n\to\mathbb{S}^m$，记其微分算子 $DG(x)$ 为

$$DG(x):=\left(\frac{\partial G(x)}{\partial x_1},\frac{\partial G(x)}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial G(x)}{\partial x_n}\right),$$

且对任意的 $d\in\mathbb{R}^n$，有

$$DG(x)d=\sum_{i=1}^{n}d_i\frac{\partial G(x)}{\partial x_i}.$$

记 $DG(x)$ 的伴随算子为 $DG(x)^*$，且 $\forall Z\in\mathbb{S}^m$，有

$$DG(x)^*Z:=\left(\left\langle\frac{\partial G(x)}{\partial x_1},Z\right\rangle,\left\langle\frac{\partial G(x)}{\partial x_2},Z\right\rangle,\cdots,\left\langle\frac{\partial G(x)}{\partial x_n},Z\right\rangle\right)^{\mathrm{T}},$$

其中 $\langle A,B\rangle$ 表示矩阵 A 与 B 的内积，且 $\langle A,B\rangle=\mathrm{Tr}(AB),\forall A,B\in\mathbb{S}^m$，$\mathrm{Tr}(\cdot)$ 表示矩阵的迹。定义 NLSDP (0.1)的 Lagrange 函数为

$$L(x,\lambda,Y)=f(x)+\lambda^{\mathrm{T}}h(x)+\langle Y,G(x)\rangle,$$

其中 $\lambda\in\mathbb{R}^p,Y\in\mathbb{S}^m$。

定义 1.1：设 $x^*\in\mathbb{R}^n$ 是 NLSDP (0.1)的可行点，若存在向量 $\lambda^*\in\mathbb{R}^p$ 和矩阵 $Y_*\in\mathbb{S}^m$ 满足如下条件：

$$\nabla f(x^*)+Dh(x^*)^{\mathrm{T}}\lambda^*+DG(x^*)^*Y_*=0,$$

$$h(x^*)=0,G(x^*)\preceq 0,$$

$$Y_*\succeq 0,\mathrm{Tr}(Y_*G(x^*))=0,$$

则称 x^* 是 NLSDP (0.1)的一个 KKT 点，称 (λ^*,Y_*) 为对应于 x^* 的 Lagrange 乘子。

定义 NLSDP (0.1)的约束违反度函数如下：

$$v(x)=\|h(x)\|+\lambda_1(G(x))_+,\tag{1.1}$$

其中 $\lambda_1(A)$ 表示矩阵 A 的最大特征值，$(\alpha)_+=\max\{0,\alpha\}$，$(\lambda_1(A))_+$ 简记为 $\lambda_1(A)_+$，$\|\cdot\|$ 表示欧氏范数。定义 NLSDP (0.1)的罚函数如下：

$$P_\alpha(x)=f(x)+\alpha v(x),\tag{1.2}$$

其中 $\alpha>0$ 为罚参数。设当前迭代点为 $x^k\in\mathbb{R}^n$，构造约束违反度函数 $v(x)$ 线性模型如下：

$$m_k(d)=\|h(x^k)+Dh(x^k)d\|+\lambda_1(G(x^k)+DG(x^k)d)_+.\tag{1.3}$$

构造罚函数 $P_\alpha(x)$ 的二次模型如下：

$$Q_k^\alpha(d)=f(x^k)+\nabla f(x^k)^{\mathrm{T}}d+\frac{1}{2}d^{\mathrm{T}}B_kd+\alpha m_k(d),\tag{1.4}$$

其中矩阵 $B_k\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 是 NLSDP (0.1)的 Lagrange 函数的 Hesse 阵或其近似阵。对于给定的罚参数 α，使用(1.4)产生搜索方向，即求解如下无约束问题(简记 $\mathrm{QM}(x^k,\alpha)$)：

$$\min_{d\in\mathbb{R}^n}\ Q_k^\alpha(d).\tag{1.5}$$

记上述问题的最优解为 $d^k(\alpha)$。由于 $\mathrm{QM}(x^k,\alpha)(1.5)$ 是非光滑问题，求解较为复杂，因此将其等价转化为如下光滑问题：

$$\begin{aligned}\min_{d,z_1,z_2}\quad&\nabla f(x^k)^{\mathrm{T}}d+\frac{1}{2}d^{\mathrm{T}}B_kd+\alpha(\|z_1\|^2+z_2)\\ \text{s.t.}\quad&h(x^k)+Dh(x^k)d=z_1,\\&G(x^k)+DG(x^k)d\preceq z_2I_m,z_2\geq 0,\end{aligned}\tag{1.6}$$

其中 I_m 为 m 阶单位矩阵。记其解为 $(d^k(\alpha),z_1^k,z_2^k)$。

为更新罚参数，类似文[8]，构造如下信赖域子问题(简记 $\mathrm{LM}(x^k,\Delta_k)$)：

$$\min m_k(d)\ \ \text{s.t.}\|d\|_\infty\leq\Delta_k,\tag{1.7}$$

其中信赖域半径 $\Delta_k>0$。记其解为 d_{LM}^k。由于 $\mathrm{LM}(x^k,\Delta_k)(1.7)$ 为非光滑问题，因此将其等价转化为如下光滑问题：

$$\begin{aligned} \min_{d,z_1,z_2} \quad & \|z_1\|+z_2 \\ \text{s.t} \quad & h(x^k)+Dh(x^k)d=z_1, \\ & G(x^k)+DG(x^k)d \preceq z_2 I_m, \\ & \|d\|_\infty \le \Delta_k, z_2 \ge 0. \end{aligned} \tag{1.8}$$

下面给出算法的具体步骤。

算法 A:

步骤 0: (初始步)任取 $x^0\in\mathbb{R}^n$，$B_0=I_n$ (单位阵)，$\alpha_0>0,\rho>0$，$\epsilon_1\in(0,1]$，$\epsilon_2\in(0,\epsilon_1)$，$\tau,\eta\in(0,1)$，$\Delta_0\in[\Delta_{\min},\Delta_{\max}]$。令 $k=0$。

步骤 1: 求解子问题 $\mathrm{QM}(x^k,\alpha_k)$(1.5) 得最优解 $d^k(\alpha_k)$。若 $d^k(\alpha_k)=0$ 并且 $v(x^k)=0$，则算法终止，否则转步骤 2。

步骤 2: 若 $m_k(d^k(\alpha_k))=0$ 且 $Q_k^{\alpha_k}(0)-Q_k^{\alpha_k}(d^k(\alpha_k))\ge\epsilon_2\alpha_k v(x^k)$，则转步骤 5。

步骤 3: 求解子问题 $\mathrm{LM}(x^k,\Delta_k)$(1.7) 得最优解 d_{LM}^k。若

$$m_k(d_{LM}^k)=v(x^k)\text{且}v(x^k)>0, \tag{1.9}$$

则算法终止，否则转步骤 4。

步骤 4: (更新罚参数)

步骤 4.1: 若 $m_k(d_{LM}^k)=0$，则取 $\bar{\alpha}_k\ge\alpha_k+\rho$ 且使得如下等式成立

$$m_k(d^k(\bar{\alpha}_k))=0, \tag{1.10}$$

其中 $d^k(\bar{\alpha}_k)$ 是子问题 $\mathrm{QM}(x^k,\bar{\alpha}_k)$(1.5) 的解，转步骤 4.3。

步骤 4.2: 若 $m_k(d_{LM}^k)>0$，则取 $\bar{\alpha}_k=\alpha_k$，若如下不等式

$$m_k(0)-m_k(d^k(\bar{\alpha}_k))\ge\epsilon_1\left[m_k(0)-m_k(d_{LM}^k)\right] \tag{1.11}$$

成立，则转步骤 4.3，否则取 $\bar{\alpha}_k\ge\alpha_k+\rho$ 使得(1.11)成立，转步骤 4.3，其中 $d^k(\bar{\alpha}_k)$ 是子问题 $\mathrm{QM}(x^k,\bar{\alpha}_k)$(1.5) 的最优解。

步骤 4.3: (二次模型预估下降量)若不等式

$$Q_k^{\bar{\alpha}_k}(0)-Q_k^{\bar{\alpha}_k}(d^k(\bar{\alpha}_k))\ge\epsilon_2\bar{\alpha}_k\left[m_k(0)-m_k(d_{LM}^k)\right] \tag{1.12}$$

成立，则令 $\alpha_k:=\bar{\alpha}_k$，否则通过下式更新罚参数 $\bar{\alpha}_k$：

$$\alpha_k:=\frac{\nabla f(x^k)^{\mathrm{T}}d^k(\bar{\alpha}_k)+\frac{1}{2}(d^k(\bar{\alpha}_k))^{\mathrm{T}}B_k d^k(\bar{\alpha}_k)}{m_k(0)-m_k(d^k(\bar{\alpha}_k))+\epsilon_2\left[m_k(d_{LM}^k)-m_k(0)\right]}+\rho, \tag{1.13}$$

其中 $0<\epsilon_2<\epsilon_1<1$。

步骤 4.4: 求解子问题 $\mathrm{QM}(x^k,\alpha_k)$(1.5) 得最优解 $d^k(\alpha_k)$，转步骤 5。

步骤 5: (线搜索)令 t_k 为序列 $\{1,\tau,\tau^2,\cdots\}$ 中满足如下不等式的最大值：

$$P_{\alpha_k}(x^k)-P_{\alpha_k}(x^k+t_k d^k(\alpha_k))\ge\eta t_k\left[Q_k^{\alpha_k}(0)-Q_k^{\alpha_k}(d^k(\alpha_k))\right], \tag{1.14}$$

则令 $\hat{x}=x^k+t_k d^k(\alpha_k)$。

步骤 6: (更新步)利用某种方式更新 B_k 为对称正定矩阵 B_{k+1}，取 $\Delta_{k+1}\in[\Delta_{\min},\Delta_{\max}]$，$\alpha_{k+1}:=\alpha_k$，$x^{k+1}:=\hat{x}$，转步骤 1。

3. 全局收敛性

本节将分析算法 A 的适定性。为此，需作如下基本假设：

假设 A：

A1： 函数 $f(x), h(x), G(x)$ 是二阶连续可微；

A2： 算法 A 产生的序列 $\{x^k\}$ 包含于某个紧凸集中；

A3： 存在正常数 a 和 b，使得 $a\|y\|^2 \le y^{\mathrm{T}} B_k y \le b\|y\|^2$，$\forall y \in \mathbb{R}^n$。

现将非线性规划的稳定点和不可行稳定点的定义(见文[9])推广到非线性半定规划。

定义 2.1： 设 $x \in \mathbb{R}^n$，若对于任意非零向量 $y \in \mathbb{R}^n$，函数 $w(x)$ 的方向导数 $w'(x; y) \ge 0$，则称 x 为 $w(x)$ 的一个稳定点。

定义 2.2： 设 $x \in \mathbb{R}^n$，若对于任意向量 $y \in \mathbb{R}^n$，有 $v'(x; y) \ge 0$，则称 x 为 NLSDP (0.1)的一个稳定点。同时若 $v(x) > 0$，则称 x 为 NLSDP (0.1)的一个不可行稳定点。

引理 2.1： 设 x^k 为当前迭代点，则

$$v'(x^k; y) = m_k'(0; y), \quad P_\alpha'(x^k; y) = \left(Q_k^\alpha\right)'(0; y), \forall y \in \mathbb{R}^n. \tag{2.1}$$

证明： 由文[4]的引理 5 知

$$v'(x^k; y) = \left\|Dh(x^k) y\right\| + \left[\lambda_1(\cdot)_+\right]'\left(G(x^k); DG(x^k) y\right). \tag{2.2}$$

另外，对于 $\tilde{d} \in \mathbb{R}^n$，由文[4]的引理 5 知

$$\begin{aligned} m_k'(\tilde{d}; y) &= \left\|\left(h(x^k) + Dh(x^k) d\right)'(\tilde{d}; y)\right\| + \left[\lambda_1\left(G(x^k) + DG(x^k) d\right)_+\right]'(\tilde{d}; y) \\ &= \left\|Dh(x^k) y\right\| + \left[\lambda_1(\cdot)_+\right]'\left(G(x^k) + DG(x^k)\tilde{d}; DG(x^k) y\right), \end{aligned}$$

令 $\tilde{d} = 0$，可得

$$m_k'(0; y) = \left\|Dh(x^k) y\right\| + \left[\lambda_1(\cdot)_+\right]'\left(G(x^k); DG(x^k) y\right). \tag{2.3}$$

由(2.2)和(2.3)即知(2.1)的第一个式子成立。由方向导数的定义以及(2.1)的第一个式子即知(2.1)的第二个式子成立。

引理 2.2： 设当前点为 x^k，则如下结论成立：

(1) x^k 为 $P_\alpha(x)$ 的稳定点当且仅当子问题 $\mathrm{QM}(x^k, \alpha)(1.5)$ 的最优解 $d^k(\alpha) = 0$。

(2) 若 x^k 为 $P_\alpha(x)$ 的稳定点且 $v(x^k) = 0$，则 x^k 是 NLSDP (0.1)的一个 KKT 点。

(3) x^k 为 $v(x)$ 的稳定点当且仅当对于任意给定的信赖域半径 $\Delta > 0$，子问题 $\mathrm{LM}(x^k, \Delta_k)(1.7)$ 的最优解 d_{LM}^k 满足如下等式：

$$m_k\left(d_{LM}^k\right) = v(x^k). \tag{2.4}$$

证明： (1) 子问题 $\mathrm{QM}(x^k, \alpha)(1.5)$ 的最优解 $d^k(\alpha) = 0$ 当且仅当对于任意方向 $y \in \mathbb{R}^n$，有 $\left(Q_k^\alpha\right)'(0; y) \ge 0$。再由引理 2.1 和稳定点的定义知结论成立。

(2) 若 x^k 是 $P_\alpha(x)$ 的稳定点，则由结论(1)知子问题 $\mathrm{QM}(x^k, \alpha)(1.5)$ 的最优解 $d^k(\alpha) = 0$。由子问题(1.6)的 KKT 条件可得

$$\nabla f(x^k) + B_k d^k(\alpha) + Dh(x^k)^{\mathrm{T}} \lambda_k + DG(x^k)^* Y_k = 0, \tag{2.5a}$$

$$h\left(x^k\right)+Dh\left(x^k\right)d^k\left(\alpha\right)=z_1^k, \tag{2.5b}$$

$$G\left(x^k\right)+DG\left(x^k\right)d^k\left(\alpha\right)\preceq z_2^k I_m, \tag{2.5c}$$

$$Y_k\succeq 0, \tag{2.5d}$$

$$\mathrm{Tr}\left(Y_k\left(G\left(x^k\right)+DG\left(x^k\right)d^k\left(\alpha\right)-z_2^k I_m\right)\right)=0. \tag{2.5e}$$

将 $d^k\left(\alpha\right)=0$ 代入，即有

$$\nabla f\left(x^k\right)+Dh\left(x^k\right)^{\mathrm{T}}\lambda_k+DG\left(x^k\right)^{*}Y_k=0, \tag{2.6a}$$

$$h\left(x^k\right)=z_1^k, \tag{2.6b}$$

$$G\left(x^k\right)\preceq z_2^k I_m, \tag{2.6c}$$

$$Y_k\succeq 0, \tag{2.6d}$$

$$\mathrm{Tr}\left(Y_k\left(G\left(x^k\right)-z_2^k I_m\right)\right)=0. \tag{2.6e}$$

由 $v\left(x^k\right)=0$ 知 x^k 为 NLSDP (0.1)的可行点，故结合(2.6b)，(2.6c)和 $z_2^k\geq 0$ 知 $\left(z_1^k,z_2^k\right)=\left(0,0\right)$。再结合(2.6a)，(2.6d)，(2.6e)即知 x^k 是 NLSDP (0.1)的 KKT 点。

(3) 由引理 2.1 知 x^k 是 $v\left(x\right)$ 的稳定点当且仅当 0 是 $m_k\left(d\right)$ 的稳定点，结合 $m_k\left(d\right)$ 是凸函数知 0 是 $\mathrm{LM}\left(x^k,\Delta_k\right)$(1.7) 的一个最优解，因此，$m_k\left(d_{LM}^k\right)=m_k\left(0\right)$，结合 $m_k\left(0\right)=v\left(x^k\right)$ 即得 $m_k\left(d_{LM}^k\right)=v\left(x^k\right)$。反之，若 $m_k\left(d_{LM}^k\right)=m\left(0\right)$，即 0 是子问题 $\mathrm{LM}\left(x^k,\Delta_k\right)\left(1.7\right)$ 的一个最优解，由此知 0 是 $m_k\left(d\right)$ 的稳定点，于是对任意方向 $y\in\mathbb{R}^n$，有 $m_k'\left(0;y\right)\geq 0$。由引理 2.1 即知 x^k 是 $v\left(x\right)$ 的稳定点。

为了方便起见，记

$$q_k^f\left(d\right):=f\left(x^k\right)+\nabla f\left(x^k\right)^{\mathrm{T}}d+\frac{1}{2}d^{\mathrm{T}}B_k d, \tag{2.7}$$

则由(1.4)知 $Q_k^{\alpha}\left(d\right)=q_k^f\left(d\right)+\alpha m_k\left(d\right)$。下面引理给出算法 A 的适定性。

引理 2.3： 设当前点 x^k 既不是 NLSDP (0.1)的 KKT 点，也不是约束违反度函数 $v\left(x\right)$ 的稳定点，则以下结论成立：

(1) 若算法 A 执行到步骤 4，则当 $m_k\left(d_{LM}^k\right)=0$ 时，存在 $\bar{\alpha}_k>0$，使得(1.10)式成立；当 $m_k\left(d_{LM}^k\right)>0$ 时，存在 $\bar{\alpha}_k>0$，使得(1.11)式成立。另外，若(1.12)不成立，则通过(1.13)式产生的 α_k 满足如下不等式：

$$Q_k^{\alpha_k}\left(0\right)-Q_k^{\alpha_k}\left(d^k\left(\alpha_k\right)\right)\geq\epsilon_2\alpha_k\left[m_k\left(0\right)-m_k\left(d_{LM}^k\right)\right], \tag{2.8}$$

其中 $d^k\left(\alpha_k\right)$ 是子问题 $\mathrm{QM}\left(x^k,\alpha_k\right)\left(1.5\right)$ 的最优解。同时该 α_k 也满足不等式(1.10)和(1.11)。

(2) 若算法 A 执行到步骤 5，则 $d^k\left(\alpha_k\right)$ 是罚函数 $P_{\alpha_k}\left(x\right)$ 在 x^k 处的下降方向，并且总存在步长 $t_k>0$，使得(1.14)式成立。

证明： (1) 若算法 A 执行到步骤 4，由于子问题(1.8)的最优解 $\left(d_{LM}^k,z_1^k,z_2^k\right)$ 是子问题(1.6)的可行解，故有

$$m_k\left(d^k\left(\bar{\alpha}_k\right)\right)\leq m_k\left(d_{LM}^k\right). \tag{2.9}$$

若 $m_k\left(d_{LM}^k\right)=0$，则由上式知(1.10)成立。若 $m_k\left(d_{LM}^k\right)>0$，注意到 $\epsilon_1\in\left(0,1\right]$。由于 0 是子问题(1.7)的可行解，因此有 $m_k\left(0\right)-m_k\left(d_{LK}^k\right)\geq 0$。于是由(2.9)有

$$m_k\left(0\right)-m_k\left(d^k\left(\bar{\alpha}_k\right)\right)\geq m_k\left(0\right)-m_k\left(d_{LM}^k\right)\geq\epsilon_1\left[m_k\left(0\right)-m_k\left(d_{LM}^k\right)\right],$$

故(1.11)式成立。

若(1.12)不成立，注意到当前的 $\bar{\alpha}_k$ 为步骤 4.1 或步骤 4.2 更新后的罚参数且子问题 $\mathrm{QM}\left(x^k,\bar{\alpha}_k\right)(1.5)$ 的最优解是 $d^k\left(\bar{\alpha}_k\right)$，下面分两种情况讨论：

若 $m_k(0)-m_k\left(d_{LM}^k\right)=0$，注意到 $d^k\left(\bar{\alpha}_k\right)$ 是子问题 $\mathrm{QM}\left(x^k,\alpha_k\right)(1.5)$ 的最优解，则有 $Q_k^{\alpha_k}(0)\geq Q_k^{\alpha_k}\left(d^k\left(\alpha_k\right)\right)$。因此，$Q_k^{\alpha_k}(0)-Q_k^{\alpha_k}\left(d^k\left(\alpha_k\right)\right)-\epsilon_2\alpha_k\left[m_k(0)-m_k\left(d_{LM}^k\right)\right]\geq 0$，即(2.8)成立。

若 $m_k(0)-m_k\left(d_{LM}^k\right)>0$，则 $m_k(0)>m_k\left(d_{LM}^k\right)\geq 0$，故 $m_k(0)>0$。

记 $\Gamma:=m_k(0)-m_k\left(d^k\left(\bar{\alpha}_k\right)\right)+\epsilon_2\left[m_k\left(d_{LM}^k\right)-m_k(0)\right]$，往证 $\Gamma>0$。

若(1.10)成立，则

$$\Gamma=m_k(0)+\epsilon_2\left[m_k\left(d_{LM}^k\right)-m_k(0)\right]=\left(1-\epsilon_2\right)m_k(0)+\epsilon_2 m_k\left(d_{LM}^k\right)>0.$$

若(1.11)成立，结合 $0<\epsilon_2<\epsilon_1$ 及 $m_k(0)-m_k\left(d_{LM}^k\right)>0$，则有

$$\Gamma\geq\epsilon_1\left[m_k(0)-m_k\left(d_{LM}^k\right)\right]+\epsilon_2\left[m_k\left(d_{LM}^k\right)-m_k(0)\right]=\left(\epsilon_1-\epsilon_2\right)\left[m_k(0)-m_k\left(d_{LM}^k\right)\right],$$

由此可知 $\Gamma>0$。

接下来证明 α_k 满足(2.8)。由(1.13)得

$$\begin{aligned}&\alpha_k\left[m_k(0)-m_k\left(d^k\left(\bar{\alpha}_k\right)\right)\right]+\epsilon_2\alpha_k\left[m_k\left(d_{LM}^k\right)-m_k(0)\right]\\&=\nabla f\left(x^k\right)^{\mathrm{T}}d^k\left(\bar{\alpha}_k\right)+\frac{1}{2}\left(d^k\left(\bar{\alpha}_k\right)\right)^{\mathrm{T}}B_k d^k\left(\bar{\alpha}_k\right)+\Gamma\cdot\rho,\end{aligned}$$

结合 $\Gamma>0,\rho>0$ 和(1.4)，得

$$\begin{aligned}&\epsilon_2\alpha_k\left[m_k(0)-m_k\left(d_{LM}^k\right)\right]\\&\leq-\nabla f\left(x^k\right)^{\mathrm{T}}d^k\left(\bar{\alpha}_k\right)-\frac{1}{2}\left(d^k\left(\bar{\alpha}_k\right)\right)^{\mathrm{T}}B_k d^k\left(\bar{\alpha}_k\right)+\alpha_k\left[m_k(0)-m_k\left(d^k\left(\bar{\alpha}_k\right)\right)\right]\\&=Q_k^{\alpha_k}(0)-Q_k^{\alpha_k}\left(d^k\left(\bar{\alpha}_k\right)\right)\leq Q_k^{\alpha_k}(0)-Q_k^{\alpha_k}\left(d^k\left(\alpha_k\right)\right),\end{aligned}$$

即 α_k 满足(3.8)。

最后证明 α_k 满足(1.10)和(1.11)。设罚参数 $\alpha_1<\alpha_2$，由于 $d^k(\alpha)$ 是子问题 $\mathrm{QM}\left(x^k,\alpha\right)(1.5)$ 的最优解，故有 $Q_k^{\alpha_2}\left(d^k\left(\alpha_1\right)\right)\geq Q_k^{\alpha_2}\left(d^k\left(\alpha_2\right)\right),Q_k^{\alpha_1}\left(d^k\left(\alpha_2\right)\right)\geq Q_k^{\alpha_1}\left(d^k\left(\alpha_1\right)\right)$，即

$$q_k^f\left(d^k\left(\alpha_1\right)\right)+\alpha_2 m_k\left(d^k\left(\alpha_1\right)\right)\geq q_k^f\left(d^k\left(\alpha_2\right)\right)+\alpha_2 m_k\left(d^k\left(\alpha_2\right)\right),$$

$$q_k^f\left(d^k\left(\alpha_2\right)\right)+\alpha_1 m_k\left(d^k\left(\alpha_2\right)\right)\geq q_k^f\left(d^k\left(\alpha_1\right)\right)+\alpha_1 m_k\left(d^k\left(\alpha_1\right)\right),$$

两式相减，得 $m_k\left(d^k\left(\alpha_1\right)\right)\geq m_k\left(d^k\left(\alpha_2\right)\right)$，因此，$m_k\left(d^k(\alpha)\right)$ 是关于罚参数 α 的单调减函数。由于(1.12)式不成立，故有 $Q_k^{\bar{\alpha}_k}(0)-Q_k^{\bar{\alpha}_k}\left(d^k\left(\bar{\alpha}_k\right)\right)<\epsilon_2\bar{\alpha}_k\left[m_k(0)-m_k\left(d_{LM}^k\right)\right]$，结合 $\Gamma>0$，化简得

$$\bar{\alpha}_k<\frac{\nabla f\left(x^k\right)^{\mathrm{T}}d^k\left(\bar{\alpha}_k\right)+\frac{1}{2}\left(d^k\left(\bar{\alpha}_k\right)\right)^{\mathrm{T}}B_k d^k\left(\bar{\alpha}_k\right)}{m_k(0)-m_k\left(d^k\left(\bar{\alpha}_k\right)\right)+\epsilon_2\left[m_k\left(d_{LM}^k\right)-m_k(0)\right]},$$

结合(1.13)式，可得 $\bar{\alpha}_k<\alpha_k$，因此有

$$m_k\left(d^k\left(\alpha_k\right)\right)\leq m_k\left(d^k\left(\bar{\alpha}_k\right)\right).\tag{3.10}$$

若 $m_k\left(d_{LM}^k\right)=0$，则由(2.10)和(2.9)得 $0\leq m_k\left(d^k\left(\alpha_k\right)\right)\leq m_k\left(d^k\left(\bar{\alpha}_k\right)\right)\leq m_k\left(d_{LM}^k\right)=0$，故 $m_k\left(d^k\left(\alpha_k\right)\right)=0$，即 α_k 满足(1.10)式。

若 $m_k\left(d_{LM}^k\right)>0$，则由(2.10)和(2.11)得

$$m_k(0)-m_k\left(d^k(\alpha_k)\right)\ge m_k(0)-m_k\left(d^k(\bar{\alpha}_k)\right)\ge\epsilon_1\left[m_k(0)-m_k\left(d_{LM}^k\right)\right],$$

即 α_k 满足(1.11)式。

(2) 若 x^k 不是罚函数 $P_{\alpha_k}(x)$ 的稳定点，则由引理 2.2 (1)知 $d^k(\alpha_k)\ne 0$。由于 $Q_k^{\alpha_k}(d)$ 是凸的且 $d^k(\alpha_k)$ 为 $\mathrm{QM}\left(x^k,\alpha_k\right)(1.5)$ 的最优解，故有 $Q_k^{\alpha_k}\left(d^k(\alpha_k)\right)<Q_k^{\alpha_k}(0)$。由方向导数的定义和 $Q_k^{\alpha_k}(d)$ 的凸性得

$$\begin{aligned}\left(Q_k^{\alpha_k}\right)'\left(0;d^k(\alpha_k)\right)&=\lim_{t\to0^+}\frac{Q_k^{\alpha_k}\left(td^k(\alpha_k)\right)-Q_k^{\alpha_k}(0)}{t}\\&=\lim_{t\to0^+}\frac{Q_k^{\alpha_k}\left((1-t)0+td^k(\alpha_k)\right)-Q_k^{\alpha_k}(0)}{t}\\&\le\lim_{t\to0^+}\frac{(1-t)Q_k^{\alpha_k}(0)+tQ_k^{\alpha_k}\left(d^k(\alpha_k)\right)-Q_k^{\alpha_k}(0)}{t}\\&=Q_k^{\alpha_k}\left(d^k(\alpha_k)\right)-Q_k^{\alpha_k}(0)<0,\end{aligned}$$

因此，$d^k(\alpha_k)$ 是 $Q_k^{\alpha_k}(d)$ 在 0 处的下降方向。由引理 2.1 可得：

$$P'_{\alpha_k}\left(x^k;d^k(\alpha_k)\right)=\left(Q_k^{\alpha_k}\right)'\left(0;d^k(\alpha_k)\right)<0$$

因此，$d^k(\alpha_k)$ 是罚函数 $P_{\alpha_k}(x)$ 在 x^k 处的下降方向。从而当 $t>0$ 充分小时，有如下不等式成立：

$$P_{\alpha_k}\left(x^k+td^k(\alpha_k)\right)<P_{\alpha_k}\left(x^k\right)+t\eta P'_{\alpha_k}\left(x^k;d^k(\alpha_k)\right).\tag{2.11}$$

由 $Q_k^{\alpha_k}(d)$ 的凸性可得 $Q_k^{\alpha_k}\left(0+td^k(\alpha_k)\right)\ge Q_k^{\alpha_k}(0)+t\left(Q_k^{\alpha_k}\right)'\left(0;d^k(\alpha_k)\right)$，故有

$$\begin{aligned}-t\left(Q_k^{\alpha_k}\right)'\left(0;d^k(\alpha_k)\right)&\ge Q_k^{\alpha_k}(0)-Q_k^{\alpha_k}\left(0+td^k(\alpha_k)\right)\\&=Q_k^{\alpha_k}(0)-Q_k^{\alpha_k}\left((1-t)0+td^k(\alpha_k)\right)\\&\ge Q_k^{\alpha_k}(0)-(1-t)Q_k^{\alpha_k}(0)-tQ_k^{\alpha_k}\left(d^k(\alpha_k)\right)\\&=t\left[Q_k^{\alpha_k}(0)-Q_k^{\alpha_k}\left(d^k(\alpha_k)\right)\right],\end{aligned}$$

结合引理 2.1 和(2.11)，可知不等式(1.14)成立。

若算法有限步终止，则由引理 2.2 知当前点 x^k 或为 NLSDP (0.1)的 KKT 点，或为 NLSDP (0.1)的不可行稳定点。在以下讨论中，不妨假设算法 A 产生无穷序列 $\left\{x^k\right\}$ 且 x^* 为其任一聚点。

类似文[8]的证明，可得如下引理成立。

引理 2.4： 若假设 A 成立，则对于任意 $\alpha>0$，子问题 $\mathrm{QM}\left(x^k,\alpha\right)(1.5)$ 的最优解 $d^k(\alpha)$ 包含于如下闭球：

$$\mathcal{B}_k:=\left\{d\mid\|d\|\le r^k\right\},$$

其中，$r^k=b_3+b_4\left\|\bar{d}_k\right\|,b_3,b_4>0$，$\bar{d}_k$ 是子问题 $\mathrm{LM}\left(x^k,\Delta_k\right)(1.7)$ 的解集中最小范数值点。

下面给出算法 A 的全局收敛性定理。

定理 2.1： 若假设 A 成立，罚参数序列 $\{\alpha_k\}$ 有界，算法 A 产生无穷序列 $\left\{x^k\right\}$ 且 x^* 为其任一聚点，则

(1) 若 $v\left(x^*\right)=0$，则 x^* 为 NLSDP (0.1)的一个 KKT 点；

(2) 若 $v\left(x^*\right)>0$，则 x^* 为 NLSDP (0.1)的一个不可行稳定点。

证明： 由算法 A 和假设可知，罚参数序列 $\{\alpha_k\}$ 是单调不减且有界，因此，存在常数 $\bar{\alpha}>0$，当 k 充分大时，有 $\alpha_k\equiv\bar{\alpha}$。记 $\mathcal{K}\subseteq\{1,2,\cdots\}$，不失一般性，当 $k\in\mathcal{K}$ 时，设 $x^k\to x^*,B_k\to B_*,Q_k^{\bar{\alpha}}\to Q_*^{\bar{\alpha}}$。记 d^* 是

子问题 $\mathrm{QM}\left(x^*,\bar{\alpha}\right)(1.5)$ 的最优解，往证 $d^*=0$。

(反证)假设 $d^*\neq 0$，则 $Q_*^{\bar{\alpha}}(0)-Q_*^{\bar{\alpha}}\left(d^*\right)>0$。于是有

$$Q_k^{\bar{\alpha}}(0)-Q_k^{\bar{\alpha}}\left(d^*\right)\xrightarrow{\mathcal{K}}Q_*^{\bar{\alpha}}(0)-Q_*^{\bar{\alpha}}\left(d^*\right)>0.$$

记 $Q_*^{\bar{\alpha}}(0)-Q_*^{\bar{\alpha}}\left(d^*\right)=2\varepsilon$，其中 $\varepsilon>0$。因此存在指标 k_0，当 $k(\in\mathcal{K})>k_0$ 时，由上式和 $Q_k^{\bar{\alpha}}\left(d^*\right)\geq Q_k^{\bar{\alpha}}\left(d^k(\bar{\alpha})\right)$ 得

$$Q_k^{\bar{\alpha}}(0)-Q_k^{\bar{\alpha}}\left(d^k(\bar{\alpha})\right)\geq Q_k^{\bar{\alpha}}(0)-Q_k^{\bar{\alpha}}\left(d^*\right)>\varepsilon. \tag{2.12}$$

当 $t>0$ 足够小时，由引理 2.4，(1.1)，(1.3)，假设 A1 和 Taylor 展开式得

$$\begin{aligned}
&v\left(x^k+td^k(\bar{\alpha})\right)-m_k\left(td^k(\bar{\alpha})\right)\\
&=\left\|h\left(x^k\right)+tDh\left(x^k\right)d^k(\bar{\alpha})+O\left(\left\|td^k(\bar{\alpha})\right\|^2\right)\right\|-\left\|h\left(x^k\right)+tDh\left(x^k\right)d^k(\bar{\alpha})\right\|\\
&\quad+\lambda_1\left(G\left(x^k\right)+tDG\left(x^k\right)d^k(\bar{\alpha})+O\left(\left\|td^k(\bar{\alpha})\right\|^2\right)\right)_+\\
&\quad-\lambda_1\left(G\left(x^k\right)+tDG\left(x^k\right)d^k(\bar{\alpha})\right)_+\\
&=O\left(\left\|td^k(\bar{\alpha})\right\|^2\right)
\end{aligned} \tag{2.13}$$

由引理 2.4，(1.3)，假设 A 及 Taylor 展开式得

$$\begin{aligned}
&f\left(x^k+td^k(\bar{\alpha})\right)-q_k^f\left(td^k(\bar{\alpha})\right)\\
&=f\left(x^k\right)+t\nabla f\left(x^k\right)^{\mathrm{T}}d^k(\bar{\alpha})+\frac{1}{2}t^2\left(d^k(\bar{\alpha})\right)^{\mathrm{T}}\nabla^2 f(\xi)d^k(\bar{\alpha})-q_k^f\left(td^k(\bar{\alpha})\right)\\
&=\frac{1}{2}t^2\left(d^k(\bar{\alpha})\right)^{\mathrm{T}}\left(\nabla^2 f(\xi)-B_k\right)d^k(\bar{\alpha})=O\left(\left\|td^k(\bar{\alpha})\right\|^2\right),
\end{aligned} \tag{2.14}$$

其中 ξ 介于 x^k 与 $x^k+td^k(\alpha_k)$ 之间。

由(2.13)和(2.14)知当 $t>0$ 足够小时，有

$$P_{\bar{\alpha}}\left(x^k+td^k(\bar{\alpha})\right)-Q_k^{\bar{\alpha}}\left(td^k(\bar{\alpha})\right)=O\left(\left\|td^k(\bar{\alpha})\right\|^2\right),$$

故存在一个常数 $b_1>0$，使得

$$\left|P_{\bar{\alpha}}\left(x^k+td^k(\bar{\alpha})\right)-Q_k^{\bar{\alpha}}\left(td^k(\bar{\alpha})\right)\right|\leq b_1\left\|td^k(\bar{\alpha})\right\|^2. \tag{2.15}$$

由 $Q_k^{\bar{\alpha}}(d)$ 的凸性可得

$$\begin{aligned}
Q_k^{\bar{\alpha}}(0)-Q_k^{\bar{\alpha}}\left(td^k(\bar{\alpha})\right)&\geq Q_k^{\bar{\alpha}}(0)-(1-t)Q_k^{\bar{\alpha}}(0)-tQ_k^{\bar{\alpha}}\left(d^k(\bar{\alpha})\right)\\
&=t\left(Q_k^{\bar{\alpha}}(0)-Q_k^{\bar{\alpha}}\left(d^k(\bar{\alpha})\right)\right).
\end{aligned} \tag{2.16}$$

由 $P_{\bar{\alpha}}\left(x^k\right),Q_k^{\bar{\alpha}}(d)$ 的定义知 $P_{\bar{\alpha}}\left(x^k\right)=Q_k^{\bar{\alpha}}(0)$，结合(2.12)，(2.15)和(2.16)，可得

$$\begin{aligned}
&P_{\bar{\alpha}}\left(x^k\right)-P_{\bar{\alpha}}\left(x^k+td^k(\bar{\alpha})\right)\\
&=\left(Q_k^{\bar{\alpha}}(0)-Q_k^{\bar{\alpha}}\left(td^k(\bar{\alpha})\right)\right)+Q_k^{\bar{\alpha}}\left(td^k(\bar{\alpha})\right)-P_{\bar{\alpha}}\left(x^k+td^k(\bar{\alpha})\right)\\
&\geq t\left(Q_k^{\bar{\alpha}}(0)-Q_k^{\bar{\alpha}}\left(d^k(\bar{\alpha})\right)\right)-b_1\left\|td^k(\bar{\alpha})\right\|^2\\
&=\eta t\left(Q_k^{\bar{\alpha}}(0)-Q_k^{\bar{\alpha}}\left(d^k(\bar{\alpha})\right)\right)+(1-\eta)t\left(Q_k^{\bar{\alpha}}(0)-Q_k^{\bar{\alpha}}\left(d^k(\bar{\alpha})\right)\right)-b_1\left\|td^k(\bar{\alpha})\right\|^2\\
&\geq\eta t\left(Q_k^{\bar{\alpha}}(0)-Q_k^{\bar{\alpha}}\left(d^k(\bar{\alpha})\right)\right)+(1-\eta)t\varepsilon-b_1\left\|td^k(\bar{\alpha})\right\|^2.
\end{aligned}$$

若 $t \le \frac{(1-\eta)\varepsilon}{b_1 \left\| d^k(\bar{\alpha}) \right\|^2}$，结合上式，则知(1.14)成立。由步长 t_k 的选择可知，

$$t_k \ge \min\left\{1, \frac{\tau(1-\eta)\varepsilon}{b_1 \left\| d^k(\bar{\alpha}) \right\|^2}\right\}. \tag{2.17}$$

注意到 $d^k(\bar{\alpha})$ 是子问题 $\mathrm{QM}\left(x^k, \bar{\alpha}\right)(1.5)$ 的最优解，可以证明

$$\left\| d^k(\bar{\alpha}) \right\| \le \max\left\{\frac{2}{a}\left(\left\| \nabla f\left(x^k\right) \right\| + \bar{\alpha} m_k(0)\right), 1\right\}. \tag{2.18}$$

(反证)假设上式不成立，则 $\left\| d^k(\bar{\alpha}) \right\| > 1, \left\| d^k(\bar{\alpha}) \right\| > \frac{2}{a}\left(\left\| \nabla f\left(x^k\right) \right\| + \bar{\alpha} m_k(0)\right)$。由(1.4)，假设 A2 以及上式可得

$$\begin{aligned}
& Q_k^{\bar{\alpha}}(0) - Q_k^{\bar{\alpha}}\left(d^k(\bar{\alpha})\right) \\
& = -\nabla f\left(x^k\right)^{\mathrm{T}} d^k(\bar{\alpha}) - \frac{1}{2}\left(d^k(\bar{\alpha})\right)^{\mathrm{T}} B_k d^k(\bar{\alpha}) - \bar{\alpha} m_k\left(d^k(\bar{\alpha})\right) + \bar{\alpha} m_k(0) \\
& \le \left\| \nabla f\left(x^k\right) \right\| \left\| d^k(\bar{\alpha}) \right\| - \frac{1}{2} a \left\| d^k(\bar{\alpha}) \right\|^2 + \bar{\alpha} m_k(0) \\
& < \left\| \nabla f\left(x^k\right) \right\| \left\| d^k(\bar{\alpha}) \right\| - \frac{1}{2} a \left\| d^k(\bar{\alpha}) \right\| \cdot \frac{2}{a}\left(\left\| \nabla f\left(x^k\right) \right\| + \bar{\alpha} m_k(0)\right) + \bar{\alpha} m_k(0) \\
& = \bar{\alpha} m_k(0)\left(1 - \left\| d^k(\bar{\alpha}) \right\|\right) < 0,
\end{aligned}$$

这与“$d^k(\bar{\alpha})$ 是 $\mathrm{QM}\left(x^k, \bar{\alpha}\right)(1.5)$ 的最优解”矛盾。因此不等式(2。18)成立。

由假设 A1，(2.17)和(2.18)可知，存在常数 $b_2 > 0$，使得 $t_k > b_2$ 成立，于是结合(1.14)和(2.12)可得 $P_{\bar{\alpha}}\left(x^k\right) - P_{\bar{\alpha}}\left(x^k + t_k d^k(\bar{\alpha})\right) > \eta b_2 \varepsilon$，由此可推知 $P_{\bar{\alpha}}\left(x^k\right) \to \infty$，这与“$P_{\bar{\alpha}}\left(x^k\right)$ 有界”矛盾。因此，$d^* = 0$。

于是由引理 2.2 (1)知 x^* 是罚函数 $P_{\bar{\alpha}}(x)$ 的稳定点。若 $v\left(x^*\right) = 0$，则由引理 2.2 (2)知 x^* 为 NLSDP (0.1)的 KKT 点，即结论(1)成立。

若 $v\left(x^*\right) > 0$，往下证明 x^* 为 NLSDP (0.1)的不可行稳定点。

下面证明 $m_*\left(d_{LM}^*\right) = v\left(x^*\right)$。由于 $d^k(\bar{\alpha}) \to 0, k \in \mathcal{K}$，则当 $k(\in \mathcal{K})$ 充分大时

$$Q_k^{\bar{\alpha}}(0) - Q_k^{\bar{\alpha}}\left(d^k(\bar{\alpha})\right) \to 0, \tag{2.19}$$

由步骤 4.3 知

$$Q_k^{\bar{\alpha}}(0) - Q_k^{\bar{\alpha}}\left(d^k(\bar{\alpha})\right) \ge \epsilon_2 \bar{\alpha}\left[m_k(0) - m_k\left(d_{LM}^k\right)\right], \tag{2.20}$$

因此，由(2.19)和(2.20)有 $m_k(0) - m_k\left(d_{LM}^k\right) \to 0$。由此可知

$$m_k(0) - m_k\left(d_{LM}^k\right) \to m_*(0) - m_*\left(d_{LM}^*\right) = 0,$$

从而 $m_*\left(d_{LM}^*\right) = m_*(0) = v\left(x^*\right)$，于是由引理 2.2 (3)可知 x^* 是 $v(x)$ 的稳定点。又因 $v\left(x^*\right) > 0$，所以 x^* 是 NLSDP (0.1)的不可行稳定点。

4. 数值试验

为了验证算法 A 的可行性与有效性，本节利用 MATLAB (2014a)实现了算法，程序运行环境为：Windows 7 (64 bite)，RAM: 4G，CPU 3，60 GHz。测试的算例来自于文[10] [11] [12]中的静态反馈控制问题(SOFP)，即

$$\begin{array}{ll} \min & \operatorname{Tr}\left(LQ_F\right) \\ \text{s.t.} & A_F L + LA_F^{\mathrm{T}} + I = 0, \\ & A_F L + LA_F^{\mathrm{T}} \preceq 0, L \succ 0, \end{array}$$

在算法实现中，选取[12]的初始点为 $L = 10I \in R^{nx \times nx}, F = 0 \in R^{nu \times ny}$，其中 nx, nu, ny 为给定的数。选取的参数如下：

$$\alpha_0 = 80, \rho = 100, \eta 1 = 0.5, \eta 2 = 0.3, \tau = 0.5, \eta = 0.001.$$

终止准则为：$\left\|d^k\right\| \le 10^{-4}, \left\|v\left(x^k\right)\right\| \le 10^{-4}$。数值结果见表 1，表中的主要符号含义如下：

问题：COMPl$_e$ib 算例库的算例名称；

n：自变量维数；

m：半定约束矩阵的阶数；

p：等式约束个数；

f^*：最优函数值；

Iter：算法迭代次数；

P^*：最优解的约束违反度函数值；

Time：计算机运行时间(秒)。

Table 1. Numerical result
表 1. 数值结果

问题	n	p	m	Iter	P^*	f^*	Time
AC1	24	15	5	667	4.858138e−08	2.002884e+01	2.063345e+01
AC2	24	15	5	667	4.858138e−08	2.002884e+01	2.136759e+01
AC3	23	15	5	171	4.535034e−09	2.184061e+01	3.566312e+00
AC4	12	10	4	369	5.104441e−08	1.198998e+01	1.165651e+01
AC6	36	28	7	182	1.592843e−07	1.090587e+01	7.348702e+00
AC7	47	45	9	3322	1.995717e−08	1.559962e+02	1.983689e+02
AC15	16	10	4	2980	6.315831e−11	1.590686e+02	7.697651e+01
AC17	12	10	4	135	6.463962e−09	1.462636e+01	4.201801e+00
HE2	14	10	4	45	1.267061e−09	1.187440e+01	1.268405e+00
DIS1	52	36	8	132	1.102015e−09	1.535720e+01	6.519064e+00
DIS2	10	6	3	120	5.039833e−09	8.595297e+00	4.221502e+00
DIS3	37	21	6	84	1.312657e−08	5.986639e+00	3.557754e+00
DIS4	45	21	6	110	1.514964e−09	3.957641e+00	4.589913e+00
AGS	82	78	12	78	5.434856e−09	4.942235e+01	9.242347e+00
UWV	40	36	8	1368	3.847353e−05	2.093619e+00	6.385419e+01
IH	341	231	21	73	1.276043e−08	4.229681e+01	4.684438e+01
CSE1	230	210	20	95	4.403847e−10	7.669994e+01	6.509819e+01
PSM	34	28	7	124	5.515611e−09	3.236933e+00	4.639584e+00
NN2	4	3	2	79	1.417326e−08	3.464102e+00	4.567462e+00
NN4	16	10	4	134	3.508822e−09	5.407893e+00	2.829252e+00
NN8	10	6	3	44	5.854256e−08	4.438272e+00	1.167806e+00

Continued

NN11	151	136	16	127	3.684578e−09	2.758270e+02	6.448854e+01
NN15	10	6	3	2624	3.601449e−12	4.695404e+02	8.593176e+01
NN16	52	36	8	439	4.972716e−07	1.536476e+01	2.148031e+01
HF2D13	23	15	5	1638	3.981798e−10	5.109506e−01	5.149195e+01
HF2D14	23	15	5	4468	1.019683e−09	4.556688e+00	1.815774e+02
HF2D16	23	15	5	501	5.804131e−09	3.227871e+00	1.714861e+01
HF2D17	23	15	5	586	2.309633e−09	7.647004e−01	1.991716e+01
HF2D18	19	15	5	4407	1.710919e−10	1.309318e+01	1.319252e+02
TMD	29	21	6	835	1.695120e−09	4.798488e+01	2.122048e+01

5. 结束语

本文提出了一个线搜索精确罚函数法。搜索方向由二次半定规划子问题产生，罚函数作为效益函数用于线搜索，线搜索保证效益函数的充分下降；罚参数在算法中自动更新，且罚参数的更新策略依赖信赖域子问题的最优解。在适当的条件下算法具有全局收敛性。

基金项目

获国家自然科学基金(No. 11561005)，广西自然科学基金(No. 2016GXNSFAA380248)资助。

参考文献

[1] Ben-Tal, A., Jarre, F., Kocvara, M., Nemirovski, A. and Zowe, J. (2000) Optimal Design of Trusses under a Nonconvex Global Buckling Constraint. *Optimization and Engineering*, **1**, 189-213. https://doi.org/10.1023/A:1010091831812

[2] Fares, B., Noll, D. and Apkarian, P. (2002) Robust Control via Sequential Semidefinite Programming. *SIAM Journal on Control and Optimization*, **40**, 1791-1820. https://doi.org/10.1137/S0363012900373483

[3] Kocvara, M. and Stingl, M. (2004) Solving Nonconvex SDP Problems of Structural Optimization with Stability Control. *Optimization Methods and Software*, **19**, 595-609. https://doi.org/10.1080/10556780410001682844

[4] Correa, R. and Ramirez, H.C. (2004) A Global Algorithm for Nonlinear Semidefinite Programming. *SIAM Journal on Optimization*, **15**, 303-318. https://doi.org/10.1137/S1052623402417298

[5] Zhao, Q. and Chen, Z.W. (2018) An SQP-Type Method with Superlinear Convergence for Nonlinear Semidefinite Programming. *Asia-Pacific Journal of Operational Research*, **35**, Article ID: 1850009. https://doi.org/10.1142/S0217595918500094

[6] Li, J.L., Yang, Z.P. and Jian, J.B. (2017) A Globally Convergent QP-Free Algorithm for Nonlinear Semidefinite Programming. *Journal of Inequalities and Application*.

[7] 张辉. 非线性半定规划的两个 SSDP 算法[D]: [硕士学位论文]. 南宁: 广西大学, 2018.

[8] Byrd, R.H., Lopez-Calva, G. and Nocedal, J. (2009) A Line Search Exact Penalty Method Using Steering Rules. *Mathematical Programming*, **133**, 1-35.

[9] Byrd, R.H., Nocedal, J. and Waltz, R.A. (2008) Steering Exact Penalty Methods for Nonlinear Programming. *Optimization Methods and Software*, **23**, 197-213. https://doi.org/10.1080/10556780701394169

[10] Leibfritz, F. (2004) COMPlib-Constrained Matrix-Optimization Problem Library. Technical Report.

[11] Gomez, W. and Ramirez, H. (2010) A Filter Algorithm for Nonlinear Semidefinite Programming. *Computational and Applied Mathematics*, **29**, 297-328.

[12] Zhao, Q. and Chen, Z.W. (2016) On the Superlinear Local Convergence of a Penalty-Free Method for Nonlinear Semidefinite Programming. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **308**, 1-19. https://doi.org/10.1016/j.cam.2016.05.007

知网检索的两种方式：

1. 打开知网页面 http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD
   下拉列表框选择：[ISSN]，输入期刊 ISSN：2324-7991，即可查询
2. 打开知网首页 http://cnki.net/
   左侧“国际文献总库”进入，输入文章标题，即可查询

投稿请点击：http://www.hanspub.org/Submission.aspx
期刊邮箱：aam@hanspub.org